This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Acerca de este libro

Esta es una copia digital de un libro que, durante generaciones, se ha conservado en las estanterías de una biblioteca, hasta que Google ha decidido escanearlo como parte de un proyecto que pretende que sea posible descubrir en línea libros de todo el mundo.

Ha sobrevivido tantos años como para que los derechos de autor hayan expirado y el libro pase a ser de dominio público. El que un libro sea de dominio público significa que nunca ha estado protegido por derechos de autor, o bien que el período legal de estos derechos ya ha expirado. Es posible que una misma obra sea de dominio público en unos países y, sin embargo, no lo sea en otros. Los libros de dominio público son nuestras puertas hacia el pasado, suponen un patrimonio histórico, cultural y de conocimientos que, a menudo, resulta difícil de descubrir.

Todas las anotaciones, marcas y otras señales en los márgenes que estén presentes en el volumen original aparecerán también en este archivo como testimonio del largo viaje que el libro ha recorrido desde el editor hasta la biblioteca y, finalmente, hasta usted.

Normas de uso

Google se enorgullece de poder colaborar con distintas bibliotecas para digitalizar los materiales de dominio público a fin de hacerlos accesibles a todo el mundo. Los libros de dominio público son patrimonio de todos, nosotros somos sus humildes guardianes. No obstante, se trata de un trabajo caro. Por este motivo, y para poder ofrecer este recurso, hemos tomado medidas para evitar que se produzca un abuso por parte de terceros con fines comerciales, y hemos incluido restricciones técnicas sobre las solicitudes automatizadas.

Asimismo, le pedimos que:

+ *Haga un uso exclusivamente no comercial de estos archivos* Hemos diseñado la Búsqueda de libros de Google para el uso de particulares; como tal, le pedimos que utilice estos archivos con fines personales, y no comerciales.

+ *No envíe solicitudes automatizadas* Por favor, no envíe solicitudes automatizadas de ningún tipo al sistema de Google. Si está llevando a cabo una investigación sobre traducción automática, reconocimiento óptico de caracteres u otros campos para los que resulte útil disfrutar de acceso a una gran cantidad de texto, por favor, envíenos un mensaje. Fomentamos el uso de materiales de dominio público con estos propósitos y seguro que podremos ayudarle.

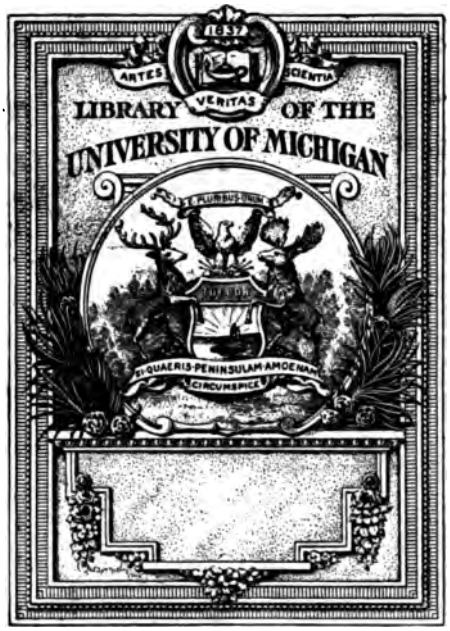
+ *Conserve la atribución* La filigrana de Google que verá en todos los archivos es fundamental para informar a los usuarios sobre este proyecto y ayudarles a encontrar materiales adicionales en la Búsqueda de libros de Google. Por favor, no la elimine.

+ *Manténgase siempre dentro de la legalidad* Sea cual sea el uso que haga de estos materiales, recuerde que es responsable de asegurarse de que todo lo que hace es legal. No dé por sentado que, por el hecho de que una obra se considere de dominio público para los usuarios de los Estados Unidos, lo será también para los usuarios de otros países. La legislación sobre derechos de autor varía de un país a otro, y no podemos facilitar información sobre si está permitido un uso específico de algún libro. Por favor, no suponga que la aparición de un libro en nuestro programa significa que se puede utilizar de igual manera en todo el mundo. La responsabilidad ante la infracción de los derechos de autor puede ser muy grave.

Acerca de la Búsqueda de libros de Google

El objetivo de Google consiste en organizar información procedente de todo el mundo y hacerla accesible y útil de forma universal. El programa de Búsqueda de libros de Google ayuda a los lectores a descubrir los libros de todo el mundo a la vez que ayuda a autores y editores a llegar a nuevas audiencias. Podrá realizar búsquedas en el texto completo de este libro en la web, en la página `http://books.google.com`

B 1,064,307


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

65

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO VI

MADRID
IMPRENTA DE LA GACETA DE MADRID
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.
1907

ART. 117 DE LOS ESTATUTOS DE LA ACADEMIA

«La Academia no adopta ni rehusa las opiniones de sus individuos; cada autor es responsable de lo que contengan sus escritos.»

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID

ACADÉMICOS DE NÚMERO

Excmo. Sr. D. José Echegaray, *Presidente.*
Zurbano, 44.

Excmo. Sr. D. Eduardo Saavedra, *Vicepresidente.*
Fuencarral, 74.

Sr. D. Joaquín González Hidalgo.
Alcalá, 36.

Ilmo. Sr. D. Gabriel de la Puerta y Ródenas.
Valverde, 30 y 32.

Excmo. Sr. D. Daniel de Cortázar.
Velázquez, 16.

Ilmo. Sr. D. José Rodríguez Carracido, *Bibliotecario.*
Orellana, 10.

Excmo. Sr. D. Francisco de P. Arrillaga, *Secretario.*
Valverde, 26.

Excmo. Sr. D. Julián Calleja y Sánchez, *Tesorero.*
Argensola, 6.

Sr. D. Eduardo Torroja y Caballé, *Contador.*
Requena, 9.

Excmo. Sr. D. Amós Salvador y Rodrigáñez.
Carrera de San Jerónimo, 53.

Sr. D. Francisco de Paula Rojas.
Lealtad, 13.

Excmo. Sr. D. Juan Navarro-Reverter.
Barquillo, 15.

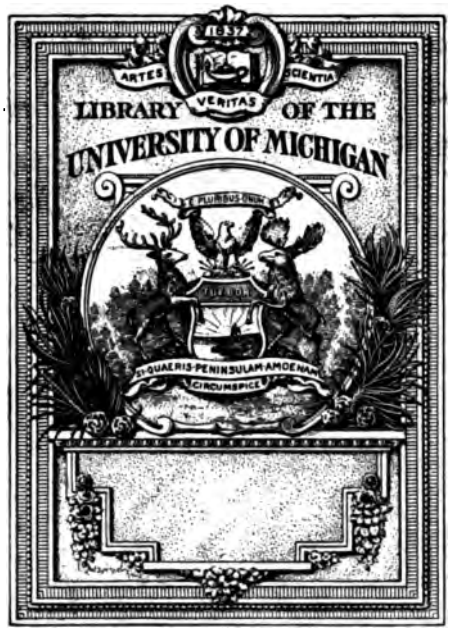
Excmo. Sr. D. Lucas Mallada.
Santa Teresa, 7.

Excmo. Sr. D. Santiago Ramón y Cajal.
Atocha, 125.

Excmo. Sr. D. Diego Ollero y Carmona.
Ferraz, 54.

Sr. D. Pedro Palacios.
Monte Esquinza, 9.

195870


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

en que las fuerzas exteriores pasasen bruscamente de un valor á otro, al pasar del interior del cuerpo á la superficie, es decir, desde F..... á P.....

Esta es, en general, una descontinuidad, y el salvarla de una manera rigurosa, no es tan fácil como parece.

Tal dificultad no existía, cuando se consideraban todos los puntos como libres, y para cada uno de ellos se establecían las tres ecuaciones de equilibrio, porque entonces teníamos, aun en el caso más general, $3n$ ecuaciones en *diferenciales simultáneas*, y en este sistema importa poco que los segundos términos de la ecuación obedezcan ó no á la ley de continuidad.

La circunstancia de la continuidad podrá facilitar la integración; pero sean distintas ó sean continuas las componentes X, Y, Z....., la naturaleza del problema no cambia.

Ahora bien; como tantas veces hemos explicado, al pasar de las ecuaciones en diferenciales simultáneas á las ecuaciones en diferenciales parciales, lo cual equivale en el fondo á pasar de la discontinuidad á la continuidad, el que las componentes de P no estén en ley de continuidad con las componentes de F, es un obstáculo serio para la solución del problema.

Podrá resolverse en muchos casos, aunque son muchos más aquellos en que no se sabe encontrar la solución; mas de todas maneras, la discontinuidad dificulta los problemas: esto es evidente.

Hay métodos para salvar estos obstáculos, como veremos en las conferencias próximas, y, sobre todo, en el curso inmediato; pero es, por decirlo así, saltando por encima de la dificultad misma, cerrando los ojos, como vulgarmente se dice, y prescindiendo, hasta cierto punto, de la zona de espesor ε.

***

Y, sin embargo, la realidad los impone; y como hay que introducirlos en la teoría, es forzoso introducir ciertas convenciones, y sobre todo, definirlos de un modo claro y preciso.

Materia es ésta, que ahora no podemos tratar por completo; ya la trataremos en el próximo curso, porque como antes decíamos, más se relaciona con el método de Lamé que con el método de Cauchy.

La prueba de que hay en estos conceptos algo vago aun-

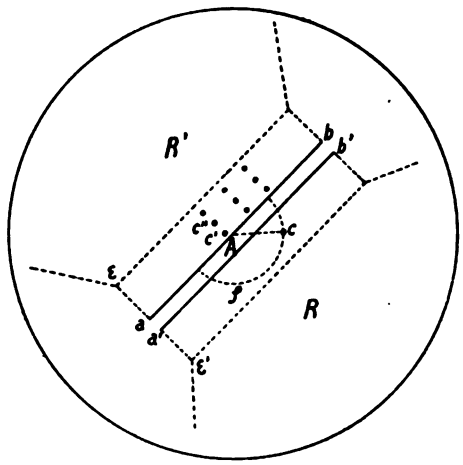


Figura 36.

que sean eminentemente prácticos y aunque la realidad los imponga, es que no todos los autores los definen del mismo modo, y así ha tenido que hacer Mr. Poincaré en su notabilísima teoría de la Elasticidad, un estudio de estas diferentes definiciones para demostrar, que todas ellas conducen al mismo resultado. Nosotros, por el pronto, daremos una definición provisional en la forma siguiente:

Supongamos (fig. 36) un sistema elástico, compuesto, según la hipótesis de Cauchy, de un número inmenso de puntos materiales A, c, c', c''..... d', d''....., sometidos á fuerzas

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO VI

MADRID
IMPRENTA DE LA GACETA DE MADRID
CALLE DE FONTEJOS, NÚM. 8.
1907

que su resultante tendrá, en general, una dirección oblicua respecto á los tres planos coordenados.

Dichas componentes *del esfuerzo interno*, entre dos puntos cualesquiera c, c', de masas m, m', son (conferencia quinta),

$$P = mm'\left[f(r)\delta u + \frac{f'(r)}{r}(\delta x\delta u + \delta y\delta v + \delta z\delta w)\right]$$

$$Q = mm'\left[f(r)\delta v + \frac{f'(r)}{r}(\delta x\delta u + \delta y\delta v + \delta z\delta w)\right]$$

$$R = mm'\left[f(r)\delta w + \frac{f'(r)}{r}(\delta x\delta u + \delta y\delta v + \delta z\delta w)\right];$$

prescindiendo de tres términos de que luego hablaremos.

La acción sobre c', de todos los puntos útiles del prisma $a'\ b'\ \varepsilon'$, serán las sumas

$$\Sigma P,\ \Sigma Q,\ \Sigma R,$$

determinando convenientemente los límites de Σ como luego ha de explicarse.

Y sumando todas estas sumas para los puntos $c'\ c''$ ..... de una normal á ab, y después, sumando todas las acciones de todas las normales c', c'' ..... d', d'' ..... comprendidas en el cilindro $ab\varepsilon$, tendremos las componentes de la tracción ó compresión ó fuerzas de deslizamiento del cilindro $ab\varepsilon$, y por lo tanto, del esfuerzo sobre el plano ab que forma parte de dicho sólido $ab\varepsilon$.

De los pares de fuerzas podemos prescindir, porque los esfuerzos parciales son, ó suponemos que son, próximamente paralelos é iguales; luego sus diferencias, multiplicadas por los brazos de palanca, que serían del orden de la distancia ab, serán infinitamente pequeños de orden superior.

Empecemos por calcular ΣP, ΣQ, ΣR para un punto A de R' muy próximo á la placa ab.

Si desde el punto A (fig. 36) trazamos en la región R una semiesfera de radio ε y aplicamos las fórmulas elementales citadas á todos los puntos comprendidos en esta semiesfera, dichas sumas serán las tres componentes de la acción sobre el punto A de todos los puntos útiles del cilindro $a' b' \varepsilon$.

Estas sumas, en forma general, ya las hemos calculado en la conferencia citada y las reproduciremos aquí, con lo cual tendremos, en primer lugar, el valor de la componente ΣP.

Pero en la fórmula de donde vamos á tomar esta expresión, hay que prescindir de los dos primeros términos, porque éstos son la fuerza de inercia $-m \frac{d^2u}{dt^2}$ y la fuerza exterior X. (Conferencia V, fórmulas (1)).

Sólo la última parte es la que expresa la componente paralela al eje de las X de todas las fuerzas internas comprendidas en la esfera ε y que actúan sobre m.

Y, ante todo, vamos á hacer una simplificación, y es, prescindir en el desarrollo de las fórmulas (1) de todas las derivadas segundas; porque estos términos contienen todos ellos cuatro factores $\delta x, \delta y, \delta z$, por ejemplo $\delta x^4, \delta x^2, \delta y$ ....., al paso que los términos correspondientes á las derivadas de primer orden, sólo contienen tres, y los límites de la integración se refieren en uno y otro caso á la esfera de radie ε ó á una parte de ella.

Nótese, dicho sea de paso, que por la naturaleza del problema que ahora estamos resolviendo, vamos á hacer lo contrario de lo que hacíamos en la conferencia á que nos hemos referido.

En aquella ocasión despreciábamos todos los términos relativos á las derivadas primeras de u, v, w, y sólo conservábamos los términos que comprendían las derivadas segundas.

Ahora hacemos lo inverso; despreciamos todos los términos relativos á las derivadas segundas, porque son de cuarto

orden, y los coeficientes de las derivadas de primero no pasan del tercer orden.

Si allí despreciábamos estos últimos términos, es porque la integración comprendía *toda la esfera* ε, y en cada suma, por razón de simetría, *había siempre* dos términos iguales y de signos contrarios; mas ahora no consideramos la esfera completa, sino una parte de ella.

Tenemos, pues, según lo expuesto, que el valor de ΣP será el siguiente:

$$\begin{aligned}\Sigma P = {} & \Sigma mm' f(r)\delta x + \frac{du}{dx}\left(\Sigma mm' f(r)\delta x + \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta x^3\right) + \\ & + \frac{dv}{dx}\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta x^2 \delta y + \frac{dw}{dx}\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta x^2 \delta z \\ & + \frac{du}{dy}\left(\Sigma mm' f(r)\delta y + \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta x^2 \delta y\right) + \\ & + \frac{dv}{dy}\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta x dy^2 + \frac{dw}{dy}\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta x \delta y \delta z \quad (1) \\ & + \frac{du}{dz}\left(\Sigma mm' f(r)\delta z + \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta x^2 \delta z\right) + \\ & + \frac{dv}{dz}\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta x \delta y \delta z + \frac{dw}{dz}\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta x \delta z^2.\end{aligned}$$

Claro es que estas Σ tienen una significación distinta, como veremos pronto, de la que tenían en las fórmulas fundamentales.

Debe notarse que la fórmula anterior contiene el término $\Sigma mm' f(r)\delta x$, que no contenía la fórmula de la conferencia quinta, de donde está copiada la (1) de esta conferencia. Pero entraba en la fórmula fundamental de la conferencia cuarta.

Después suprimimos dicho término $\Sigma mm' f(r)\delta x$ al suprimir el grupo $X_i + \Sigma mm' f(r)\delta x$ que expresaba el equilibrio en el *estado inicial.*

Mas ahora queremos calcular los *esfuerzos elásticos tota-*

les, partiendo del *estado natural* en que *son cero,* y por eso los tenemos en cuenta.

Sobre esto insistiremos después.

Para obtener ΣQ no tenemos más que aplicar á la última fórmula las substituciones circulares (u, v, w), (x, v, z), según hemos explicado ampliamente en otra ocasión, y tendremos de este modo:

$$\begin{aligned}\Sigma Q = {} & \Sigma mm' f(r)\delta y + \frac{dv}{dy}\left(\Sigma mm' f(r)\delta y + \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta y^3\right) \\ & + \frac{dw}{dy}\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta y^2 \delta z + \frac{du}{dy}\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta y^2 \delta x \\ & + \frac{dv}{dz}\left(\Sigma mm' f(r)\delta z + \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta y^2 \delta z\right) \\ & + \frac{dw}{dz}\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta y \delta z^2 + \frac{du}{dz}\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta y \delta z \delta x \qquad (2) \\ & + \frac{dv}{dx}\left(\Sigma mm' f(r)\delta x + \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta y^2 \delta x\right) \\ & + \frac{dw}{dx}\Sigma mm' \delta x \delta y \delta z + \frac{du}{dx}\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta y \delta x^2.\end{aligned}$$

Del mismo modo, aplicando á esta última ecuación, las expresadas substituciones circulares (u, v, w), (x, y, z), obtendremos el valor de la tercera componente de la acción sobre la masa m, situada en A, de todo el cilindro $a'\ b'\ \varepsilon$; así,

$$\begin{aligned}\Sigma R = {} & \Sigma mm' f(r)\delta z + \frac{dw}{dz}\left(\Sigma mm' f(r)\delta z + \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta z^3\right) \\ & + \frac{du}{dz}\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta z^2 \delta x + \frac{dv}{dz}\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta z^2 dy \\ & + \frac{dw}{dx}\left(\Sigma mm' f(r)\delta x + \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta z^2 \delta x\right) \qquad (3)\end{aligned}$$

$$+\frac{du}{dx}\Sigma mm'\frac{f'(r)}{r}\delta z\delta x^2+\frac{dw}{dx}\Sigma mm'\frac{f(r)}{r}\delta y\delta z\delta x$$

$$+\frac{dw}{dy}\left(\Sigma mm'f(r)\delta y+\Sigma mm'\frac{f(r)}{r}\delta z^2\delta y\right)$$

$$+\frac{du}{dy}\Sigma mm'\delta x\delta y\delta z+\frac{dv}{dy}\Sigma mm'\frac{f(r)}{r}\delta z\delta y^2.$$

Teniendo las tres expresiones de ΣP, ΣQ, ΣR podemos calcular fácilmente las tres componentes de la presión ó de la tensión sobre el plano ó placa ideal de que antes hablábamos en los tres casos indicados: cuando coincide con el plano de las $y\ z$, cuando coincide asimismo con el plano de las $x\ z$, y, por último, cuando coincide con el plano de las $x\ y$.

En todos estos casos, y en general, existirán las tres componentes para cada plano ó placa, y, por lo tanto, la acción y la reacción serán oblicuas á dicho plano.

Para determinarlas, no habrá más que acomodar á cada uno de estos tres casos los límites de la Σ correspondiente, aplicando las simplificaciones, que vayan presentándose.

Precisemos estas ideas.

Pero antes fijemos bien las notaciones, para dar más claridad á la explicación.

Llamemos en general N á la tensión, compresión ó fuerza de deslizamiento correspondiente á un plano cualquiera muy pequeño trazado en el interior del cuerpo ó del sistema.

Por el pronto, sólo vamos á calcular la acción de la región R (fig. 36) sobre un punto A, por ejemplo, de dicho plano, ó infinitamente próximo á él, en la región R'.

Esta acción ó esfuerzo, en general, será oblicua al plano y tendrá tres componentes que vamos á calcular para los *tres casos:* primero, plano ó placa ideal, paralela á $y\ z$; segundo, paralela á $x\ z$; tercero, paralela á $x\ y$.

A N le pondremos un primer subíndice, que indique á qué eje es perpendicular la placa ideal: así,

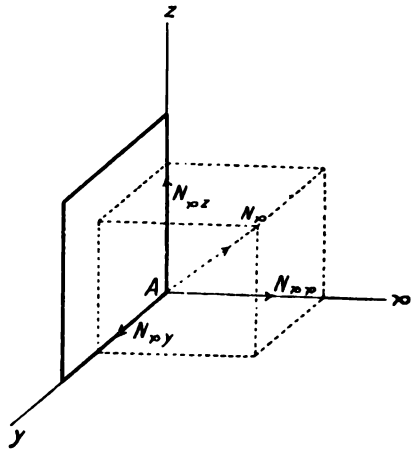


Figura 38.

N_x es la acción resultante correspondiente á un punto A, cuando el plano ó placa es perpendicular al eje x (fig. 38).

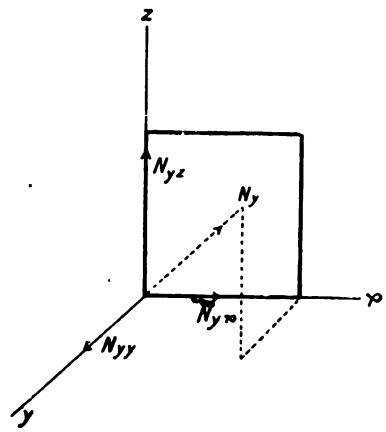


Figura 39.

El contorno del plano ó de una parte está marcado con líneas gruesas.

N_y es la acción expresada cuando el plano es perpendicular al eje de la y (fig. 39).

N_z es la acción ó esfuerzo cuando la placa es perpendicular á z (empleamos indiferentemente ambas palabras, aunque la primera no sea muy propia; *en este caso*, para nosotros, acción es *esfuerzo*) (fig. 40).

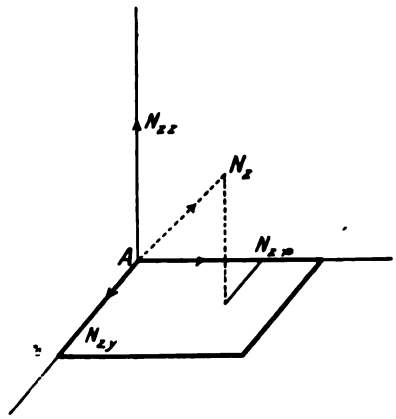


Figura 40.

Cada uno de estos tres esfuerzos ó acciones N_x, N_y, N_z, tendrá sus tres componentes, que designaremos por otro subíndice colocado á la derecha del primero.

Así, los tres componentes de N_x (fig. 38), serán,

paralelamente al eje x ..... N_{xx},

paralelamente al eje y ..... N_{xy},

paralelamente al eje z ..... N_{xz}.

Del mismo modo, las tres componentes de N_y (fig. 39), serán,

para el eje x ..... N_{yx},

para el eje y ..... N_{yy},

para el eje z ..... N_{yz}.

Por último, las tres componentes de N_z (fig. 40), se representarán del mismo modo,

eje x..... N_{zx},
eje y..... N_{zy},
eje z..... N_{zz}.

Las tres fórmulas (1), (2), (3), nos permiten calcular las N con sólo determinar para cada caso la significación y extensión de Σ, según hemos dicho antes.

Empecemos calculando las tres componentes de N_x, que son N_{xx}, N_{xy}, N_{xz}.

Las fórmulas son las (1), (2), (3), que dan ΣP, ΣQ, ΣR.

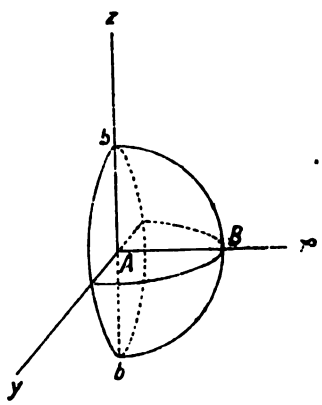


Figura 38 bis.

Tracemos (fig. 38 bis) desde A, con un radio ε, la *semiesfera* bbB cuya base ó círculo máximo bb se apoya sobre el plano de las y z y cuyo eje A B perpendicular á dicha base coincide con el eje de las x.

Recordemos que P, Q, R son las componentes del esfuerzo entre el punto A y un punto cualquiera a del interior de la semiesfera. Y ΣP, ΣQ, ΣR son las componentes de la resultante de todos los puntos materiales comprendidos en la semiesfera bbB.

Así es que aplicando á las fórmulas (1), (2), (3), que dan los valores de ΣP, ΣQ, ΣR, como límite de las Σ, la semiesfera bbB, las ΣP, ΣQ, ΣR, se convertirán en N_{xx}, N_{xy}, N_{xz}.

Pero la aplicación de este límite semiesférico permite simplificaciones importantes á causa de los dos planos de simetría, el de las x z, y el de x y de la semiesfera.

Por ejemplo, en la fórmula (1) el término

$$\frac{dv}{dx} \Sigma mm \frac{f'(r)}{r} \delta x^2 \delta y$$

desaparece; porque tomando dos puntos simétricos respecto al plano de la xz, la Σ contendrá estos dos términos,

$$\frac{dv}{dx} \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta x^2 \delta y, \quad \frac{dv}{dx} \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta x^2 (-\delta y),$$

que se destruyen.

Y, por otra parte, *todos los puntos* se pueden asociar dos á dos de esta manera.

Así el término que consideramos desaparece.

Lo mismo puede decirse del término

$$\frac{dw}{dx} \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta x^2 \delta z,$$

asociando los puntos simétricos por relación al plano xy, dos á dos.

Cada par de puntos simétricos dará términos iguales y de signo contrario.

$$\frac{dw}{dx} \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta x^2 \delta z, \quad \frac{dw}{dx} \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta x^2 (-\delta z)$$

y el término en cuestión se anulará.

En resumen, y en general: puede suprimirse todo término de las fórmulas (1), (2), (3), que contengan *una potencia impar* de δy, δz, sean cuales fueren los demás factores de dicho término.

Hecha esta simplificación,

lo que quede de ΣP expresará el valor de N_{xx}
el resto de ΣQ — el — de N_{xy}
y el de ΣR — el — de N_{xz}.

Así en ΣP tendremos:

$$N_{xx} = \frac{du}{dx}\left[\Sigma mm' f(r)\delta x + \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta x^3\right] +$$

$$+ \frac{dv}{dy}\ \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta x \delta y^2 + \frac{dw}{dz}\ \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta x \delta z^2 +$$

$$+ \Sigma mm' f(r)\delta x.$$

Haciendo lo mismo en ΣQ, quedará:

$$N_{xy} = \frac{du}{dy}\ \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta y^2 \delta x +$$

$$+ \frac{dv}{dx}\left(\Sigma mm' f(r)\delta x + \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta y^2 \delta x\right).$$

Y, por último, la misma simplificación, aplicada á ΣR nos dará:

$$N_{xz} = \frac{du}{dz}\ \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\delta z^2 \delta x +$$

$$+ \frac{dw}{dx}\left(\Sigma mm' f(r)\delta x + \Sigma mm' \frac{f(r)}{r}\delta z^2 dx\right.$$

***

Para obtener N_{yx}, N_{yy}, N_{yz} seguiremos el mismo método y aplicaremos las mismas fórmulas (1), (2), (3), que dan $\Sigma P, \Sigma Q, \Sigma R$; pero los límites de las sumas ó integrales serán distintos. En vez de tomar como límite la semiesfera de la figura 38 bis, tomaremos la de la figura 39 bis, en la que la base bb se aplica sobre el plano de las xz y el eje AB, sobre el eje de las y.

Las simplificaciones se efectuarán suprimiendo en ΣP, ΣQ,

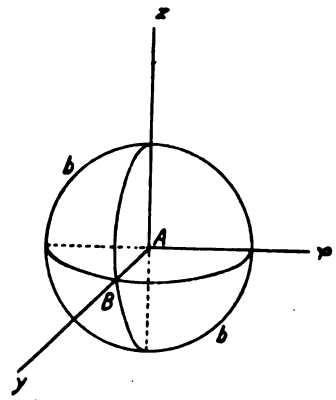


Figura 39 bis.

ΣR todos los términos en que entran potencias impares de δx, δz, y tendremos:

$$N_{yx} = \frac{dv}{dx} \Sigma m m' \frac{f'(r)}{r} \delta x^2 \delta y +$$

$$+ \frac{du}{dy} \left(\Sigma m m' f(r) dy + \Sigma m m' \frac{f'(r)}{r} \delta x^2 \delta y \right)$$

$$N_{yy} = \frac{dv}{dy} \left(\Sigma m m' f(r) \delta y + \Sigma m m' \frac{f'(r)}{r} \delta y^3 \right) +$$

$$+ \frac{dw}{dz} \Sigma m m' \frac{f'(r)}{r} \delta y \delta z^2 + \frac{du}{dx} \Sigma m m' \frac{f'(r)}{r} \delta y \delta x^2 +$$

$$+ \Sigma m m' f(r) \delta y$$

$$N_{yz} = \frac{dv}{dz} \Sigma m m' \frac{f'(r)}{r} \delta z^2 \delta y +$$

$$+ \frac{dw}{dy} \left(\Sigma m m' f(r) \delta y + \Sigma m m' \frac{f'(r)}{r} \delta z^2 \delta y \right).$$

***

Aplicando las mismas fórmulas (1), (2), (3), pero tomando por límite la esfera bbB (fig. 40 bis), cuya base se apoya sobre el plano de las xy y el eje AB coincide con el de las z, y aplicando para las simplificaciones la simetría de los

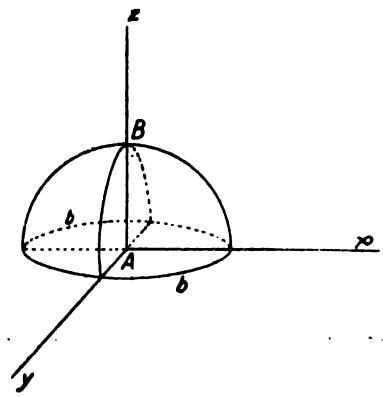


Figura 40 bis.

planos xz, yz, es decir, anulando los términos que contengan potencias impresas de δx, δy, obtendremos:

$$N_{zx} = \frac{dw}{dx} \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta x^2 \delta z +$$

$$+ \frac{du}{dx} \left(\Sigma mm' f(r) \delta z + \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta x^2 \delta z \right).$$

$$N_{zy} = \frac{dw}{dy} \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta y^2 \delta z +$$

$$+ \frac{dv}{dz} \left(\Sigma mm' f(r) \delta z + \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta y^2 \delta z \right)$$

$$N_{zz} = \frac{dw}{dz} \left(\Sigma mm' f(r) \delta z + \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta z^3 \right) +$$

$$+\frac{du}{dx}\Sigma m m' \frac{f'(r)}{r}\delta z \delta x^2 + \frac{dv}{dy}\Sigma m m' \frac{f'(r)}{r}\delta z \delta y^2 +$$

$$+\Sigma m m' f(r)\delta z.$$

***

Los valores de N_{xx}, N_{xy}, N_{xz}, N_{yx}..... que hemos obtenido, expresan, según dijimos, las componentes del esfuerzo que sobre el punto A de la placa ó plano ejerce toda la región útil del lado de las x positivas cuando dicha placa coincide con el plano de las $y\,z$ (fig. 38); ó del lado de las y positivas cuando la placa coincide con el plano de las xz (figura 39); ó del lado de las z positivas si suponemos que la placa ó plano ideal se confunde con el plano de las xy (figura 40); conforme habíamos indicado en la figura 36. Empleamos la palabra útil, porque para cada punto A (fig. 41) que suponemos aplicable á estos tres casos, sólo hay que contar con los puntos materiales contenidos en la esfera $a\,c\,b$ trazada desde A como centro con el radio ε.

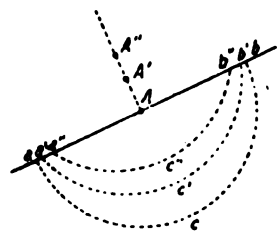


Figura 41.

Consideremos ahora sobre la normal al plano, en A, otro punto cualquiera A'.

El esfuerzo que sobre él ejerce la región R, se calculará exactamente del mismo modo que para el punto A, y las expresiones resultantes serán de la misma forma que las que dan las fórmulas (1) (2) (3). Pero con esta diferencia: las Σ no tendrán la misma extensión que cuando hacíamos el cálculo para el punto A.

En este último caso, calculábamos P, Q, R, y luego ΣP, ΣQ, ΣR, considerando los puntos materiales comprendidos en la semiesfera acb.

Para el punto A' deberemos trazar otra esfera de radio ε como la anterior, desde el punto A' como centro, y la parte útil de la región R no será ya la semiesfera, sino el segmento $a'\ c'\ b'$ contenido en dicha región R.

Por eso decimos que se aplican las fórmulas (1) (2) (3); pero que los límites de las Σ son los del expresado segmento y no los de la semiesfera.

Ahora bien, como el segmento tiene los mismos planos de simetría que la esfera, las simplificaciones serán las mismas, y, por lo tanto, si hacemos el cálculo del esfuerzo sobre A', cuando la placa coincide con los tres planos coordenados, obtendremos para las componentes N las mismas expresiones, ó, mejor dicho, expresiones de la misma forma que las N_{xx}, N_{xy}, N_{xz} ....., sólo que ahora las Σ tendrán por límite el segmento $a'\ b'\ c'$.

Calculando para todas las moléculas A, A', A''..... hasta la distancia ε, que están sobre la normal en A, todos estos valores de N, tendrán, como acabamos de decir, siempre la misma forma, pero los límites serán la semiesfera $a\ c\ b$ para el punto A; el segmento $a'\ b'\ c'$ para el punto A'; el $a''\ b''\ c''$, para A'', y así sucesivamente, hasta que la esfera de radio ε sea tangente al plano ab.

Lo que hemos dicho de las moléculas colocadas en la normal al plano del punto A, pudiéramos repetir para todas las demás normales que comprende la placa ab.

Todos los esfurzos parciales vienen expresados del mismo modo; y como para toda la extensión de la regiones R y R' inmediatas á la placa ab, las componentes de los esfuerzos parciales tienen la misma forma que las N ya obtenidas, es decir, dependen de las derivadas parciales de primer orden de u, v y w, con relación á x, y, z; además, como pueden suponerse con errores infinitamente pequeños de orden superior, que dichas derivadas son constantes, al hacer la suma para todos los puntos podremos sacarlas como factores comunes.

Por lo tanto, y para no acumular las notaciones, supondremos que las nueve componentes N representan las del esfuerzo resultante sobre toda la placa. El segundo miembro contendrá á las derivadas de primer orden de u, v, w. Los coeficientes serán la suma de una serie de Σ para cada normal, teniendo cada Σ por límite el segmento correspondiente. Y, por último, como el cuerpo es isótropo y el esfuerzo sobre las moléculas de cada normal será próximamente el mismo, multiplicaremos todos los coeficientes por k; y si queremos que las N representen el esfuerzo por unidad de superficie, dividiremos por ω, designando por esta letra la superficie de la placa.

Así, pues, las componentes del esfuerzo sobre unidad de superficie de la placa, cuando ésta coincide con el plano de las yz, serán:

$$N_{xx} = \left[\frac{du}{dx}\left[\Sigma\, mm' f(r)\delta x + \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\,\delta x^3\right] + \right.$$

$$+\frac{dv}{dy}\,\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\,\delta x \delta y^2 + \frac{dw}{dz}\,\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\,\delta x \delta z^2 +$$

$$\left. + \Sigma m m' f'(r)\delta x\right]\frac{k}{\omega},$$

$$N_{xy} = \left[\frac{du}{dy}\,\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\,\delta y^2 \delta x + \right.$$

$$\left. + \frac{dv}{dx}\left(\Sigma mm' f(r)\delta x + \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\,\delta y^2 \delta x\right)\right]\frac{k}{\omega},$$

$$N_{xz} = \left[\frac{du}{dz}\,\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\,\delta z^2 \delta x + \right.$$

$$\left. + \frac{dw}{dx}\left(\Sigma mm' f'(r)\delta x + \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r}\,\delta z^2 \delta x\right)\right]\frac{k}{\omega}.$$

Y haremos dos advertencias como resumen de lo que precede: 1.ª Que las N ya no representan componentes parcia-

les del esfuerzo sobre un punto de la región R, ni tampoco la resultante de dichos esfuerzos sobre todos los puntos de cada normal, sino las componentes del esfuerzo total por unidad de superficie de la placa. Por eso entra el factor k que es el número de normales, y el divisor ω que es la superficie de la placa. 2.ª Que cada Σ representa una serie de Σ; así

$$\Sigma = \Sigma_{abc} + \Sigma_{a'b'c'} + \Sigma_{a''b''c''} + \ldots\ldots \quad \text{(fig. 41)},$$

en que hemos puesto por subíndice la semiesfera ó el segmento que corresponde á cada Σ.

Del mismo modo escribiremos las componentes del esfuerzo total de la región R sobre la R', tomando de ambas regiones las partes inmediatas á la placa en el espesor ε, cuando dicha placa coincida con el plano de las xz, en esta forma:

$$N_{yx} = \left[\frac{dv}{dx} \Sigma m m' \frac{f(r)}{r} \delta x^2 \delta y + \right.$$

$$\left. + \frac{du}{dy} \left(\Sigma m m' f(r) \delta y + \Sigma m m' \frac{f'(r)}{r} \delta x^2 \delta y \right) \right] \frac{k}{\omega},$$

$$N_{yy} = \left[\frac{dv}{dy} \left(\Sigma m m' f(r) \delta y + \Sigma m m' \frac{f'(r)}{r} \delta y^3 \right) + \right.$$

$$+ \frac{dw}{dz} \Sigma m m' \frac{f'(r)}{r} \delta y \delta z^2 +$$

$$\left. + \frac{du}{dx} \Sigma m m' \frac{f'(r)}{r} \delta y \delta x^2 + \Sigma m m' f(r) \delta z \right] \frac{k}{\omega},$$

$$N_{yz} = \left[\frac{du}{dz} \Sigma m m' \frac{f(r)}{r} \delta z^2 \delta y + \right.$$

$$\left. + \frac{dw}{dy} \left(\Sigma m m' f(r) \delta y + \Sigma m m' \frac{f'(r)}{r} \delta z^2 \delta y \right) \right] \frac{k}{\omega},$$

y repetiremos aquí las advertencias anteriores.

Por último, las componentes del esfuerzo por unidad de superficie sobre la placa, cuando ésta coincide con el plano de las xy, serán:

$$N_{zx} = \left[\frac{dw}{dx} \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta x^2 \delta z + \right.$$

$$\left. + \frac{du}{dz} \left(\Sigma mm' f(r) \delta z + \Sigma mm' \frac{f'(1)}{r} \delta x^2 \delta z \right) \right] \frac{k}{\omega},$$

$$N_{zy} = \left[\frac{dw}{dy} \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta y^2 \delta z + \right.$$

$$\left. + \frac{dv}{dz} \left(\Sigma mm' f(r) \delta z + \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta y^2 \delta z \right) \right] \frac{k}{\omega},$$

$$N_{zz} = \left[\frac{dw}{dz} \left(\Sigma mm' f(r) \delta z + \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta z^3 \right) + \right.$$

$$+ \frac{du}{dx} \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta z \delta x^2 +$$

$$\left. + \frac{dv}{dy} \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta z \delta y^2 + \Sigma mm' f(r) \delta z \right] \frac{k}{\omega};$$

y en cuanto á estas tres últimas fórmulas, podremos repetir todo lo dicho para las anteriores respecto á la significación de las N, del factor $\frac{k}{\omega}$ y de las Σ.

***

Como algunos de éstos coeficientes son iguales, los vamos á representar por una letra, á fin de simplificar la escritura.

Para comparar dos Σ y ver si son iguales, no tendremos más que comparar las Σ parciales correspondientes al mismo segmento, porque todas contienen el mismo número de tér-

minos, tantos como moléculas hay en una normal, y lo que de dos Σ digamos, diremos de todas las restantes comparadas dos á dos.

Los términos que vamos á escribir son iguales y los representaremos por la misma letra:

$\Sigma\, mm' \frac{f'(r)}{r} \delta x^3$, teniendo Σ por límite la esfera bBb (figura 38 bis), ó un segmento cualquiera; $\Sigma\, mm' \frac{f'(r)}{r} \delta y^3$, teniendo Σ por límite la esfera bBb (fig. 39 bis), ó el segmento análogo al anterior; y $\Sigma\, mm' \frac{f'(r)}{r} \delta z^3$, siendo el límite de Σ, la esfera bBb (fig. 40 bis), ó el segmento que corresponde á los anteriores, son evidentemente iguales, por ser el sistema isótropo y tener por límites segmentos iguales; así:

$$\frac{k}{\omega} \Sigma\, mm' \frac{f'(r)}{r} \delta x^3 = \frac{k}{\omega} \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta y^3 =$$

$$= \frac{k}{\omega} \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta z^3 = a.$$

Los dos coeficientes $\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta x \delta y^2$, $\Sigma mm \frac{f'(r)}{r} \delta x \delta z^2$ de N_{xx} son iguales, porque en la figura 38 bis todo es simétrico alrededor del eje de las x.

Por la misma razón son iguales $\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta\, y\, \delta\, z^2$ y $\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta y \delta x^2$ en N_{yy}, según se ve en la figura 39 bis, en que todo es igual alrededor de y. Además son iguales á los anteriores: la única diferencia de las figuras 38 bis y 39 bis es que la y reemplaza á la x.

Por último, son iguales

$$\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta z \delta x^2 \text{ y } \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta z \delta y^2$$

por idénticas razones.

De modo que tendremos

$$\frac{k}{\omega} \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta x \delta y^2 = \frac{k}{\omega} \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta x \delta z^2 =$$

$$= \frac{k}{\omega} \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta y \delta z^2 = \frac{k}{\omega} \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta y \delta x^2 =$$

$$= \frac{k}{\omega} \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta z \delta x^2 = \frac{k}{\omega} \Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta z \delta y^2 = b.$$

De los dos coeficientes $\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta y^2 \delta x$ de N_{xy}; de los dos $\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta x^2 \delta y$ de N_{yz}; de $\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta z^2 \delta x$ de N_{xz}, y de $\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta x^2 \delta z$ de N_{zx}, nada tenemos que decir, porque están comprendidos en los anteriores y los hemos representado por b.

Otro tanto repetiremos respecto á los coeficientes de $\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta z^2 \delta y$ y $\Sigma mm' \frac{f'(r)}{r} \delta y^2 \delta z$ de N_{yz} y N_{zy} respectivamente: también están comprendidos en las ecuaciones anteriores y también los representaremos por b.

Las nueve ecuaciones que dan los valores de N podrán escribirse por lo tanto de este modo:

$$N_{xx} = \frac{du}{dx} \left[\frac{k}{\omega} \Sigma mm' f(r) \delta x + a \right] +$$

$$+ \frac{dv}{dy} b + \frac{dw}{dz} b + \frac{k}{\omega} \Sigma mm' f(r) \delta x,$$

$$N_{xy} = \frac{du}{dy} b + \frac{dv}{dx} \left(b + \frac{k}{\omega} \Sigma mm' f(r) \delta x \right),$$

$$N_{xz} = \frac{du}{dz} b + \frac{dw}{dx}\left(b + \frac{k}{\omega}\Sigma mm'f(r)\delta x\right),$$

$$N_{yx} = \frac{dv}{dx} b + \frac{du}{dy}\left(b + \frac{k}{\omega}\Sigma mm'f(r)\delta y\right),$$

$$N_{yy} = \frac{dv}{dy}\left(\frac{k}{\omega}\Sigma mm'f(r)\delta y + a\right) +$$

$$+ \frac{dw}{dz} b + \frac{du}{dx} b + \frac{k}{\omega}\Sigma mm'f(r)\delta y,$$

$$(4)$$

$$N_{yz} = \frac{dv}{dz} b + \frac{dw}{dy}\left(b + \frac{k}{\omega}\Sigma mm'f(r)\delta y\right),$$

$$N_{zx} = \frac{dw}{dx} b + \frac{du}{dz}\left(b + \frac{k}{\omega}\Sigma mm'f(r)\delta z\right),$$

$$N_{zy} = \frac{dw}{dy} b + \frac{dv}{dz}\left(b + \frac{k}{\omega}\Sigma mm'f(r)\delta z\right),$$

$$N_{zz} = \frac{dw}{dz}\left(\frac{k}{\omega}\Sigma mm'f(r)\delta z + a\right) +$$

$$+ \frac{du}{dx} b + \frac{dv}{dy} b + \frac{k}{\omega}\Sigma mm'f(r)\delta z.$$

En los valores anteriores de N hemos dejado explícitas en sus varios términos las tres expresiones siguientes:

$$\Sigma mm'f(r)\delta x, \quad \Sigma mm'f(r)\delta y, \quad \Sigma mm'f(r)\delta z,$$

porque vamos á ver inmediatamente que pueden suprimirse.

***

La simplificación que vamos á introducir se enlaza íntimamente con una cuestión que hemos tratado ya en otra conferencia, y á la cual tendremos que volver el curso próximo

y quizá antes, á saber; el estado en que se encuentra el sistema al aplicarle las fuerzas exteriores, que han de producir la deformación elástica, ó en general el movimiento elástico de los diferentes puntos.

Dijimos que sobre esto no había unidad en los autores.

Unos parten de lo que llaman *el estado natural del cuerpo* ó del sistema, y admiten, que en el estado natural no actúan fuerzas exteriores, que el cuerpo está abandonado á sí mismo, y que los esfuerzos interiores, es decir, las compresiones ó las extensiones, que acabamos de representar por N, son nulos. Esto merece discutirse; mas por ahora, lo admitiremos como punto de partida, en esta primera hipótesis: la del estado natural.

Mr. Poincaré parte de un caso más general á que hemos dado el nombre de *estado inicial*, que en rigor, es un estado de equilibrio, de equilibrio forzado, dicen algunos autores; de equilibrio natural, pudiera decirse también, porque tal es el estado de los cuerpos en la Naturaleza, al paso que la primera hipótesis, es puramente ideal

En los cuerpos de la Naturaleza, y en los sistemas elásticos, actúan, por lo menos, la presión atmosférica y la gravedad, de modo que su equilibrio será un equilibrio forzado, por pequeñas que sean las deformaciones.

Además, Mr. Poincaré, para admitir esta hipótesis, con preferencia á la del estado natural en que todas las N son nulas, tiene otras razones aún de más importancia, aunque por el momento no podemos exponerlas.

Admitamos por el pronto el estado natural de la primera hipótesis, es decir que las N son nulas.

En este caso, si consideramos el sistema antes de que sobre él actúen las fuerzas X, Y, Z..... P, al anularse éstas se nularán todas las deformaciones, de modo que tendremos para todos los puntos del cuerpo

$$u = 0, \; v = 0, \; w = 0,$$

y serán nulas todas las derivadas de estas tres funciones, con lo cual, quedarán reducidos los valores de N á los siguientes:

$$N_{xx} = \frac{k}{\omega} \Sigma mm' f(r) \delta x,$$
$$N_{xy} = 0,$$
$$N_{xz} = 0,$$
$$N_{yx} = 0,$$
$$N_{yy} = \frac{k}{\omega} \Sigma mm' f(r) \delta y,$$
$$N_{yz} = 0,$$
$$N_{zx} = 0,$$
$$N_{zy} = 0,$$
$$N_{zz} = \frac{k}{\omega} \Sigma mm' f(r) \delta z;$$

luego las tres expresiones indicadas, se reducen á cero en este caso; toda vez que en las hipótesis del estado natural las N son cero.

De aquí se deduce, que los valores de N en el caso general, se simplifican, porque debemos hacer en ellos,

$$\Sigma mm' f(r) \delta x = 0, \quad \Sigma mm' f(r) \delta y = 0, \quad \Sigma mm' f(r) \delta z = 0.$$

Tendremos, pues, para los valores de N, introduciendo esta simplificación, el cuadro siguiente:

$$N_{xx} = a \frac{du}{dx} + b \left(\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right); \quad N_{xy} = b \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right);$$
$$N_{xz} = b \left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right);$$
$$N_{yx} = b \left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \right); \quad N_{yy} = a \frac{dv}{dy} + b \left(\frac{dw}{dz} + \frac{du}{dx} \right);$$

$$N_{yz} = b\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) \quad (4')$$

$$N_{zx} = b\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right); \quad N_{zy} = b\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right);$$

$$N_{zz} = a\frac{dw}{dz} + b\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right).$$

Estas son las fórmulas generales á que llegan todos los autores, sea cual fuere el procedimiento que sigan para determinar las componentes de los esfuerzos interiores (compresiones, tensiones ó fuerzas de deslizamiento) por unidad de superficie, en el caso de que se parta del estado natural, para el cual las N son todas nulas.

Por consiguiente, los que hemos determinado son *esfuerzos totales.*

Además, recordemos que se refieren á tres posiciones de la placa ideal, paralelas á los tres planos coordenados, según marcan las figuras 38, 39 y 40.

Que en el caso del estado natural ha de tenerse

$$\Sigma\, mm' f(r)\delta x = 0; \quad \Sigma\, mm' f(r)\delta y = 0; \quad \Sigma\, mm' f(r)\delta z = 0,$$

es evidente.

En primer lugar, estas tres expresiones, aun no siendo cero, serían iguales, porque el sistema es isótropo; y no se hace, para pasar de una á otra, más que cambiar el nombre del eje, llamar y en la segunda ó z en la tercera á lo que en la primera es x.

Basta, pues, que nos fijemos en una de las tres; tomemos la primera.

Recordemos que $f(r)$ es la función de Saint-Venant $f_1(r)$ dividida por r. Así

$$\Sigma\, mm' f(r)\delta x = \Sigma\, mm' f_1(r)\frac{\delta x}{r},$$

que representa la suma de las acciones de cada dos moléculas m, m' de un lado y otro de la placa ideal, multiplicadas por los cosenos de su dirección con la normal á la placa, que es lo que representa $\frac{\delta x}{r}$ como ya hemos visto anteriormente.

Luego la expresión de que se trata, es la componente normal á la placa de los esfuerzos moleculares en el estado inicial, que por hipótesis es igual á cero.

Las otras dos componentes vemos que son iguales á cero, como deben ser, porque en el sistema isótropo, y sin deformaciones, aunque existieran esfuerzos interiores serían normales á la dirección que se considerase, en razón á que todo es simétrico alrededor de cada normal.

***

Pasemos ahora á la segunda hipótesis, á la de Mr. Poincaré.

En este caso, las tres expresiones consideradas no son nulas, porque en el estado inicial existen fuerzas X_i, Y_i, Z_i..... P_i que determinan deformaciones.

Y por eso los valores de N se componen de dos partes; la una, que contiene las derivadas de u, v, w, y representan los esfuerzos correspondientes á las nuevas fuerzas X, Y, Z..... P; las otras, que son los tres términos que antes despreciábamos y que ahora no podemos despreciar.

Pero si convenimos en que las N representen las nuevas presiones ó tensiones creadas por las nuevas fuerzas, prescindiendo de las que ya existian, en este caso no hay inconveniente ninguno en prescindir de los tres términos en cuestión.

Pero entiéndase bien, y lo repetiremos una vez más, que las N en este caso no representarán esfuerzos totales.

Todavía conviene hacer otra simplificación en esta segunda hipótesis del estado inicial, no del estado natural.

Y es la siguiente: Que los términos en que entran las derivadas de u, v y w, multiplicadas por las tres expresiones $\frac{k}{w} \Sigma mm'f(r)\,\delta x$..... pueden despreciarse.

Porque esta última cantidad representa un esfuerzo del estado inicial, y si lo referimos á otro estado anterior en que las N sean cero, y que tomemos como origen, las expresiones

$$\Sigma mm'f(r)\delta x, \quad \Sigma mm'f(r)\delta y, \quad \Sigma mm'f(r)\delta z,$$

se determinarán en función de las derivadas de las deformaciones que corresponden á este estado inicial, en cuyo caso todos los términos que estamos considerando, podrán despreciarse.

Por ejemplo: en N_{xx}, el término $\frac{du}{dx} \cdot \frac{k}{\omega} \Sigma mm'f(r)\delta x$, puesto que $\Sigma mm'f(r)\delta x = A \frac{du_1}{dx}$.....siendo u_1..... la deformación correspondiente al estado inicial, se convertirá en

$$A \frac{k}{\omega} \frac{du}{dx} \cdot \frac{du_1}{dx} + \ldots\ldots$$

que es de segundo orden, puesto que hemos convenido que las derivadas de las deformaciones son infinitamente pequeñas de primero.

Estas simplificaciones reducen las fórmulas (4) á las (4').

Pero conviene repetir, para fijar bien las ideas, algunas observaciones que ya apuntamos antes.

1.ª Si se parte del *estado natural* y se suponen nulas las N para dicho estado, las N de las fórmulas (4') significan esfuerzos *totales* de comprensión, extensión ó deslizamiento

en el interior del cuerpo por unidad de superficie y sobre planos paralelos á los tres planos coordenados.

Si no se parte del estado natural, sino de un *estado inicial* en que ya existían fuerzas exteriores, siquiera no sean más que la de la gravedad y la presión atmosférica, en este caso, las componentes N de esfuerzos internos, no son totales, sino las que se refieren á las nuevas fuerzas X, Y, Z..... P; son el *aumento* ó variación de los esfuerzos interiores, sobre los que ya existían, debidos estos aumentos á las nuevas fuerzas y á las nuevas deformaciones.

2.ª Otra observación más y ésta es muy importante: si se parte del estado natural, y el cuerpo es isótropo, todas las simplificaciones que hemos hecho para obtener la fórmula (4') son legítimas; pero si se parte del estado inicial en que existían deformaciones causadas por X_i, Y_i, Z_i..... P_i, en este caso, para obtener las fórmulas (4') hay que agregar una hipótesis más, á saber: que las deformaciones iniciales no han cambiado de una manera apreciable la estructura del cuerpo, y que éste *continúa* siendo isótropo. Lo cual, hasta cierto punto, puede considerarse como una consecuencia aproximada de la superposición de efectos.

De todas maneras, de aquí en adelante, sólo consideraremos para los cuerpos isótropos las fórmulas (4') que son las clásicas.

En ellas vamos á hacer un cambio de notación y á transformar algunas.

En primer lugar vamos á substituir la notación

$$N_{xx},\quad N_{yy},\quad N_{zz},\quad \text{por esta otra, } N_1,\quad N_2,\quad N_3.$$

De modo que

$$N_{xx}, = N_1,\quad N_{yy} = N_2,\quad N_{zz} = N_3:$$

N_1, representará, pues, la componente paralela al eje de

las X, cuando el plano para el cual se quieren calcular los esfuerzos es perpendicular al eje x.

Del mismo modo N_2 representará la componente del esfuerzo paralelo al eje de la Y, cuando el plano ó placa ideal de que hablábamos sea paralelo á xz.

Y, por último, N_3 será la componente normal al plano xy.

Además, la forma de los segundos miembros puede simplificarse, porque tendremos evidentemente

$$N_1 = b\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) + (a - b)\frac{du}{dx}$$

$$N_2 = b\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) + (a - b)\frac{dv}{dv}$$

$$N_3 = b\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) + (a - b)\frac{dw}{dz},$$

y llamando c á la constante $a - b$, y recordando que

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = \theta,$$

resultará por último:

$$N_1 = b\theta + c\frac{du}{dx}; \quad N_2 = b\theta + c\frac{dv}{dy};$$

$$N_3 = b\theta + c\frac{dw}{dz}.$$

En cuanto á los demás términos de las fórmulas (4') se ve desde luego que

$$N_{xy} = N_{yx}; \quad N_{xz} = N_{zx}; \quad N_{yz} = N_{zy};$$

de modo, que estas seis componentes se reducen á tres, que representaremos por T, poniendo un solo subíndice, que

será 1, cuando los subíndices son y, z, toda vez que la inversión de los dos subíndices no altera el valor de N. Será 2, cuando los subíndices sean x, z. Por último, será 3, cuando sean los subíndices x, y. De suerte, que tendremos

$$N_{xy} = N_{yx} = T_3; \quad N_{xz} = N_{zx} = T_2; \quad N_{zy} = N_{yz} = T_1;$$

con lo cual, las nueve fórmulas de los esfuerzos interiores sobre planos paralelos á los coordenados, se reducen á las siguientes de forma sencillísima:

$$\begin{aligned} N_1 &= b\theta + c\frac{du}{dz}; \quad T_1 = b\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) \\ N_2 &= b\theta + c\frac{dv}{dy}; \quad T_2 = b\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right) \\ N_3 &= b\theta + c\frac{dw}{dz}; \quad T_3 = b\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

que son las fórmulas clásicas de todos los autores, aunque obtenidas por otros procedimientos, que explicaremos en el curso inmediato.

Al explicar estas mismas fórmulas cuando empleemos el método de Lamé y otros autores, veremos, que las fuerzas N_{xy}, N_{yx}, N_{xz}, N_{zx}, N_{zy}, N_{yz}, son las fuerzas de deslizamiento y que dos á dos son iguales como hemos visto, y que son iguales y contrarias las perpendiculares á cada eje, como condición necesaria para que no haya giro alrededor de este eje.

También veremos que se puede calcular la compresión ó tensión sobre un plano, sea cual fuere la dirección respecto á los planos coordenados; mas sobre esto no insistiremos, porque, por el momento, sólo tratamos de resolver la segunda parte del problema de la Elasticidad por el método de Cauchy; ó sea determinar las condiciones relativas á los límites.

***

Vemos que en las fórmulas de las componentes del esfuerzo interior, entran dos constantes, b, c: estas constantes pueden calcularse directamente; pero esto nos conduciría á cálculos largos y enojosos, aunque sencillos, y por esta causa vamos á emplear un método indirecto que, en cierto modo, será anticiparnos al método de Lamé y de otros autores de su escuela, método que hemos de explicar en el curso próximo.

El que seguiremos es el siguiente:

Vamos á considerar en el interior del cuerpo, ó del sistema, un paralelepípedo trirrectángulo, cuyas caras sean paralelas á los tres planos coordenados.

Vamos á considerar asimismo los esfuerzos normales y tangenciales sobre sus seis caras, expresados por los N y T, y vamos á escribir, por último, las ecuaciones de equilibrio, que vendrán en función de las derivadas parciales de u, v y w, con relación á x, y, z, y de las constantes b, c.

Como este paralelepípedo puede ser tan pequeño como se quiera, las ecuaciones que obtengamos expresarán el equilibrio de un elemento cualquiera de la masa y deberán coincidir con las tres ecuaciones fundamentales que obtuvimos en la lección precedente, en las cuales entran las constantes λ y μ. Y comparando ambos grupos de ecuaciones, expresaremos b y c en función de λ y μ.

Esto dicho en general, que á continuación precisaremos más las mismas ideas.

Consideremos en el interior del cuerpo ó del sistema un paralelepípedo trirrectángulo (fig. 41 bis), cuyas caras sean paralelas á los tres planos coordenados yz, xz, xy.

Como ya indicamos antes, admitiremos que este paralelepípedo es sumamente pequeño y designaremos sus aristas por δx, δy, δz, aunque estas magnitudes no sean precisamente las que hasta aquí hemos usado como representando las componentes de la distancia r, distancia entre dos moléculas inmediatas.

Al contrario, supondremos que el paralelepípedo contiene un gran número de puntos materiales ó masas.

Si el sistema total está en equilibrio, una parte de él, grande ó pequeña, pequeña en este caso, deberá estar en equilibrio tambien.

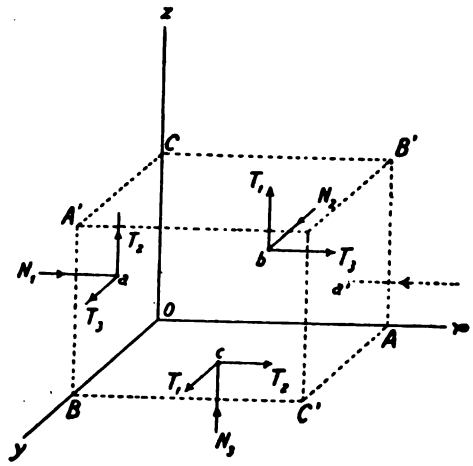


Figura 41 bis.

Y tomaremos, como elemento del sistema, el paralelepípedo indicado, proponiéndonos determinar sus ecuaciones de equilibrio, como si fuera un sólido invariable, siguiendo en esto un postulado general de la Mecánica.

El paralelepípedo estará sometido á las siguientes fuerzas:

1.° Las fuerzas exteriores X, Y, Z....., que actúan en todos los elementos del paralelepípedo y que supondremos referidas á la unidad de masa. Dada la pequeñez del paralelepípedo podemos admitir con errores infinitamente pequeños de orden superior, que todas estas fuerzas tienen una resultante aplicada al centro del volumen, de suerte que representando por D la densidad en dicho centro, que será próximamente la misma para todos los puntos de dicho volumen, tendremos para las tres componentes de la fuerza resultante,

$$\delta x \delta y \delta z . D . X; \quad \delta x \delta y \delta z . D . Y; \quad \delta x \delta y \delta z . D . Z.$$

Es decir, volumen multiplicado por densidad, multiplicado por fuerza aplicada á la unidad de masa.

2.° Las acciones que se ejercen sobre las seis caras del paralelepípedo y que ya sabemos calcular. Serán compresiones, tensiones ó fuerzas de deslizamiento y serán oblicuas en general respecto á las caras; estarán referidas á la unidad de superficie; y supondremos, que están aplicadas al centro de cada cara.

Así, en la cara $A'BOC$ la fuerza tendrá tres componentes, según se ve en la figura 41 bis, á saber: N_1, T_2, T_3, cada una con su signo propio.

Comparando esta figura con las 38, 39 y 40, se observará la conformidad en las notaciones, ya establecidas; por ejemplo: en esta cara, vemos evidentemente, que N_1 representa á N_{xx}; T_2 representa asimismo á N_{xz}, y N_3 representa á N_{xy}, sólo que las tres fuerzas que en la figura 38 están aplicadas en A, hemos supuesto en la figura 41 bis, que están aplicadas en el punto a.

Podemos repetir lo mismo para la cara $AOCB'$, en que las tres componentes de la acción sobre dicha cara, serán N_2, T_1, T_3. Y pudiéramos repetir aquí todas las advertencias anteriores.

Por último, en la cara $AOBC'$ actuará un esfuerzo oblicuo en general, cuyas componentes serán N_3, T_1, T_2.

Para las otras tres caras del paralelepípedo, correspondientes al ángulo triedro O' opuesto al O, puede repetirse lo mismo; con la diferencia que las T y las N variarán al pasar de una cara á la paralela por razón de los incrementos δx, δy, δz que expresan los intervalos entre estas dos caras.

Todas estas fuerzas, según el equilibrio de los cuerpos sólidos, hay que trasladarlas al centro del paralelepípedo y resultarán tres componentes paralelas á los ejes y tres pares cuyos ejes serán también paralelos á los ejes coordenados.

Las fuerzas N_1, N_2, N_3 no engendrarán ningún par, porque pasan todas ellas por el centro del paralelepípedo.

Las fuerzas T darán lugar á pares, pero estos pares se destruirán dos á dos.

Por ejemplo: Las fuerzas T_3, T_3 aplicadas en a y b, darán los siguientes pares, si recordamos que estas fuerzas están referidas á la unidad de superficie.

T_3 aplicada á a para toda la superficie $OBA'C$ será $T_3 \delta y \delta z$ cuyo brazo de palanca, con relación al centro, será $\frac{\delta x}{2}$, luego el par tendrá por momento

$$\frac{T_3 \delta x \delta y \delta z}{2}.$$

Del mismo modo, T_3 aplicada en b dará la fuerza total $T_3 \delta x \delta z$ y su brazo de palanca será $\frac{\delta y}{2}$, luego el momento resultará igual al anterior,

$$\frac{T_3 \delta x \delta y \delta z}{2}.$$

No olvidemos que T_3 y T_3 son iguales en valor y en signo; si la primera es positiva, como marca la figura, la segunda también lo es y tienden á hacer girar al cuerpo en sentido contrario. Y lo mismo podemos decir de las reacciones $-T_3$, $-T_3$ sobre el paralelepípedo.

Otro tanto se repite para T_1 y T_1; para T_2 y T_2; así como para las fuerzas de las otras tres caras del triedro O'. Y resulta que el sistema dentro de la aproximación aceptada, no tiende á girar.

Calculemos ahora las tres componentes paralelas á los tres ejes, por ejemplo al eje de la x. Lo que de él digamos, podremos repetir para los otros.

Sobre el centro del paralelepípedo actuarán la fuerza N_1

por unidad de superficie aplicada al punto a, y la correspondiente sobre la cara opuesta $O'C'AB'$, que será $N_1 + \frac{dN_1}{dx}\delta x$. Pero hemos de considerar no N_1, sino la reacción $-N_1$; es decir, no el esfuerzo de los puntos interiores del paralelepípedo que están á la derecha de dicha cara en la región que llamábamos R (fig. 36), sino por el contrario, la acción de los puntos que están á la izquierda sobre las masas que están dentro del paralelepípedo inmediatas á la cara expresada, de suerte que en a actuará $-N_1$ y sobre a' una fuerza por unidad de superficie igual á

$$+ N_1 + \frac{dN_1}{dx}\delta x.$$

Trasladando al centro del paralelepípedo $-N_1$ y

$$N_1 + \frac{dN_1}{dx}\delta x$$

quedará,

$$-N_1 + N_1 + \frac{dN_1}{dx}\delta x = + \frac{dN_1}{dx}\delta x.$$

Pero como N_1 está referida á la unidad de superficie, á fin de obtener la fuerza total habrá que multiplicar la expresión precedente por $\delta y \,.\, \delta z$ y tendremos:

$$+ \frac{dN_1}{dx}\delta x \delta y \delta z.$$

De todas las demás fuerzas, sólo tendremos que trasladar T_2 ~~aplicada en~~ c, y T_3 aplicada en b; mejor dicho, las reacciones, que son iguales de signo contrario.

Así, la aplicada en c, dará $-T_2$;
y la de la cara opuesta, que es $+T_2+\frac{dT_2}{dz}\delta z$;
y sumándolas y multiplicándolas por el área $\delta x \,.\, \delta y$,

$$\left(-T_2+T_2+\frac{dT_2}{dz}\delta z\right)\delta x\delta y=+\frac{dT_2}{dz}\delta x\delta y\delta z.$$

Del mismo modo la aplicada en b es $-T_3$,
la aplicada en el centro á la cara opuesta $+T_3+\frac{dT_3}{dy}\delta y$
y sumándolas y multiplicándolas por el área $\delta x\,\delta z$

$$\left(-T_3+T_3+\frac{dT_3}{dy}\delta y\right)=+\frac{dT_3}{dy}\delta x\delta y\delta z.$$

Sumando ahora:

$$XD\delta x\delta y\delta z,+\frac{dN_1}{dx}\delta x\delta y\delta z,+\frac{dT_2}{dz}\delta x\delta y\delta z,$$
$$+\frac{dT_3}{dy}\delta x\delta y\delta z,$$

é igualando á cero, tendremos la primera ecuación de equilibrio del paralelepípedo; y dividiendo por δx, δy, δz,

$$DX+\frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_2}{dz}+\frac{dT_3}{dy}=0,$$

ó bien,

$$\frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_2}{dz}+\frac{dT_3}{dy}=-XD.$$

Substituyendo por N_1, T_2, T_3 sus valores (I) resulta

$$b\frac{d\theta}{dx}+c\frac{d^2u}{dx^2}+b\left(\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{d^2w}{dxdz}\right)+$$
$$+b\left(\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2v}{dxdy}\right)=-XD. \qquad \text{(II)}$$

Esta ecuación es la que debemos comparar con la primera de las tres fundamentales del equilibrio de un punto, á saber,

$$(\lambda + \mu) \frac{d\vartheta}{dx} + \mu \Delta u = - X.$$

Pero debemos hacer una observación: aunque ambas ecuaciones representan el equilibrio del sistema en el interior del mismo, hay entre ellas una diferencia.

La primera expresa el equilibrio de un paralelepípedo infinitamente pequeño.

La segunda, el equilibrio de un punto de masa m.

Si el sistema fuera continuo, no habría dificultad en comparar directamente ambas ecuaciones; pero como la primera de las dos que hemos indicado se refiere á un punto y parte de la discontinuidad, tenemos que suponer lo que ya hemos supuesto varias veces, es decir, que el sistema discontinuo se divide en celdillas y que la masa de cada punto, se distribuye de una manera continua dentro de cada celdilla, y en este caso, la comparación ya es posible, comparando los elementos diferenciales á que se refieren una y otra fórmula.

Partiendo de esta hipótesis, dividiendo la segunda por la densidad D, yá que toda ella se había dividido antes por e volumen, para que los segundos miembros sean iguales, y designando por b_1 y c_1 las nuevas constantes que serán $\frac{b}{D}$, $\frac{c}{D}$, tendremos que comparar las dos ecuaciones citadas, desarrollando previamente la (II) en la que pondremos por ϑ su valor: y nos dará,

$$b_1 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dxdy} + \frac{d^2 w}{dxdz} \right) +$$

$$+ c_1 \frac{d^2u}{dx^2} + b_1\left(\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d^2w}{dxdz}\right) +$$
$$+ b_1\left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2v}{dxdy}\right) = -X.$$

Desarrollando asimismo la primera de las tres fundamentales, tendremos,

$$(\lambda + \mu)\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dxdy} + \frac{d^2w}{dxdz}\right) +$$
$$+ \mu\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) = -X;$$

é igualando los coeficientes de las mismas derivadas, puesto que suponemos que ambas ecuaciones han de ser idénticas, hallaremos:

$$b_1 + c_1 = \lambda + 2\mu;\ 2b_1 = \lambda + \mu;\ 2b_1 = \lambda + \mu;\ b_1 = \mu;\ b_1 = \mu,$$

que se reducen á

$$b_1 + c_1 = \lambda + 2\mu;\ 2b_1 = \lambda + \mu;\ b_1 = \mu,$$

y dan

$$b_1 = \mu;\ b_1 = \lambda;\ c_1 = 2\mu,$$

ó

$$\frac{b}{D} = \mu;\quad \frac{b}{D} = \lambda;\quad \frac{c}{D} = 2\mu.$$

Así, pues, las fórmulas (I) se convierten, repitiendo el mismo cálculo para las otras dos componentes, en

$$N_1 = \left(\mu\theta + 2\mu\frac{du}{dx}\right)D;\quad T_1 = \mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)D;$$
$$N_2 = \left(\mu\theta + 2\mu\frac{dv}{dy}\right)D;\quad T_2 = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)D;$$
$$N_3 = \left(\mu\theta + 2\mu\frac{dw}{dz}\right)D;\quad T_3 = \mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)D,$$

que coinciden con las fórmulas clásicas obtenidas por otros procedimientos, con estas diferencias: que las dos constantes λ y μ se reducen á una sola, y que aparece D que generalmente se considera comprendida λ y μ.

Sobre esta circunstancia algo indicaremos en la conferencia próxima.

II.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY

Conferencia décima.

SEÑORES:

Tratamos en esta conferencia de indicar la solución general de la segunda parte del problema de las deformaciones elásticas, cuando el sistema no se extiende indefinidamente en el espacio, sino que, por el contrario, está limitado en éste por una ó varias superficies.

Y para fijar las ideas no trataremos, por el pronto, más que del problema del equilibrio.

Obtuvimos en conferencias anteriores las tres ecuaciones fundamentales del equilibrio para un punto cualquiera del interior del sistema, que eran de esta forma:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\Delta u+X=0\\(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dy}+\mu\Delta v+Y=0\\(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dz}+\mu\Delta w+Z=0\end{aligned}\right\}(A)$$

en que θ y Δ tienen esta significación:

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}; \quad \Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}.$$

Y obtuvimos asimismo, en la última conferencia, las seis componentes de los esfuerzos interiores (tensiones, compresiones, deslizamientos) por unidad de superficie sobre tres planos que, pasando por un punto cualquiera, fuesen paralelos á los tres planos coordenados.

Pero fijemos bien las ideas. Por un punto cuyas coordenadas sean x, y, z hacemos pasar tres planos paralelos á los planos coordenados yz, xz, xy. En estos tres planos, y alrededor del punto 0, consideramos tres pequeñas áreas, iguales ó desiguales, importa poco; por ejemplo, $d\omega$, $d\omega'$, $d\omega''$.

Determinamos el esfuerzo sobre el área $d\omega$, y dividiendo dicho esfuerzo por esta última área, tendremos la compresión, la tensión ó fuerza de deslizamiento sobre la unidad de superficie, y sus componentes serán las que hemos designado por N_1, T_2, T_3, en la figura 41 bis de la conferencia anterior.

No estarán de más algunas aclaraciones. Si consideramos dos moléculas del sistema, una á la derecha del plano, $OAB'C$, otra á la izquierda, y queremos calcular la acción de la región de la derecha sobre la de la izquierda (figura 41 bis); si suponemos que estas moléculas se atraen, y en la curva de Saint-Venant, el término que representa la atracción se considera como positivo, y el término que representa la repulsión, como negativo; por último, si la recta que une estos dos puntos forma ángulos agudos con los tres ejes, es evidente que sus componentes serán cantidades esencialmente positivas y expresarán, como hemos dicho, el esfuerzo que ejerce la región de la derecha de la figura sobre la región de la izquierda, que será evidentemente *una*

tensión en general oblicua. Repitiendo esto mismo para cada dos puntos de ambas regiones, á igual conclusión llegaremos para N_1, T_2, T_3.

Si, por el contrario, queremos calcular la acción de la región de la izquierda sobre la derecha, que será igual y contraria á la anterior, sus componentes serán $-N_1, -T_2, -T_3$, y representarán también una tensión oblicua.

Tendremos, pues, para el equilibrio, dos tensiones oblicuas iguales y contrarias.

Otro tanto podemos decir para los otros dos planos.

Por el contrario, volviendo al principio, si las dos moléculas se rechazan, habrá que repetir iguales consideraciones, pero los esfuerzos serán de compresión.

Por las teorías generales del Álgebra y de la Trigonometría se sabe que estos resultados son generales respecto á los signos.

Hemos obtenido para las N y T las siguientes fórmulas, en las que, para atenernos á las notaciones generalmente admitidas, en vez de representar la densidad por D la representaremos por ρ; resultará,

$$N_1 = \left(\lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx}\right)\rho; \quad T_1 = \mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)\rho;$$

$$N_2 = \left(\lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dy}\right)\rho; \quad T_2 = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)\rho;$$

$$N_3 = \left(\lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz}\right)\rho; \quad T_3 = \mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\rho;$$

Para facilitar la lectura de las obras sobre esta materia, de diferentes matemáticos, convendrán algunas aclaraciones.

Todas las fórmulas escritas son correctas; pero en ciertos tratados se pone en evidencia la densidad en las tres *(A)*, para lo cual basta multiplicar por ρ y se tiene:

$$(\lambda\rho + \mu\rho)\frac{d\theta}{dx} + \mu\rho\Delta u + \rho X = 0,$$

$$(\lambda\rho + \mu\rho)\frac{d\theta}{dy} + \mu\rho\Delta v + \rho Y = 0,$$

$$(\lambda\rho + \mu\rho)\frac{d\theta}{dz} + \mu\rho\Delta w + \rho Z = 0.$$

Pero como entonces las seis últimas pueden escribirse de este modo:

$$N_1 = \lambda\rho.\theta + 2\mu\rho\frac{du}{dx}; \quad T_1 = \mu\rho\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right),$$

$$N_2 = \lambda\rho.\theta + 2\mu\rho\frac{dv}{dy}; \quad T_2 = \mu\rho\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right),$$

$$N_3 = \lambda\rho.\theta + 2\mu\rho\frac{dw}{dz}; \quad T_1 = \mu\rho\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right),$$

claro es que podrá substituirse á $\lambda\rho$ la letra λ, y á $\mu\rho$ la letra μ, distintas evidentemente de las anteriores, y obtenemos las nueve fórmulas clásicas de la Elasticidad:

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\Delta u + \rho X = 0;$$

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dy} + \mu\Delta v + \rho Y = 0;$$

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dz} + \mu\Delta w + \rho Z = 0:$$

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx}; \quad T_1 = \mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right);$$

$$N_2 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dv}{dx}; \quad T_2 = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right);$$

$$N_3 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz}; \quad T_3 = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right).$$

Algunos autores suponen $\rho = 1$ en las tres primeras fórmulas.

***

Una observación todavía, y ésta es fundamental.

Al calcular en la conferencia anterior los valores de T y N, hemos obtenido la igualdad de los coeficientes λ y μ; de modo que las fórmulas de la Elasticidad no dependerían de dos constantes, suponiendo siempre los cuerpos isótropos, sino de una sola constante, y en esto difieren las fórmulas de Cauchy de las fórmulas clásicas obtenidas por otros procedimientos, que hemos de explicar en el curso próximo.

No es ésta una limitación que impusiera Cauchy arbitrariamente; es el resultado del método del ilustre autor y del cálculo que desarrolla con dicho método, así como de las simplificaciones que admite y aplica.

De todas maneras, esto constituye una divergencia entre unos y otros métodos, que no podíamos menos de tener en cuenta y que debíamos señalar á nuestros oyentes. Todavía, sobre este punto, insistiremos en otra ocasión.

Y vamos ya al objeto principal de esta conferencia.

***

Hemos dicho, que para los sistemas limitados en el espacio, el problema no estaba resuelto más que en su primera mitad, al obtener las tres ecuaciones fundamentales del equilibrio de un punto del interior del sistema.

Falta obtener las ecuaciones de equilibrio para cualquier punto de la superficie.

Y á este fin, como problema auxiliar, hemos determinado los esfuerzos interiores para cualquier punto y para tres direcciones particulares sobre tres planos, que pasen por dicho punto paralelamente á los planos coordenados.

Veamos qué partido se saca de este problema de los esfuer-

zos interiores y de las componentes N y T para el equilibrio de cualquier punto de la superficie.

La aplicación es natural y es sencilla, y se funda en un nuevo concepto de gran importancia.

El del *tetraedro elemental* de Elasticidad, que, según algunos autores, es debido á Cauchy.

Si aplicásemos á los puntos de la superficie el método de Cauchy, que hemos aplicado á los puntos del interior, para cada uno de los primeros puntos, tendríamos que establecer tres ecuaciones.

Pero ya hemos indicado en otras conferencias las dificultades de este método cuando se trata de reducir todas las ecuaciones simultáneas relativas á la zona de espesor ε inmediata á la superficie límite, á tres ecuaciones diferenciales parciales.

Así es que, para determinar las condiciones de la superficie, en rigor vamos á abandonar el método de Cauchy, acudiendo al método, que constantemente han seguido los demás autores para resolver este problema.

La diferencia entre unos y otros métodos en el problema general de la Elasticidad, puede condensarse brevemente de este modo.

Cauchy establece las *condiciones de equilibrio de un* PUNTO.

Los demás métodos establecen las *condiciones de equilibrio de un* PARALELEPÍPEDO infinitamente pequeño, pero que contendrá un gran número de puntos materiales, aun en el caso de la discontinuidad. Esto en cuanto al interior del cuerpo. Para la superficie, se establecen las ecuaciones de equilibrio de un *tetraedro* sumamente pequeño, que es el procedimiento que vamos á seguir en la presente conferencia.

Sea (fig. 42) un sistema elástico limitado por la superficie S, á la cual corresponderá otra superficie S', paralela á ella á la distancia ε.

Consideremos un punto p de la superficie S, punto cuyas coordenadas sean x, y, z.

En este punto p admitamos, para fijar las ideas, que actúa sobre la superficie una fuerza P, referida á la unidad superficial, y nos proponemos establecer las ecuaciones de equilibrio de dicho punto p.

O con más exactitud; vamos á escribir las condiciones de equilibrio de una región infinitamente pequeña, de la cual forme parte este punto y que supondremos que es *un tetraedro sumamente pequeño.*

Porque, volvemos á repetirlo, el carácter distintivo de estos métodos y el que les diferencia del método de Cauchy,

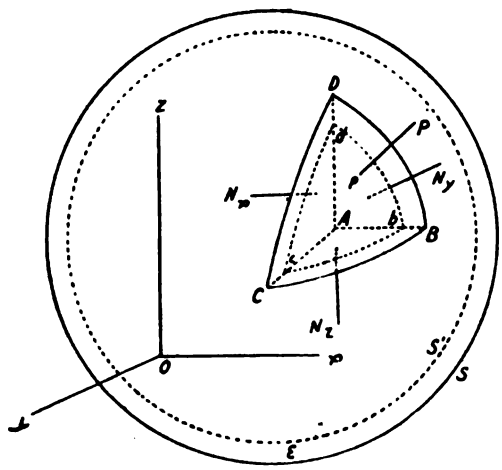


Figura 42.

es que en ellos se establecen las condiciones de equilibrio, no de un punto, que en este caso sería p, sino de un sólido sumamente pequeño y que vamos á suponer que es un tetraedro, sobre la superficie del cual estará p.

Por eso en el curso próximo, al aplicar al problema de la Elasticidad el método de Lamé y otros autores, diremos:

Para el interior del cuerpo hay que establecer las ecuaciones de equilibrio de un paralelepípedo elemental.

Para la superficie límite hay que establecer las ecuaciones de equilibrio de un tetraedro elemental también.

***

Vamos á construir dicho tetraedro.

En el interior del cuerpo tomemos un punto A, muy próximo á p (fig. 42.)

Por el punto A tracemos tres rectas: AB, AC, AD, paralelas á los tres ejes ox, oy, oz.

Dichas rectas cortarán á la superficie S en los puntos B, C, D, y los tres planos $B\,A\,D$, $B\,A\,C$, $C\,A\,D$ cortarán asimismo á la superficie según tres curvas $B\,D$, $D\,C$, $C\,B$. De este modo se formará el tetraedro $A\,B\,C\,D$, en que la cara $B\,C\,D$, que coincidirá con la superficie S, es decir, que estará en ella, será una cara curva; pero como suponemos que el tetraedro es muy pequeño, podemos admitir que los arcos $B\,C$, $C\,D$, $D\,B$, son líneas rectas, y en este caso todas las caras del tetraedro serán planas.

El tetraedro tendrá su vértice A en el interior del cuerpo y se apoyará en la superficie S, por la cara próximamente plana $B\,C\,D$.

Precisamente sobre esta cara suponemos que está el punto p, para el cual queremos establecer las ecuaciones de equilibrio, que serán las del tetraedro; porque estando en equilibrio éste, está en equilibrio el punto p y todos los puntos de la superficie comprendidos en el triángulo $B\,C\,D$.

Pero el tetraedro ha de cumplir con otra condición, que en general no especifican los autores, y que es absolutamente necesaria, porque sin ella cae la demostración por su base.

Para llegar el volumen del tetraedro á la superficie S, tiene que pasar forzosamente por la superficie S' y por la zona comprendida entre estas dos superficies.

Hemos representado las intersecciones de las tres caras

rectangulares del tetraedro con esta superficie S', por las líneas bc, cd, db, de suerte que la zona de espesor ε está representada en el tetraedro por sus dos límites $B\,C\,D$ en la superficie S y bcd en la superficie S'.

El resto del tetraedro, es decir, el tetraedro $Abcd$ estará en el interior del cuerpo.

Y la condición á que nos referimos es ésta: es preciso que el tetraedro sea mucho mayor que la parte de zona comprendida entre las dos caras $B\,C\,D$, $b\,c\,d$.

Y el objeto se comprende; es el de poder despreciar dicha zona y poder calcular el tetraedro como estando todo él en el interior del cuerpo y apoyado directamente sobre la superficie S, anulando con el pensamiento la zona de espesor ε que es en la que, por decirlo así, están todas las dificultades.

Veamos ahora cómo se establece el equilibrio de este tetraedro elemental.

El tetraedro estará sometido:

En la cara exterior $B\,C\,D$ á la fuerza P por unidad de superficie, y á la fuerza total

$$P\,.\,\text{área}\ BCD;$$

advirtiendo que esta fuerza, en general, no será normal á la superficie. Formará con los ejes coordenados ángulos cuyos cosenos, que representaremos por l, m, n, y que dependerán del punto p, serán funciones de x, y, z.

Sobre la cara ABC actuará una fuerza que ya hemos calculado y cuyas componentes dijimos que eran (fig. 41 bis)

$$-N_3,\ -T_1,\ -T_2,$$

referidas á la unidad de superficie; por consiguiente habrá que multiplicarlas por el área del triángulo ABC.

Tendremos, pues, sobre la cara ABC

$$-N_3 \text{ área } ABC; \quad -T_1 \text{ área } ABC; \quad -T_2 \text{ área } ABC.$$

Del mismo modo actuará sobre la cara ABD una fuerza cuyas componentes serán:

$$-N_2 \text{ área } ABD; \quad -T_1 \text{ área } ABD; \quad -T_3 \text{ área } ABD.$$

Y por fin, la fuerza que actúa sobre la cara ACD tendrá por componentes

$$-N_1 \text{ área } ACD; \quad -T_2 \text{ área } ACD; \quad -T_3 \text{ área } ACD.$$

Además, sobre la masa del tetraedro actuará una fuerza, cuyas tres componentes serán:

$$X \,.\, \text{volumen } ABCD, \quad Y \,.\, \text{volumen } ABCD,$$
$$Z \,.\, \text{volumen } ABCD.$$

El tetraedro sometido á todas estas fuerzas debe estar en equilibrio, y entonces estarán en equilibrio también todos los puntos, tales como p, de la superficie, comprendidos en el triángulo BCD.

***

Y ahora comprenderán mis oyentes y mis lectores por qué para resolver la segunda parte del problema de la Elasticidad, es decir, el equilibrio de la superficie límite, abrimos un paréntesis y dedicamos toda una conferencia al estudio de las tensiones, compresiones y deslizamientos del interior del cuerpo.

Las estudiábamos en un punto cualquiera del interior,

pero era, no para determinar el equilibrio de estos puntos interiores, que éste ya lo teníamos resuelto, sino para aplicar los valores de N y de T al tetraedro de la superficie, cuya casi totalidad $A\,a\,b\,c$ está en el interior del sistema y al cual son aplicables los valores de N y T qué hemos calculado.

Y ahora comprenderán también, por qué hemos establecido la condición de que la parte de zona de espesor ε comprendida en el interior del tetraedro sea muy pequeña y pueda despreciarse en comparación del volumen total del tetraedro.

No siendo así, el método no sería legítimo.

Por ejemplo, si en la cara $A\,B\,D$ la zona $B\,D\,b\,d$ es muy pequeña en comparación con $A\,b\,d$, podremos aplicar, los valores N y T calculados para el interior del cuerpo, á toda el área $A\,b\,d$, que casi se confunde con $A\,B\,D$.

Pero si así no fuese, no podríamos aplicar las N y T calculadas para el interior del cuerpo á la corona ó porción de corona $BbDd$, porque pertenece á la zona ε, y para ello las N y T son distintas de las calculadas para el interior del sistema elástico.

Por eso en este método hay una hipótesis implícita, y es la de prescindir de la zona de espesor ε, como si no existiese, y como si todo el tetraedro estuviera en el interior del cuerpo.

Mas para esta hipótesis hay que tener en cuenta que ε no es una cantidad infinitamente pequeña: muy pequeña, sí; pero con un valor finito, que indicábamos en otra conferencia.

Hechas estas observaciones, calculemos las ecuaciones de equilibrio del tetraedro en cuestión.

Considerando al tetraedro como un cuerpo sólido, sabemos que sus ecuaciones de equilibrio son seis.

Tres de ellas expresan que las tres componentes de todas las fuerzas trasladadas á un punto paralelamente á sí mismas, componentes tomadas con relación á los tres ejes, son nulas.

Y las otras tres expresan la condición de que los tres pares del sistema han de ser nulos también.

Pero de los tres pares expresados podemos prescindir en este caso, porque las fuerzas son del orden de pequeñez de las caras, es decir, de segundo orden, y los brazos de palanca de los pares son de primer orden; luego el par será de tercer orden. En comparación con las cantidades del segundo orden, podemos suponer que son nulos.

Pasemos, pues, al equilibrio paralelamente á los ejes.

Y empecemos por el eje de las X.

La figuras 41 bis de la conferencia IX, que reproducimos aquí, nos hace ver que hay tres fuerzas paralelas al eje de

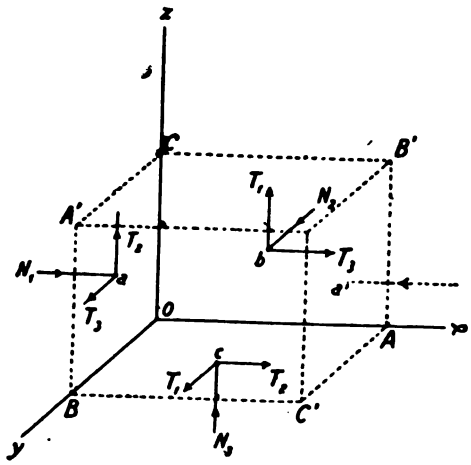


Figura 41 bis.

las x, á saber: $-N_1$, $-T_2$, aplicada á c, $-T_3$, aplicada á b, referidas todas ellas á la unidad de superficie: todas las demás son perpendiculares á este eje.

La $-N_1$ corresponde al área $A\,CD$ (fig. 42): representando esta área por ω_x, la componente paralela al eje de las X que actúa sobre dicha cara, será

$$-N_1\,\omega_x. \qquad (\omega_x)$$

La fuerza $-T_2$ aplicada á c corresponde á la cara ABC del tetraedro y está contenida en ella, porque es fuerza de resbalamiento: representando por ω_z el área del triángulo ABC, la componente que debemos tener en cuenta será

$$-T_2 \,.\, \omega_z. \qquad (\omega_z)$$

Por último, la componente $-T_3$ corresponde á la cara del tetraedro ABD y, por lo tanto, nos dará el valor llamando ω_y al área de dicha cara

$$-T_3\omega_y. \qquad (\omega_y)$$

Ya dijimos que el esfuerzo sobre la base BCD del tetraedro era

$$P \text{ área } BCD,$$

y llamando Ω al área BCD, tendremos para la componente paralela al eje x,

$$P\Omega \,.\, \cos(P, x). \qquad (\Omega)$$

Estas cuatro son las componentes paralelamente al eje de las X de las fuerzas que actúan sobre las cuatro caras del tetraedro elemental.

Sólo nos queda por considerar la componente de la fuerza exterior F, que aplicada al centro de dicho tetraedro. Pero como la fuerza F está referida á la unidad de volumen, su producto por dicho volumen, que es una cantidad muy pequeña de tercer orden, será de tercer orden también: en comparación con las demás fuerzas que son de segundo orden por ser proporcionales á las áreas, puede despreciarse.

Sumando, pues, los valores (ω_x), (ω_y), (ω_z), (Ω) y recordando que $\cos(P, x) = l$ tendremos para la primera ecuación del equilibrio, ó sea para la componente paralela al

eje de las x de todas las fuerzas que actúan sobre el tetraedro elemental,

$$-N_1\omega_x - T_2\omega_z - T_3\omega_y + P\Omega l = 0;$$

de donde,

$$Pl = N_1\frac{\omega_x}{\Omega} + T_2\frac{\omega_z}{\Omega} + T_3\frac{\omega_y}{\Omega}.$$

Ahora bien: ω_x es la proyección sobre el $y\,z$ del área BCD; luego la relación de ambas áreas $\frac{\omega_x}{\Omega}$ será el coseno del ángulo que formen sus normales, es decir, la normal á la superficie BCD, con el eje de las x, que la designaremos por α.

Asimismo $\frac{\omega_y}{\omega}$ será el coseno del ángulo que forma con el eje de las y la normal á la superficie S en un punto cualquiera del triángulo BCD, que suponemos infinitamente pequeño. Lo designaremos por β.

Por último, la relación $\frac{\omega_z}{\Omega}$ será el coseno del ángulo de la misma normal con el eje de las z, que lo llamaremos γ.

Y la ecuación se convertirá en

$$Pl = N_1\alpha + T_2\gamma + T_3\beta.$$

Por consideraciones enteramente semejantes obtendremos las otras dos ecuaciones correspondientes á los otros dos ejes.

En fin, tendremos para el equilibrio del tetraedro estas tres ecuaciones:

$$Pl = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma,$$
$$Pm = T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma,$$
$$Pn = T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma.$$

Se pueden deducir prácticamente las dos últimas de la primera, aplicando las tres substituciones circulares,

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ m & n & l \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix},$$

en que la última se refiere á los subíndices.

***

No olvidemos la significación de cada una de las letras contenidas en estas fórmulas.

P es la fuerza exterior por unidad de superficie en el punto cuyo equilibrio establecen las fórmulas precedentes; será, en general, una función de x, y, z.

l, m, n son los cosenos de los ángulos que forman la fuerza P con los ejes; son también funciones de x, y, z.

Las N y las T son las componentes de las compresiones, tensiones y fuerzas de deslizamiento en la región del interior, próxima al punto de la superficie que consideramos, y refiriéndose á planos paralelos á los coordenados, como son las tres caras interiores del tetraedro elemental.

Sus valores son los que ya hemos obtenido, y que, para más claridad, los reproducimos aquí.

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx}, \quad T_1 = \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right),$$

$$N_2 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dv}{dy}, \quad T_2 = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right),$$

$$N_3 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz}, \quad T_3 = \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right).$$

Por último, α, β, γ son los cosenos de los ángulos que forman, con los tres ejes coordenados, la normal á la superficie en el punto cuyo equilibrio estamos determinando.

Es evidente, por lo demás, que cuando en las tres ecuaciones que expresan el equilibrio de dicho punto, substituyamos los valores de las N y las T, se convertirán en tres ecuaciones en *derivadas parciales de primer orden* de u, v, y w con relación á x, y, z; lineales con respecto á dichas derivadas, pero en que los coeficientes sean funciones de x, y, z.

Hemos resuelto, pues, la segunda parte del problema de la Elasticidad para el caso del equilibrio y para los cuerpos isótropos.

Para el caso general, la marcha sería la misma.

Consideremos ahora el problema en su conjunto.

***

Dos grupos de ecuaciones resuelven el problema del equilibrio elástico de los cuerpos isótropos.

El primer grupo es el siguiente:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\Delta u+\rho X=0\\(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dy}+\mu\Delta v+\rho Y=0\\(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dz}+\mu\Delta w+\rho Z=0\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Estas tres ecuaciones expresan el equilibrio de un punto cualquiera del interior del sistema.

Son ecuaciones en diferenciales parciales de segundo orden, lineales y de coeficientes constantes, exceptuando los últimos términos, que podrán ser funciones de x, y, z.

Será preciso integrarlas buscando valores de u, v, w, en función de x, y, z, que las satisfagan y que tengan al mismo tiempo *la generalidad suficiente* para satisfacer á las tres ecuaciones restantes, es decir, á las que expresan el equilibrio de los puntos de la superficie límite, y que son las que obtuvimos hace un momento, poniendo en vez de N y T sus valores.

Resultan, pues, estas ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} Pl = \left(\lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx}\right)\alpha + \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right)\beta + \\ + \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)\gamma \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} Pm = \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right)\alpha + \left(\lambda\theta + 2\mu\frac{dv}{dy}\right)\beta + \\ + \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right)\gamma \\ Pn = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)\alpha + \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right) + \\ + \left(\lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz}\right)\gamma \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

que son ecuaciones en derivadas parciales de u, v, w, con relación á x, y, z, *de primer orden;* pero los coeficientes P, α, β, γ, l, m, n, son funciones de x, y, z, si bien para los puntos de la superficie están enlazadas estas tres variables por la ecuación de la misma, que representaremos por

$$S(x, y, z) = 0.$$

El problema, por lo tanto, del equilibrio, abarcándolo en toda su generalidad, consistirá en buscar valores para u, v, w, en función de x, y, z, que satisfagan á las ecuaciones (1) y (2), problema de análisis, pero inmensamente difícil.

Por eso dice M. Poincaré en su tratado de Elasticidad:

«Mais l'intégration générale de ces équations présente »des difficultés insurmontables, ou peut seulment traiter »quelques cas particuliéremente simples.»

También podemos decir, y es otra manera de expresar la misma idea, que el problema del equilibrio consiste en integrar las ecuaciones (1) obteniendo estas ecuaciones con funciones arbitrarias tales, que al aplicar á las ecuaciones (2) los valores de u, v, w, las tres ecuaciones resultantes determinen sin ambigüedad las funciones arbitrarias que contenían las integrales generales del sistema (1).

***

De todas maneras, y recordando lo que ya varias veces hemos dicho, repetiremos, que este problema del equilibrio elástico, como casi todos los problemas de la Física matemática, se descompone en tres partes.

1.ª *Idear las hipótesis*, que es lo fundamental, lo más difícil, lo que supone genio, ó gran acierto, ó intuición suprema en el que intente resolver esta clase de cuestiones reduciéndolas á cuestiones de Mecánica. Esta parte constituye lo esencial en la Física matemática clásica.

2.ª *Establecer las ecuaciones* aplicando los principios de la Mecánica general. Y aquí puede decirse que termina la Física matemática.

3.ª Resolver, ó por mejor decir, *integrar las ecuaciones anteriores*, y éste ya es un problema de puro análisis. De inmensa dificultad casi siempre; pero ya no es un problema de Física matemática, sino de cálculo.

Y esto sucede en el caso presente. Problema que se descompone en dos partes. No sólo hallar la integral, sino hallar una integral con la generalidad suficiente para que pueda satisfacer á todas las condiciones del problema.

La integración de las ecuaciones en diferenciales parciales es inmensamente difícil, y aun es dificilísimo determinar *a priori* el grado de generalidad de las soluciones.

Porque, fíjense bien mis oyentes y mis lectores:

1.° Es preciso que las integrales tengan suficiente generalidad para satisfacer á los sistemas (1) y (2). Si así no fuese, toda la teoría caería por su base; el problema físico no podría resolverse ó interpretarse con arreglo á las hipótesis establecidas. No podría, en suma, reducirse á un problema de Mecánica.

2.° Pero si las integrales tuvieran exceso de generalidad, es decir, si después de satisfacer á todas las condiciones del problema aun contuviesen funciones ó constantes arbitrarias, la solución no sería perfecta y dejaría dudas en el ánimo.

Porque supongamos que el problema físico, según la experiencia, y hasta según el sentido común, fuera determinado y no admitiese más que una *solución única.* Pues si las integrales generales nos dieran muchas soluciones, entre la realidad física y el cálculo resultaría una discordancia evidente. La realidad física, diciendo: *no hay más que una solución.* El cálculo, demostrando *que hay muchas.*

Por eso los matemáticos se afanan en buscar armonía entre el cálculo y la Física, y en determinar para cada problema la solución única posible, que es el único modo de que el cálculo pueda ser símbolo perfecto de la realidad y sus leyes.

No tenemos la presunción de resolver este problema; pero tenemos el deber de hacer que se comprenda cuál es su carácter y cuáles son sus condiciones, y por esta razón agregaremos á las observaciones anteriores algunas más.

***

Resolver las ecuaciones diferenciales y viniendo al caso presente las de segundo orden en diferenciales parciales

como son las (1), es problema de suma dificultad, como hemos dicho varias veces.

Existe un teorema que lleva el sello de su inmortal autor, el matemático Cauchy, y que puede verse, no sólo en las memorias y notas originales de este autor, sino en la obra de Mr. Goursat, sobre ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.

También se encuentra en la obra de cálculo de Mr. Jordan y en la gran obra de cálculo diferencial é integral de Laurent.

Por este teorema, y con *ciertas restricciones*, se obtiene en una región holomorfa, las integrales alrededor de cada punto, desarrolladas por la serie de Taylor, y se determinan las condiciones de convergencia de dichas series, así como las condiciones que podemos llamar iniciales.

Pero este teorema, que es fundamental y uno de los más generales que existen en el análisis moderno, no agota la cuestión, porque no comprende las integrales, que no pudieran desarrollarse por la serie de Taylor.

Más aún; dan lugar á dificultades ó paradojas, porque *según el método* que se siga, se obtienen un *número distinto* de funciones arbitrarias. Véase, por ejemplo, Cournot, Laurent, Poisson.

***

Todavía al tratar esta cuestión hay otro procedimiento: partir de una ecuación en términos finitos y ver qué número de funciones arbitrarias pueden eliminarse al pasar á las *ecuaciones diferenciales de segundo orden;* porque ocurre que, partiendo de éstas, en la integral general deben aparecer estas funciones arbitrarias y que de ellas podremos disponer para satisfacer á las demás condiciones del problema, que en este caso que estamos considerando serán las de los límites.

Pero tampoco este método, por su gran generalidad é indeterminación, satisface de una manera completa.

Sin embargo, para que mis oyentes comprendan estas ideas, que ya conozco que son muy vagas, vamos á concretarlas un tanto más, sin que esto sea, vuelvo á repetirlo, pretender llegar á la solución de un problema hasta el presente inaccesible, como no sea, según dice Mr. Poincaré, en el texto antes citado, para casos particulares y particularmente sencillos.

Sean tres ecuaciones en términos finitos, entre tres funciones u, v, w, tres variables independientes x, y, z, y tres funciones arbitrarias α, β, γ, de dos de las variables, x, y, por ejemplo.

Tendremos, pues,

$$F_1[u, v, w, x, y, z, \alpha(x, y), \beta(x, y), \gamma(x, y)] = 0,$$
$$F_2[u, v, w, x, y, z, \alpha(x, y), \beta(x, y), \gamma(x, y)] = 0,$$
$$F_3[u, v, w, x, y, z, \alpha(x, y), \beta(x, y), \gamma(x, y)] = 0,$$

en las que las formas de F_1, F_2, F_3 son perfectamente conocidas, pero son arbitrarias las tres funciones α, β, γ.

Según los métodos que se enseñan en cálculo diferencial, vamos á ver si es posible deducir tres ecuaciones, en diferenciales parciales de segundo orden de u, v, w, con relación á x, y, z, en las que hayan desaparecido las tres funciones arbitrarias α, β, γ. En cuyo caso, las tres ecuaciones diferenciales tendrán por lo menos tanta generalidad como las propuestas, y comprenderán todas las que se deducen de estas últimas para todas las formas arbitrarias de α, β, γ.

Este problema ha sido explicado con toda claridad, y con más generalidad aún, por Mr. Jordan en su tratado de cálculo, y en todas las obras de esta ciencia se estudia: desde los comienzos del cálculo diferencial é integral, se presentó, como es natural, á la consideración de los matemáticos.

Detengámonos en este punto, que es importantísimo.

Las ecuaciones fundamentales son tres: $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$.

Si las diferenciamos una vez con relación á x, después con relación á y, y por último con relación á z, tendremos otras tres por cada ecuación $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ y resultarán *nueve*.

Su forma será ésta: por ejemplo, diferenciando $F_1 = 0$ por relación á x:

$$\frac{d_1F}{dx} + \frac{dF_1}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dF_1}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{dF_1}{dw}\frac{dw}{dx} +$$
$$+ \frac{dF_1}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{dF_1}{d\beta}\frac{d\beta}{dx} + \frac{dF_1}{d\gamma}.\frac{d\gamma}{dx} = 0,$$

que en forma abreviada escribiremos $\left(\frac{dF_1}{dx}\right) = 0$.

En esta expresión entran:

1.° Las derivadas $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{dw}{dx}$ que podrán quedar y quedarán en general en las ecuaciones diferenciales.

2.° Las derivadas $\frac{d\alpha}{dx}, \frac{d\beta}{dx}, \frac{d\gamma}{dx}$ que dependen de la forma de α, β, γ que deben ser eliminadas, para que las ecuaciones diferenciales no contengan las funciones que queremos eliminar si son derivadas.

3.° Los coeficientes $\frac{dF_1}{dx}, \frac{dF_1}{du}$ ..... $\frac{dF_1}{d\alpha}$ ..... que serán de forma conocida, pues lo es F_1, y contendrán las mismas cantidades que F_1, á saber $x, y, z, u, v, w, \alpha, \beta, \gamma$.

Otro tanto diremos de las demás diferenciaciones con relación á y, z de F_1, F_2, F_3.

Si volvemos á diferenciar $\left(\frac{dF}{dx}\right)$..... cada una con relación á x, y, z, tendremos una serie de derivadas segundas cuyo número será *diez y ocho*.

Dichos resultados están expresados *simbólicamente* en este cuadro.

ECUACIONES	PRIMERA DERIVADA	DERIVADA SEGUNDA
$F_1 = 0$	$\left(\frac{dF_1}{dx}\right) = 0, \left(\frac{dF_1}{dy}\right) = 0, \left(\frac{dF_1}{dz}\right) = 0$	$\left(\frac{d^2F_1}{dx^2}\right) = 0, \left(\frac{d^2F_1}{dydz}\right) = 0,$ $\left(\frac{d^2F_1}{dy^2}\right) = 0, \left(\frac{d^2F_1}{dxdz}\right) = 0,$ $\left(\frac{d^2F_1}{dz^2}\right) = 0, \left(\frac{d^2F_1}{dxdy}\right) = 0$
$F_2 = 0$	$\left(\frac{dF_2}{dx}\right) = 0, \left(\frac{dF_2}{dy}\right) = 0, \left(\frac{dF_2}{dz}\right) = 0$	Lo mismo para F_2
$F_3 = 0$	$\left(\frac{dF_3}{dx}\right) = 0, \left(\frac{dF_3}{dy}\right) = 0, \left(\frac{dF_3}{dz}\right) = 0$	Lo mismo para F_2
3	9	18

Número de ecuaciones = 30.

Resultará un total de 30 ecuaciones para eliminar α, β, γ y sus derivadas.

Veamos si, en efecto, entre estas 30 ecuaciones podemos eliminar dichas funciones.

La función α nos dará una derivada con relación á x, y otra con relación á y en la primera derivación. En la segunda, tres derivadas: una, dos veces con relación á x; otra, también dos veces, con relación á y, y otra tercera con relación á x, y.

Tendremos, pues, que eliminar α, $\frac{d\alpha}{dx}$, $\frac{d\alpha}{dy}$, $\frac{d^2\alpha}{d^2\alpha}$, $\frac{d^2\alpha}{dy^2}$, $\frac{d^2\alpha}{dxdy}$ que son *seis* funciones.

Asimismo β nos dará otras seis funciones.

Y λ, otras seis.

Que en conjunto son 18 expresiones, que pretendemos eliminar.

Como las ecuaciones eran 30, nos quedarán 30 18 = 12

ecuaciones en que habrán desaparecido por completo las tres funciones α, β, γ y sus derivadas. Podremos tomar arbitrariamente 3 de estas ecuaciones diferenciales.

Estas tres ecuaciones finales contendrán:

$$u, v, w, x, y, z, \frac{du}{dx}, \ldots\ldots \frac{dv}{dx}, \ldots\ldots \frac{dw}{dx}, \ldots\ldots$$

$$\frac{d^2 u}{d x^2}, \ldots\ldots \frac{d^2 v}{d x^2}, \ldots\ldots \frac{d^2 w}{dx^2}, \ldots\ldots$$

Es decir, las *funciones*, las *variables* independientes y las derivadas de primero y segundo orden de u, v, w con relación á x, y, z: y nada más. Nada de α, β, γ.

Y comprendiendo esto, parece natural que, cuando se presenten tres ecuaciones diferenciales de esta clase, busquemos integrales, que contengan por lo menos las tres funciones arbitrarias de x, y que son las que hemos llamado α, β, γ.

Decimos *por lo menos*, porque aun hubiéramos podido agregar otras funciones arbitrarias á las ecuaciones $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$. Por ejemplo, además de

$$\alpha(x, y), \beta(x, y), \gamma(x, y), \text{ otras tres } \alpha_1(x), \beta_1(y), \gamma_1(z).$$

Estas nos hubieran dado nueve funciones más que eliminar:

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \frac{d\alpha_1}{dx}, \frac{d\beta_1}{dy}, \frac{d\gamma_1}{dz}, \frac{d^2\alpha_1}{dx^2}, \frac{d^2\beta_1}{dy^2}, \frac{d^2\gamma_1}{dz^2};$$

pero como sobraban 12 ecuaciones, eliminando las nueve anteriores, quedarían 3.

Así, dadas tres ecuaciones en diferenciales parciales de segundo orden, ocurre que acaso podremos determinar u, v, w con 6 funciones arbitrarias: $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, $\gamma(x, y)$, $\alpha, (x)$, $\beta, (y)$, $\gamma, (z)$.

Y ésta no es más que una de tantas combinaciones como pudieran hacerse.

Las indicaciones que preceden son de carácter general, porque pudiera suceder que, para formas especiales de F_1, F_2, F_3, asalte la duda de si podrán eliminarse mayor número de funciones arbitrarias.

O si, por el contrario, habrá también casos en que ni aun éstas puedan eliminarse.

Por el pronto, ni afirmamos ni negamos; decimos que todo esto exige un estudio más detenido y demostraciones más terminantes.

Las ciencias matemáticas sólo pueden proceder por evidencia, ó al menos tal debe ser su aspiración.

Supongamos, pues, volviendo á nuestro objeto, que se encontrasen las integrales de u, v, w, con las tres funciones arbitrarias α, β, γ, y que sean,

$$u = \varphi_1 [x, y, z, \alpha(x, y), \beta(x, y), \gamma(x, y)].$$

$$v = \varphi_2 [x, y, z, \alpha(x, y), \beta(x, y), \gamma(x, y)].$$

$$w = \varphi_3 [x, y, z, \alpha(x, y), \beta(x, y), \gamma(x, y)].$$

Hemos supuesto que estas tres expresiones de u, v, y w, satisfacen al grupo (1), convirtiéndolo en tres identidades.

Pero como entran tres funciones arbitrarias α, β, γ, hay la esperanza de que también satisfagan al grupo (2), ó sea al equilibrio de los puntos de la superficie.

Para ello substituiremos en el grupo (2) estos valores de u, v, w, así como sus derivadas. Además, como se trata de puntos que están sobre la superficie S ó sumamente próximos, *podemos suponer* que es legítimo poner en vez de z su valor deducido de la ecuación de la superficie

$$S(x, y, z) = 0,$$

con lo cual las tres ecuaciones del grupo (2) se convertirán en ecuaciones de la forma siguiente:

$$\psi_1\left(x, y, \alpha, \beta, \gamma, \frac{d\alpha}{dx}, \frac{d\alpha}{dy}, \frac{d\beta}{dx}, \frac{d\beta}{dy}, \frac{d\gamma}{dx}, \frac{d\gamma}{dy}\right) = 0,$$
$$\psi_2 = 0,$$
$$\psi_3 = 0,$$

siendo la constitución de $\psi_2 = 0$, $\psi_3 = 0$ análoga á la de la primera.

En cuanto á la substitución de z, deducida de la ecuación $S = 0$ podríamos hacer aquí las salvedades que hicimos en la conferencia anterior al deducir las ecuaciones del grupo (2).

De todas maneras, hemos obtenido tres ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, que podrán servirnos para determinar las tres funciones desconocidas α, β, γ.

Y aun estas tres funciones presentarán cierta latitud que podrá servirnos para satisfacer alguna otra condición.

Todo lo que hemos dicho sólo debemos considerarlo como una *orientación* para resolver el problema; pero siempre quedan para un estudio más detenido las dudas que presentábamos al principio.

Es forzoso que la solución sea *posible*, y que la solución sea *única;* y sobre esto algo diremos en los cursos próximos al dar cuenta de los trabajos de M. Cossera y otros matemáticos.

***

Hasta aquí el problema del equilibrio. Respecto al problema del movimiento, aunque es mucho más difícil que el primero, podíamos, sin embargo, seguir la marcha que en éste seguimos.

También el problema comprende dos grupos de ecuaciones.

Uno, que es el grupo (1), agregando las fuerzas de inercia.

Otro, que es el grupo (2), en que han de substituirse las u, v, w, determinadas por la integración del grupo (1) y que dependerán, no de tres variables como antes, sino de cuatro variables, x, y, z, t.

Habría que discutir si son valederas para este caso las ecuaciones del grupo (2), que al fin y al cabo no expresan más que el equilibrio, y en este problema del movimiento que estamos estudiando tendrían que expresar una especie de equilibrio móvil, puesto que u, v y w contienen t.

Abona esta interpretación el hecho de que, si en vez de establecer el equilibrio, se establecieran las ecuaciones del movimiento para puntos de la superficie, las fuerzas de inercia contendrían, como las X, Y, Z, que hemos despreciado, el factor δx, δy, δz que contenían éstas últimas.

De todas maneras, tendremos para la superficie tres ecuaciones de condición, y sería indispensable, como en el caso del equilibrio, que al integrar las ecuaciones del nuevo grupo (1), en los valores de u, v y w, entrasen funciones arbitrarias, por ejemplo, $\alpha(x, y, t)$, $\beta(x, y, t)$, $\gamma(x, y, t)$, capaces de satisfacer al grupo (2).

Pero aquí el problema se complica, porque no se trata tan sólo de satisfacer á las *condiciones de las superficies-límite*, sino que es preciso que para el instante inicial, es decir, para $t=0$, dichos valores de u, v y w *expresen las deformaciones iniciales*, que son un dato, y *las velocidades iniciales*, que son otro dato también.

Ocurre que para esto *acaso* sería preciso que u, v y w contuvieran nuevas funciones arbitrarias que *á primera vista*, dijérase que deben ser nueve. Mas en esta hipótesis provisional sería imposible la eliminación de las nueve funciones arbitrarias.

Sin embargo, no es imposible que bastase con *seis*, y aun con tres, porque tres de ellas se determinan por medio de ecuaciones en diferenciales parciales, y contienen, por lo tanto, funciones arbitrarias que podrían suplir á las que hubiéramos suprimido.

Todas estas son reflexiones generales y muy vagas, que, sin embargo, no nos sería difícil precisar; pero la índole y el carácter elemental de estas conferencias no lo consienten.

Lo que puede haber de vago en cuanto acabamos de exponer, lo iremos precisando en una serie de ejemplos, que empezaremos á explicar en la conferencia próxima y que completarán estas *nociones generales sobre la teoría de la Elasticidad, según el método de Cauchy.*

III.— Análisis de las aguas mineromedicinales de Carraclaca (Lorca).

POR GABRIEL DE LA PUERTA

Situación de la fuente.

Esta fuente, llamada de Carraclaca, se halla en una finca denominada San Julián el Viejo, propiedad de la Señora Doña Antonia Musso y Moreno Rocafull, término municipal de Lorca, provincia de Murcia, á la distancia de cuatro kilómetros de Lorca y próxima á la carretera que une á esta ciudad con la de Murcia.

El agua brota en una roca caliza ferruginosa, con desprendimiento de gas carbónico, y aunque es incolora y transparente al salir, se enturbia al poco tiempo, tomando color

amarillorojizo y formándose copos del mismo color, de hidrato férrico, resultantes de la descomposición del bicarbonato de hierro que contiene el agua en bastante cantidad. Después de algún tiempo de embotellada el agua, se forma un depósito de dicho hidrato férrico, quedando el líquido claro y transparente.

El terreno donde nacen estas aguas corresponde á los secundarios, formación triásica y jurásica, que constituyen la cordillera de que forma parte.

«El paisaje (dice el Dr. Jimeno en su Memoria) que se desarrolla ante la vista desde esta eminencia, es supremamente bello y delicioso. Toda la fértil y hermosa vega lorquina, limitada por lejano semicírculo de cordilleras en extensión de muchas leguas, queda á los pies del espectador, constituyendo el más admirable cosmorama bañado por la luz del sol saliente y meridiano.»

La *altura sobre el nivel del mar*, donde se halla la fuente, es de 370 metros próximamente.

Análisis de la roca donde nace el agua.

Es una roca caliza, poco compacta y en partes concrecionada, compuesta de carbonato de calcio, óxido férrico y silicato de aluminio, hallándose cubierta de una capa ocrácea de hidrato férrico, procedente de la descomposición del bicarbonato de hierro que contiene el agua y que se ha depositado con el tiempo.

Propiedades físicas del agua.

Es incolora y transparente al salir del manantial, pero al poco tiempo, como se ha dicho antes, se forman unos copos de color amarillorojizo de hidrato férrico, que se depositan formando sedimento.

No tiene olor, y el sabor es acídulo, parecido al agua de

Seltz y, además, salado, debido el primero á la gran cantidad de ácido carbónico que contiene el agua, y el segundo al cloruro de sodio que también contiene. El sabor ferruginoso apenas se nota en el agua embotellada, porque se deposita el hidrato férrico, y en el agua queda en disolución muy corta cantidad de sal de hierro.

Al echar el agua en un vaso se desprenden abundantes burbujitas de gas carbónico, aumentando por la agitación.

Temperatura en el manantial.—20° centígrados, según el Dr. D. Joaquín Jimeno, Inspector y Subdelegado de Medicina de Lorca, autor de una notable Memoria acerca de estas aguas.

Densidad del agua.—Determinada por la balanza de Westphal y por el picnómetro, á la temperatura de 20°, resultó 1,006 con la primera y 1,007 con el segundo, siendo el término medio 1,0065.

Aforo.

Practicado por el Dr. Jimeno, resultan 15 litros por minuto, ó sean 900 por hora, y en las veinticuatro horas 21.600 litros.

Además escurre mucha agua por la superficie de la roca, que no es posible aforar hasta que se haga el captado y las obras necesarias.

ANÁLISIS CUALITATIVO

Reacciones preliminares.

El agua embotellada dió directamente, sin evaporar, las reacciones siguientes:

Tintura de flor de malva y papel de tornasol azul.—Ligera reacción ácida, que desaparece en el papel de tornasol por su exposición al aire.

Fenoltaleína.—Con algunas gotas no toma color el agua; pero si ésta se deja al aire por algún tiempo ó se ha hervido, da un ligero color de rosa.

Agua de cal.—Precipitado blanco, que se disuelve añadiendo más agua mineral (ácido carbónico).

Acido clorhídrico.—Mucha efervescencia (carbonatos).

Ferricianuro potásico.—Nada.

Ferrocianuro potásico.— Después de añadir algunas gotas de ácido clorhídrico, coloración azul.

Sulfocianuro potásico.—En la misma forma que el anterior, coloración roja.

Sulfuro amónico.—Neutralizada el agua con ácido clorhídrico, añadiendo luego amoníaco en exceso y el sulfuro, da color verdoso obscuro, y al día siguiente, poco precipitado negro de sulfuro de hierro.

Estas tres últimas reacciones demuestran la existencia del *hierro* en el agua, aun después de formado el sedimento y separada del mismo; pero es menester añadir algunas gotas de ácido clorhídrico para que aparezcan dichas coloraciones; lo que me hace creer que en el agua queda, después de descomponerse el bicarbonato ferroso, cierta cantidad de hidrato férrico en estado coloide, ó de carbonato férrico ácido, como se dirá más adelante.

Cloruro de bario.—Después de añadir ácido nítrico, precipitado blanco (sulfatos).

Nitrato de plata.—Después de añadir ácido nítrico, precipitado blanco abundante (cloruros).

Oxalato amónico más *cloruro amónico.*—Precipitado blanco abundante (calcio).

Fosfato sódico amónico.—El líquido filtrado de la reacción anterior da poco precipitado blanco (magnesio).

Molibdato amónico.—Nada en frío, ni en caliente.

Ioduro potásico, engrudo de almidón y algunas gotas de ácido sulfúrico diluído. — Coloración azulada obscura (nitritos).

Reactivo de Nessler.—Nada.

Coloración de la llama.—Amarillo (sodio), rojizo (calcio).

Evaporación del agua.

Un litro de agua mineral se evaporó con el sedimento, hasta reducirle á más de la mitad de su volumen. Al calentar el agua se desprenden burbujas de gas y se enturbia, depositándose carbonato de calcio, además del hidrato férrico.

Al día siguiente se filtró el líquido frío, recogiendo el precipitado ó depósito formado, para estudiarle separadamente del líquido filtrado.

Estudio del líquido filtrado.

Dió las reacciones siguientes:

Tintura de flor de malva y papel rojo de tornasol.—Nada.

Fenoftaleína.—Ligerísima coloración roja.

Ácido clorhídrico.—No produce efervescencia.

Sulfato de magnesio. — No precipita en frío, ni en caliente.

Estas reacciones demuestran que no existe carbonato de sodio.

Cloruro de bario. — Abundante precipitado blanco, insoluble en ácido clorhídrico (sulfatos).

Nitrato de plata.—Abundante precipitado blanco, insoluble en ácido nítrico (cloruros).

Oxalato amónico más *cloruro amónico.*—Poco precipitado blanco (calcio).

Fosfato sódico amónico.—El líquido de la reacción anterior, filtrado sólo, da opalinidad (magnesio).

Molibdato amónico en solución nítrica.—Nada, aun calentando (ausencia de fosfatos).

Ferrocianuro potásico.—Nada.

Sulfocianuro potásico.—Nada.

Sulfuro amónico.—Nada.

Estas tres reacciones demuestran la falta de hierro en el agua evaporada y filtrada.

Brucina y ácido sulfúrico puro.—Coloración roja.

Ioduro potásico, almidón y algunas gotas de ácido sulfúrico diluído.—Coloración azul (nitritos).

Estas dos reacciones demuestran la existencia de *nitritos*, y aunque la primera pudiera ser de nitratos, no existen éstos en el agua, como luego se dirá.

Coloración de la llama.—Amarilla (sodio).

Se investigó el *potasio*, y como después se dirá, existe en corta cantidad.

Estudio del precipitado.

El precipitado resultante de hervir el agua mineral es abundante, de color rojizo. En ácido clorhídrico diluído se disuelve con gran efervescencia (carbonatos), dejando muy poco residuo insoluble (sílice).

La disolución clorhídrica de dicho precipitado dió las reacciones siguientes:

Ferrocianuro potásico.—Diluído en agua destilada, coloración azul intensa.

Sulfocianuro potásico.—Diluído en agua, coloración roja intensa.

Sulfuro amónico.—Después de neutralizar el líquido con amoníaco, color verdoso obscuro, y después de algún tiempo, copos negros que se depositan en el fondo.

Estas tres reacciones demuestran la existencia del *hierro* en bastante cantidad.

Amoníaco.—Después de poco tiempo se forman copitos rojizos gelatinosos (hierro, aluminio).

Oxalato amónico.—Neutralizado el líquido con amoníaco, y añadiendo cloruro amónico, precipitado blanco abundante (calcio).

Fosfato sódico amónico.—El líquido de la reacción ante-

rior, filtrado después de algún tiempo para separar el calcio, no dió precipitado (ausencia de magnesio).

Cloruro de bario.—Poco precipitado blanco (sulfatos).

Molibdato amónico.— Calentando, nada.

Además se investigaron los *fosfatos* en gran cantidad de agua mineral acidulada con ácido nítrico y evaporada hasta pequeño volumen, y lo más que se encontró fué indicios.

Coloración de la llama. — Rojizoamarillenta (calcio y sodio).

Calentando con potasa en una lámina de platino, dió ligerísima coloración verdosa (indicios de manganeso).

También se investigó el *manganeso,* calentando el sedimento del agua mineral, disuelto en ácido nítrico en exceso y bióxido de plomo, y no dió señales de contener dicho metal.

De las reacciones expuestas resulta que el precipitado formado por la evaporación del agua mineral se halla compuesto de *carbonato de calcio, hidrato férrico, alúmina,* poco *sulfato de calcio, sílice* é indicios de *fosfatos* y de *manganeso.*

Otras reacciones.

Como se ha demostrado anteriormente que en esta agua se encuentran nitritos de manera evidente, se procedió á la investigación del *amoníaco,* en la suposición de que se hallaran en el agua en estado de nitrito amónico.

Se destilaron 200 centímetros cúbicos de agua mineral con óxido magnésico, recogiendo 40 centímetros cúbicos de líquido destilado, el cual, tratado con el reactivo de Nessler, no dió coloración; solamente un ligerísimo viso amarillento, que corresponde á lo más á 0,0001 gramos por litro de agua, como en las mejores aguas potables. También se vió que no contenía amoníaco albuminoide.

El *ión nitroso,* hallado por las reacciones anteriores, debe encontrarse en estado de nitrito alcalino ó más bien alcalinotérreo.

También se ha investigado en gran cantidad de agua mineral evaporada el *bromo, iodo, fluor* (1) y el *arsénico*, y no se encontró cantidad apreciable de ninguno de estos cuerpos, ni en el líquido claro ni en el depósito del agua.

La *materia orgánica* se encuentra en mínima cantidad, como se dirá después en el análisis cuantitativo.

Examen espectroscópico.

Las observaciones se han hecho, con el gran modelo del espectroscopio de prismas múltiples, en los líquidos siguientes:

1.° Agua mineral evaporada y filtrada para separar el depósito. Aparecen bien marcadas las rayas características del *litio, potasio* y *sodio*.

2.° Depósito del agua evaporada, disuelto en ácido clorhídrico. Aparecen las rayas del *calcio, sodio* y *litio*.

3.° Líquido resultante de separar por completo el *calcio*, y *magnesio*. Aparecen las rayas del *litio, potasio* y *sodio*.

Además se han examinado otros líquidos, que se dirán más adelante, y que demuestran, como las observaciones que se acaban de exponer, la existencia en el agua del *litio* y *potasio*, además del *calcio* y *sodio*.

Examen microscópico.

Con el microscopio de Leitz, aumento de 600 diámetros, se ha examinado el poso sacado con una pipeta esterilizada, y se ven masitas de color amarillorojizo, que son hidrato férrico precipitado, y cristalitos romboédricos de carbonato de calcio; pero no se ven algas microscópicas.

Con mayor aumento se perciben en las gotas de líquido claro algunos micrococos y diplococos, en tan escaso nú-

(1) El Dr. D. José Casares investigó el fluor con el aparato ideado por él, y tampoco le encontró.

mero, que es menester, para distinguirlos, cambiar el campo, moviendo varias veces la platina giratoria del microscopio.

Esto se halla conforme con la mínima cantidad de materia orgánica que acusa el agua analizada y el corto número de colonias microbianas que resultan por el cultivo, como después se dirá.

ANALISIS CUANTITATIVO [1]

Determinación de los gases.

En un matraz de 70 centímetros cúbicos de capacidad se puso agua mineral, adaptando un tubo de conducción lleno de agua destilada, que comunicaba con la cuba hidrargironeumática, colocando en el puente una campana estrecha de cristal, graduada y llena de mercurio. Se aplicó calor al matraz hasta hervir el agua y cesar el desprendimiento de gases. Después de frío el aparato, é introduciendo la campana en el mercurio hasta que el nivel de éste en el exterior fué igual que en el interior de la campana, resultaron 42 centímetros cúbicos de gas á la temperatura de 20° y presión de 710 milímetros.

Seguidamente, introduciendo en la campana un cilindro de potasa cáustica, y agitando, se vió que casi todo el gas fué absorbido, quedando menos de medio centímetro cúbico de aire sin absorber. Resulta que casi todo el gas desprendido por la ebullición del agua mineral es anhidrido carbónico CO^2.

Siendo 70 centímetros cúbicos el volumen del agua hervida, corresponden para un litro 600 centímetros cúbicos de gas carbónico. Hecha la corrección de presión, temperatura

---

(1) En las pesadas y otros trabajos analíticos me ha auxiliado el Dr. D. Luis Pérez de Albeniz, Profesor auxiliar de la Cátedra de Química Inorgánica.

y humedad, quedan reducidos los 600 centímetros cúbicos á 509.

$$V = \frac{600\,(0{,}710 - 0{,}0174)}{0{,}760\,(1 + 0{,}00367 \times 20)} = 509 \text{ cent. cúb.}$$

Los 509 centímetros cúbicos de CO^2 pesan 1,0063 gramos.

Residuo fijo á 120°.

100 centímetros cúbicos de agua mineral se evaporaron en cápsula de platino en baño de aire, calentando el residuo á la temperatura de 120° hasta obtener dos pesadas consecutivas iguales, y resultó 0,872 gramos de residuo fijo, y para un litro de agua mineral 8,720 gramos.

Calentando al rojo incipiente dicho residuo, no se observó ennegrecimiento de la masa, lo que prueba que no contiene materia orgánica, ó si la hay es en mínima cantidad, como se dirá después.

Disuelto el residuo en ácido clorhídrico, y añadiendo agua destilada, queda una pequeña parte insoluble de *sílice*.

La cantidad de residuo fijo es menor que el total de sales que se expone más adelante, porque en la evaporación del agua mineral se elimina anhidrido carbónico del ácido libre y de los bicarbonatos.

Ión sulfúrico SO^4.

100 centímetros cúbicos de agua mineral, acidulada con ácido clorhídrico, se trataron con cloruro de bario hasta que las últimas gotas no produjeron precipitado, agitando con una varilla de cristal y dejándolo después en reposo hasta el día siguiente. El precipitado se recogió en un filtro de análisis y se lavó bien con agua destilada, hasta que el agua de loción no dejó residuo por evaporación de algunas

gotas calentadas en la lámina de platino. El filtro con el precipitado se desecó á 100°, y, separado dicho precipitado, se incineró el filtro, y juntas las cenizas de éste con el precipitado de sulfato de bario, se calentó fuertemente en una capsulita de platino. El sulfato de bario obtenido, descontando las cenizas del filtro, pesó 0,41289 gramos, donde hay 0,17011 del *ión sulfúrico* SO^4, y para un litro de agua mineral 1,7011 gramos.

Ión cloro *Cl.*

20 centímetros cúbicos de agua mineral acidulada con ácido nítrico se trató con nitrato de plata, y el precipitado de cloruro argéntico formado se recogió al día siguiente en un filtro, se lavó bien con agua destilada y después de seco se separó del filtro, calentándole en un crisolito de porcelana hasta fundirle juntamente con las cenizas del filtro obtenidas aparte. Resultó 0,24727 gramos de cloruro de plata, descontadas las cenizas del filtro, en donde hay 0,0611 del *ión cloro* y en un litro de agua mineral 3,0552 gramos.

También se ha determinado el cloro por medio de la solución valorada de nitrato de plata, poniendo en el agua algunas gotas de solución de cromato de potasio, y resultó 3,05 gramos de cloro por litro de agua mineral.

Ión carbónico CO^3.

En una botella, con 460 centímetros cúbicos de agua mineral, se puso el reactivo cloruro de calcio y amoníaco, tapando en seguida con caucho y agitando. A los dos días se recogió sobre un filtro el precipitado formado de carbonato de calcio, y después de seco se determinó la cantidad total de anhidrido carbónico en el aparatito de F. Morh. Resultó 0,651 gramos de CO^2, que corresponden á 0,8877 gramos del *ión carbónico* CO^3. Como la botella contenía 460

centímetros cúbicos de agua mineral, resultan para un litro de agua 1,9295 gramos.

Ión hidrógeno *H*.

Habiendo en el agua mineral ácido carbónico libre CO^3H^2 y los bicarbonatos de calcio, de hierro y de litio, existe el *ión hidrógeno*, cuya cantidad se ha determinado deduciéndola de dichos compuestos en la forma siguiente:

	Gramos.
Del ácido carbónico libre CO^3H^2.....	0,02698
— bicarbonato de calcio $(CO^3)^2 CaH^2$.....	0,01654
— bicarbonato ferroso $(CO^3)^2 FeH^2$.....	0,00177
— bicarbonato de litio CO^3LiH.....	0,00037
	0,04566

Ión silícico SiO^3.

475 centímetros cúbicos de agua mineral, contenida en una botella, se colocó con el sedimento en una cápsula de porcelana, y se aciduló con ácido nítrico, evaporando el líquido hasta sequedad. El residuo se calentó fuertemente, y después de frío se disolvió en ácido clorhídrico diluído y quedó una parte insoluble de sílice SiO^2, que, recogida en un filtro y bien lavada con agua destilada, se desecó é incineró con el filtro y pesó, descontadas las cenizas de éste, 0,05 gramos. Para un litro de agua corresponde 0,1051 de sílice SiO^2, y del *ión silícico* SiO^3, 0,1362 gramos.

Ión hierro *Fe*.

El líquido anterior, procedente de 475 centímetros cúbicos de agua mineral, después de separada la sílice por filtración, se le añadió amoníaco en exceso y se formó un precipitado

rojizo, gelatinoso, dejándolo en reposo hasta el día siguiente. Se recogió este precipitado sobre un filtro, y después de lavado se disolvió en ácido clorhídrico. A la disolución resultante se añadió ácido tártrico y amoníaco suficiente para neutralizar el ácido, y después se trató con sulfuro amónico, dejándolo hasta el día siguiente. El precipitado negro formado de sulfuro de hierro, se recogió sobre un filtro, se lavó y se disolvió en ácido clorhídrico diluído. A esta disolución se añadió amoníaco en exceso, y el precipitado de hidrato férrico formado se recogió al día siguiente sobre un filtro y pesó, después de la incineración y descontadas las cenizas del filtro, 0,032889 gramos de Fe^2O^3, donde hay 0,02293 del *ión ferroso* Fe, y para un litro de agua mineral corresponde 0,04827 gramos.

La cantidad de hierro que resulta se comprende, porque la determinación se ha hecho con el sedimento del agua y lavando la botella con agua acidulada con ácido nítrico para disolver la parte adherida á las paredes.

En el agua clara, sin el sedimento, la cantidad de hierro es pequeña y se halla, según creo, en estado de hidrato férrico coloide ó de carbonato férrico ácido.

Ión aluminio Al^3.

El líquido anterior, en que se precipitó el sulfuro de hierro procedente de 475 centímetros cúbicos de agua mineral después de filtrado, se evaporó hasta sequedad, agregando previamente carbonato de sodio y nitro puro. El producto se calcinó hasta que quedó blanco, y después de frío se disolvió en ácido clorhídrico y agua. A esta disolución se añadió amoníaco en exceso y se dejó hasta el día siguiente. El precipitado, formado de hidrato de alúmina, después de lavado sobre un filtro, desecado é incinerado con el filtro, pesó, descontadas las cenizas de éste, 0,04389 gramos, en donde hay

0,02327 gramos del *ión aluminio,* y para un litro de agua mineral, 0,049 gramos.

El líquido amoniacal, de donde se separó la alúmina, no formó precipitado con la mixtura magnesiana, lo que demuestra que no existía el *ión fosfórico.* Además, la alúmina obtenida se disolvió en ácido clorhídrico, añadiendo ácido cítrico y después amoníaco en exceso, y tampoco dió precipitado de fosfato con la mixtura magnesiana.

Esto se halla conforme con lo dicho en el análisis cualitativo, que no aparecieron fosfatos con el molibdato amónico, ó á lo más indicios.

Ión nitroso NO^2.

Demostrada la existencia de nitritos por el análisis cualitativo, queda por averiguar si hay además nitratos, puesto que algunas reacciones de éstos son las mismas que las de aquéllos, como la coloración roja con la brucina y ácido sulfúrico y la coloración amarilla con el ácido fénico y ácido sulfúrico, añadiendo después amoníaco. Ambas reacciones las da el agua mineral evaporada.

Para ver si además de los nitritos hay nitratos, se añadieron á 100 centímetros cúbicos de agua 20 gotas de ácido sulfúrico puro; se hirvió el líquido durante diez minutos, y éste no dió después señales de contener nitratos.

También se empleó el procedimiento de Peccini, destruyendo los nitritos, contenidos en el agua, por medio de una solución de urea en ácido acético, y el producto de la evaporación no dió coloración con la brucina y ácido sulfúrico, ni con el sulfato ferroso y dicho ácido.

La cantidad de nitritos se determinó por el procedimiento de Tromsdorff, por colorimetría, y resultó 0,016 gramos en litro de agua mineral. Suponiendo que el nitrito sea de calcio, como después se dirá, el *ión nitroso* NO^2 correspondiente es 0,0073 gramos.

La formación de los nitritos se explica por oxidación de la materia orgánica del agua, mediante la influencia de fermentos especiales del terreno, y de este modo el agua experimenta una depuración; lo cual se halla conforme con el resultado de no contener apenas materias orgánicas, ni tampoco oxígeno entre los gases disueltos.

Ión calcio *Ca*.

50 centímetros cúbicos de agua mineral, bastante acidulada con ácido clorhídrico, y después de separar la alúmina y óxido de hierro por amoniaco en exceso, se añadió cloruro amónico y oxalato amónico y se dejó hasta el día siguiente. El precipitado, formado de oxalato de calcio, se recogió sobre un filtro, se lavó, desecó y después se incineró con el filtro, añadiendo al producto algunas gotas de ácido sulfúrico diluído para transformar el carbonato de calcio en sulfato. Se calentó fuertemente para desalojar el exceso de ácido y pesó después de frío el sulfato de calcio, descontadas las cenizas del filtro, 0,11089 gram., donde hay 0,03262 del *ión calcio*, y para un litro de agua mineral, 0,6524 gram.

Ión magnesio *Mg*.

El líquido anterior, despues de separado el calcio (procedente de 50 centímetros cúbicos de agua mineral), se trató con fosfato sódico amónico, dejándolo hasta el día siguiente. El precipitado formado se recogió en un filtro, se lavó con agua amoniacal, y después de seco se incineró con el filtro, pesando, descontadas las cenizas, el pirofosfato de magnesio $Ph^2O^7Mg^2$, 0,016429 gram., en donde hay 0,003594 de magnesio, y para un litro de agua mineral, 0,07188 gram. del *ión magnesio*.

Ión litio *Li.*

Dadas las dificultades que hay para la determinación del litio, pensé el siguiente procedimiento, teniendo en cuenta la composición de estas aguas:

480 centímetros cúbicos de agua mineral, contenida en una botella, se aciduló con bastante ácido clorhídrico y se evaporó en una cápsula de porcelana hasta casi sequedad. El producto se trató con una mezcla de alcohol anhidro y éter, filtrando el líquido y dejándole evaporar espontáneamente. El residuo de la evaporación se trató con ácido sulfúrico diluído y se calentó en una capsulita para convertir en sulfatos los cloruros de sodio, de calcio y de litio, que se disolvieron en la mezcla de alcohol y éter. El producto se trató con nueva mezcla de estos dos líquidos, que sólo disuelve el sulfato de litio, quedando éste por evaporación, y después de calentado, pesó 0,01 gram. de SO^4Li^2, donde hay 0,00127 del *ión litio*, y para un litro de agua mineral, 0,00264 gram.

Después de pesado se vió, con el espectroscopio, la raya roja característica del litio.

Ión sodio *Na.*

50 centímetros cúbicos de agua mineral se trataron con amoníaco y carbonato amónico, hirviendo el líquido hasta precipitar todo el calcio y magnesio. El líquido, después de frío, y añadiendo nueva cantidad de amoníaco, se evaporó hasta sequedad, calentando el residuo con cuidado hasta desalojar las sales amoniacales. Después de frío, se disolvió el producto en agua destilada, se filtró el líquido y se evaporó hasta sequedad, pesando el producto 0,272 gramos de $Na\ Cl$ y $SO^4\ Na^2$. Después se añadieron algunas gotas de ácido sulfúrico para convertir todo en sulfato de sodio, y se calentó fuertemente hasta desalojar el exceso de ácido,

pesando 0,382 gramos, en donde hay 0,12389 del *ión sodio*, y para un litro, 2,478 gramos.

De esta cantidad hay que rebajar 0,029 gramos de potasio, resultando 2,449 de sodio por litro de agua mineral.

Con el espectroscopio se vió la existencia del potasio en el sulfato de sodio obtenido.

Ión potasio *K*.

100 centímetros cúbicos de agua mineral se evaporaron á sequedad, y el producto se calentó con algunas gotas de ácido sulfúrico para descomponer los nitritos, y después se disolvió en ácido clorhídrico diluído, filtrando el líquido para separar la sílice. Al líquido filtrado se añadió cloruro de bario hasta precipitar los sulfatos y exceso de ácido sulfúrico, filtrando el líquido, y á éste se agregó amoníaco en exceso y carbonato amónico calentado para precipitar el calcio, el magnesio y bario. Después de frío, se filtró el líquido y evaporó, calentando fuertemente el residuo para eliminar las sales amoniacales. El producto se disolvió en agua destilada, se filtró y evaporó en la estufa de aire á 120°, resultando 0,51 gramos de $NaCl$ y KCl.

Para determinar el potasio se disolvió la mezcla de los dos cloruros en agua destilada y se trató con cloruro platínico ácido. El precipitado formado al día siguiente se recogió sobre dos filtros juntos de igual peso, lavándole con alcohol; después se desecó en la estufa, pesando el $Pt\,Cl^4$, $2\,KCl$ 0,018 gramos, en donde hay 0,0029 del *ión potasio*, y para un litro de agua mineral, 0,029 gramos.

Materia orgánica.

Determinada por el permanganato potásico en medio ácido, ha resultado 2 miligramos en litro de agua mineral, cantidad muy pequeña, como en las mejores aguas potables.

Esto se halla conforme con lo dicho al tratar del residuo

fijo de la evaporación del agua mineral, que no se ennegreció por la acción del calor, y también con el resultado del análisis microscópico y bacteriológico.

Análisis bacteriológico.

Se hicieron dos cultivos, en agar peptonizado ó gelosa nutritiva (1), poniendo dos gotas de agua mineral, con la pipeta graduada, en dicha gelosa licuada y después de fría. Bien mezclado, se puso el líquido en una placa de cristal (caja de Petri), previamente esterilizada y cubierta con su tapadera; se dejó en la estufa, sin aplicar calor, porque la temperatura del laboratorio era de 22° cuando se hizo la operación á fines del mes de Junio. Al cabo de seis días dejaron de aparecer manchas ó colonias, y contadas éstas haciendo uso del contador de Wolfthügel, y calculando para un centímetro cúbico de agua mineral, resultaron 200 bacterias completamente inofensivas, número escaso que sólo se encuentra en las buenas aguas potables; y posible es que el número sea menor al salir el agua del manantial, puesto que los cultivos se hicieron con el agua embotellada y probablemente las bacterias halladas serán muchas del aire.

Radioactividad.

Esta notable propiedad, que hoy se considera como general de la materia, aunque con intensidad distinta, que permite llamar radioactivos á unos cuerpos y á otros no, se presenta en muchas aguas minerales (2), á las que se atri-

---

(1) Véase *Análisis, de las Aguas potables, químico y bacteriológico,* por D. Gabriel de la Puerta, pág. 29.

(2) Véase *El Mapa de la radioactividad hidromineromedicinal de España* y otras publicaciones del mismo asunto, por el Dr. Don José Muñoz del Castillo.

buye cierta acción terapéutica, especialmente á las aguas poco mineralizadas y termales.

En el agua de Carraclaca de que tratamos, como su mineralización es abundante y contiene cuerpos de propiedades terapéuticas tan marcadas, no hay necesidad de recurrir á la acción, hasta ahora misteriosa, de la radioactividad de las aguas.

Los experimentos los hemos hecho con el electroscopio de Curie que existe en mi laboratorio de Química Inorgánica de la Facultad de Farmacia, con agua después de tres días de recogida en el manantial. Se colocó en un vaso de poca altura, entre los platillos del electroscopio, después de cargado éste, observando con un cronómetro el tiempo de descenso de la lámina de aluminio, en comparación con el óxido verde de urano, resultando lo que sigue:

Con el óxido de urano recorrió la lámina de aluminio 10 divisiones en 14″.

Con el agua mineral tardó en recorrer las 10 divisiones 4′ y 50″, ó sean 290″.

Tendremos:

$$\frac{14}{290} = 0{,}048.$$

La radioactividad de esta agua es, por tanto, en relación con el óxido de urano, 0,048, que, como se ve, es bastante débil, poco más que la que da el aire en el aparato.

Aunque el agua estaba recogida hacía tres días, es posible que al salir del manantial sea algo más radioactiva, pues sabido es que la radioactividad se extingue poco á poco en el agua embotellada.

Este procedimiento no es tan exacto como el del fontaktoscopio de Engler y Sieveking, que da el número de voltios por litro y hora, con el cual nos proponemos hacer nueva determinación con agua recogida en buenas condiciones.

Crioscopia.

Se determinó el punto de congelación del agua mineral por medio del crioscopio de Claude y Balthazard, y resultó — 0,44.

El descenso crioscópico se halla en relación de la cantidad de los cuerpos disueltos y de sus iones, y así se explica el considerable descenso de esta agua, cuya mineralización es grande, y también su ionización, demostrada por la conductibilidad eléctrica.

La presión osmótica, por una parte, de los cuerpos disueltos, y por otra la carga eléctrica de los iones, nos dicen que el agua de Carraclaca goza de gran energía cinética, que indudablemente ha de influir en sus notables propiedades medicinales.

Por la crioscopia se puede contar el número de moléculas-gramos de los cuerpos que existen disueltos en un litro de agua, ó sea la concentración molecular del agua. En el caso presente, tendremos para un litro de agua mineral:

$$N = \frac{0,44}{1,85} = 0,243.$$

También se puede medir la presión osmótica, ó sea la presión que ejercen las moléculas de los cuerpos disueltos, análoga á la de los gases, según demostró Vant'Hoff. Dicha presión es igual al número de moléculas multiplicado por 22,35.

Siendo la concentración molecular de esta agua 0,243, cerca de la cuarta parte de una moléculagramo, la presión osmótica á 0° será igual á 0,243 $\times$ 22,35, ó sean 5,43 atmósferas por litro.

Para hallar la presión osmótica á 20°, que es la temperatura del agua en el manantial, hay que añadir el producto de

multiplicar el número de atmósferas hallado 5,43 por el coeficiente de aumento de la presión osmótica con la temperatura, que es el mismo de los gases, esto es, 0,00367, y resulta 5,43 $\times$ 0,00367 $\times$ por 20 = 0,398, cuyo número, sumado á 5,43, da una presión de 5,828 atmósferas.

Ebulloscopia.

El agua mineral de Carraclaca hierve á la temperatura de 98°,4 á la presión de 710 milímetros (28 de Julio de 1907 en Madrid).

A la misma presión, en el mismo momento, el agua destilada pura hierve á 97°,8, de modo que resulta un ascenso para el agua, objeto de este análisis, de 0,6, y al nivel del mar (760 milímetros) hervirá á 100°,6.

Como el ascenso en el punto de ebullición es proporcional á la cantidad de cuerpos disueltos en el agua mineral, se pueden hacer deducciones análogas á las del descenso crioscópico de la misma agua.

Conductibilidad eléctrica.

Tiene gran importancia este estudio físico de las aguas minerales, porque indica el estado de ionización en que se encuentran los cuerpos electrolitos en ellas disueltos, y por tanto su actividad.

También tiene importancia, porque la menor variación en la composición del agua mineral se revela por la conductibilidad, constituyendo ésta un medio precioso para averiguar si un agua mineral ha experimentado alguna variación.

Nos hemos servido para esta determinación del aparato de Kohlrausch, que tiene en el Laboratorio de la Facultad de Ciencias nuestro colega Sr. Muñoz del Castillo, hábilmente manejado por el profesor auxiliar Sr. Morales Chofré.

El número hallado en el puente de Kohlrausch fué 661,6 = a.

La resistencia empleada es 100 ohmios = R.

La resistencia del líquido, expresada en ohmios, es

$$x = R \frac{a}{1000 - a} = 100 \frac{661,6}{338,4} = 195,508.$$

Constante de capacidad del vaso empleado, previamente determinada mediante una solución normal de cloruro potásico puro, cuya conductibilidad específica, á la temperatura que se opera de 25°, es 0,1118 . K = 2,5725.

Resulta:

Resistencia específica del agua $= \frac{x}{K} = \frac{195,508}{2,5725} = 75,999.$

Estando en razón inversa la conductibilidad de la resistencia, tendremos:

Conductibilidad específica $= \frac{1}{75,999} = 0,013158$ (1).

La conductibilidad del agua de Carraclaca se halla, por tanto, representada por 0,013158, cuya cifra expresa el grado de ionización de esta agua, mucho mayor que el de otras aguas minerales.

La conductibilidad eléctrica es proporcional al número de iones disociados, á sus velocidades y á sus cargas, y las acciones químicas y medicinales de un agua mineral dependen principalmente de la concentración iónica ó sea del número de iones libres ó disociados en un volumen dado.

Iones que existen en un litro de agua mineral, según los trabajos analíticos anteriores.

Los iones encontrados por el análisis han sido los siguientes, en gramos, por litro de agua.

---

(1) Véase *Mesures physico-chimiques,* por W. Ostwald et R. Luther.

IONES NEGATIVOS (ANIONES)	Gramos.
Ión carbónico CO^3	1,92950
— sulfúrico SO^4	1,70110
— cloro Cl	3,05520
— silícico SiO^3	0,13620
— nitroso NO^2	0,00730
IONES POSITIVOS (CATIONES)	
Ión hierro Fe	0,04827
— aluminio Al^2	0,04900
— calcio Ca	0,65240
— magnesio Mg	0,07188
— litio Li	0,00264
— sodio Na	2,44900
— potasio K	0,02900
— hidrógeno H	0,04566
TOTAL	10,17715

Agrupación de iones y sales resultantes.

Por Real orden de 7 de Junio de 1906 se dispone que los resultados del análisis de las aguas minerales se expresen con arreglo á la teoría de los iones. Está bien; pero creemos que no se debe prescindir de agrupar los iones hallados para conocer las sales existentes en el agua, como hacíamos antes en la agrupación de ácidos y bases; pues de este modo se puede formar mejor juicio acerca de la composición del agua y de sus propiedades medicinales. Es verdad que algunas sales hay que admitirlas hipotéticamente; pero otras, generalmente las que caracterizan al agua mineral, no suele haber duda de su existencia, aunque se hallen más ó menos ionizadas.

En la presente agua no puede dudarse que existe ácido carbónico libre, puesto que se ve desprenderse su anhidrido, ni que el agua contiene bicarbonato de calcio, bicarbonato ferroso y cloruro de sodio, bastando para este último

el sabor salado del agua, por contener bastante de dicha sal.

Atendiendo á las reacciones obtenidas en el análisis, especialmente en el agua evaporada y filtrada y en el precipitado resultante, así como á las observaciones espectroscópicas y el orden de afinidades, se pueden decir cuáles son las sales que existen en el agua, aunque no todas con seguridad.

Teniendo esto presente, y haciendo los cálculos correspondientes, resultan las siguientes en un litro de agua.

	Gramos.
Acido carbónico libre CO^3H^2	0,83658
Bicarbonato de calcio $(CO^3)^2 Ca H^2$	1,34038
— de hierro $(CO^3)^2 FeH^2$	0,10515
— de litio $CO^3 Li H$	0,02567
Cloruro de sodio $NaCl$	4,99820
— de potasio KCl	0,05577
Sulfato de sodio $SO^4 Na^2$	1,39894
— de calcio $SO^4 Ca$	0,85868
— de magnesio $SO^4 Mg$	0,35930
Sílice SiO^2	0,10510
Alúmina $Al^2 O^3$	0,09240
Nitritos	0,01600
Materia orgánica	0,00200
TOTAL	10,19417

Las cantidades que se expresan sólo deben admitirse como aproximadas, porque en la agrupación de los iones puede haber arbitrariedad respecto de algunas sales que se admiten hipotéticamente. De aquí el que no haya completa concordancia entre las cantidades de sales admitidas y las de los iones, en los cuales hay más exactitud, porque es el resultado directo del análisis cuantitativo.

El aluminio puede estar formando sulfato y la sílice es posible se halle en estado de hidrato coloide, y en la incertidumbre hemos puesto en el cuadro anterior silice y alúmina, sin hacer agrupamiento ninguno del ión aluminio y del ión silícico.

El bicarbonato ferroso ya hemos dicho anteriormente que se descompone después de recoger el agua, precipitándose hidrato férrico y quedando en el agua clara poco hierro en estado de hidrato férrico coloide ó carbonato férrico ácido.

Respecto de los nitritos, también hemos indicado que debe ser de calcio ó un nitrito alcalino, pero no de amonio, porque este ión no se ha encontrado en el análisis. Nos inclinamos más á que sea nitrito de calcio, por la facilidad de descomponerse el carbonato de calcio que abunda en estas aguas.

La formación de nitritos nos la explicamos, como se dijo anteriormente, por la oxidación de materias azoadas del terreno por donde pasa el agua mineral, mediante la influencia de fermentos especiales, sin llegar á formarse nitratos.

Resumen general del análisis del agua mineromedicinal de Carraclaca (Lorca).

Temperatura en el manantial.....	20° centígrados.	
Altura sobre el nivel del mar.....	370 metros.	
Aforo: 21.600 litros de agua en veinticuatro horas.		
Densidad del agua.....	1,0065	
Crioscopia.....	— 0,44	
Presión osmótica.....	5,828	atmósferas.
Conductibilidad eléctrica.....	0,013158	
Bacterias inofensivas en centímetro cúbico del agua embotellada.....	200	

GASES DESPRENDIDOS POR LA EBULLICIÓN DE UN LITRO DE AGUA	Cent. cúb.	Gramos.
Anhidrido carbónico CO^2, hecha la corrección.	509	1,0063

NÚMERO DE IONESMILIGRAMOS CONTENIDOS EN UN LITRO DE AGUA

1.930	iones carbónicos CO^3.
1.701	— sulfúricos SO^4.
3.055	— de cloro Cl.
136	— silícicos SiO^2.
7	— nitrosos NO^2.
48	— ferrosos Fe.
49	— de aluminio Al^2.
652	— de calcio Ca.
72	— de magnesio Mg.
3	— de litio Li.
2.449	— de sodio Na.
29	— de potasio K.
46	— de hidrógeno H.
10.177	ionesmiligramos.

Clasificación de estas aguas.

Atendiendo á los principales cuerpos mineralizadores y á su estudio físico, resulta que son *aguas carbónicas, bicarbonatadocálcicas, ferruginosas* y, además, *cloruradosódicas*, de *gran energía cinética* y *muy ionizadas*.

Se parecen á las de Lanjarón, siendo muchas y variadas sus aplicaciones medicinales, según puede verse en la Memoria del Dr. D. Joaquín Jimeno.

IV.—Teoría química de la inhibición fisiológica.

POR JOSÉ R. CARRACIDO.

Para exponer el asunto enunciado en el epígrafe creo necesario fijar de una manera precisa el concepto de la *inhibición fisiológica.*

Por semejanzas sólo aparentes se suelen considerar como actos inhibitorios todos aquellos en que hay detenimiento funcional, sean cualesquiera las causas que lo produzcan y las transformaciones fisicoquímicas de la materia viva que coincidan en aquella común manifestación; pero el análisis rigurosamente científico exige el discernimiento de los diferentes motivos de la parada del curso funcional, porque á ellos debe ajustarse la explicación correspondiente á cada caso.

La anestesia clorofórmica, la anoxihemia producida por el óxido de carbono y por los metahemoglobinizantes y la inhibición del miocardio por las sales potásicas son acciones de igual apariencia, pero los mecanismos que en la intimidad de los tejidos las originan son muy diferentes. Por una ampliación injustificada, y perjudicial para el escrupuloso conocimiento de los fenómenos biológicos, denomínase inhibición toda intoxicación de efectos paralizantes; pero es menester advertir, que si la primera puede suponerse originada por una intoxicación, no debe conceptuarse como inhibición todo detenimiento funcional producido por intoxicación de efectos paralizantes, como ya hubo de advertir el eminente profesor Julio Fano en su lección inaugural del curso de Fisiología del Instituto de Estudios Superiores de Florencia (1).

---

(1) La Physiologie dans ses rapports avec la Chimie et avec la morphologie, *Rev. Scientif*, 1894. - II, pág. 257.

Acontece en el lenguaje fisiológico lo que ha acontecido en el químico con la palabra *disociación*, cuando erróneamente se hizo sinónima de descomposición. Y pongo este ejemplo, no sólo por su semejanza con el punto que me propongo esclarecer, sino también porque se ha de utilizar más adelante como uno de los términos de nuestro razonamiento, y es provechoso recordar su significado preciso.

Disociación es tan sólo la *descomposición limitada* por acciones inversas, las cuales en cierto momento estatuyen un equilibrio químico determinado por la igualdad de la acción descomponente y de la recomponente.

Calentando oxalato argéntico se descompone de la manera sencilla que la siguiente ecuación expresa:

$$C^2\,Ag^2\,O^4 = Ag^2 + 2\,CO^2.$$

Esta descomposición no es disociación, porque una vez iniciada en las condiciones físicas necesarias, llega á su término sin dejar residuo alguno de oxalato. Es una descomposición *ilimitada*.

En cambio, sometiendo el oxalato de etilo en condiciones adecuadas á la acción del agua, aunque se hidroliza regenerándose los cuerpos que concurrieron á formar el éter ó *ester*, como hoy se denomina á todo éter de oxácido,

$$\underset{\text{Oxalato de etilo.}}{C^2\,(C^2\,H^5)^2\,O^4} + 2\,H^2\,O = \underset{\text{Ac. oxálico.}}{C^2\,H^2\,O^4} + \underset{\text{Alcohol etílico.}}{2\,C^2\,H^6\,O},$$

esta hidrólisis es parcial, porque llega un momento en que el poder descomponente del agua está contrarrestado por el eterificante del ácido y el alcohol, y la descomposición resulta entonces *limitada*, y, por consiguiente, *reversible*, variando adecuadamente las condiciones.

Sólo este género de descomposición limitada y rever-

sible es el correspondiente al concepto de la *disociación química.*

Procediendo con igual escrupulosidad, sólo debe estimarse como inhibición fisiológica la detención de actos funcionales motivada por acciones antagónicas de las que normalmente los producen.

Este fenómeno se presenta muy manifiesto en los organismos en ciertos casos naturales, y en otros provocados artificialmente; pero es constante en el proceso de la vida, y sólo por su corta duración pasa inadvertido á quien no emplee los medios necesarios para observarlo.

La actividad vital es consecuencia de una desintegración química á la que sigue rapidísimamente la reparación de la materia desintegrada, suspendiéndose entonces el trabajo fisiológico, porque la energía disponible se invierte en la obra sintética de la reparación material. El momento catabólico es el de trabajo, y el anabólico el de reposo ó de *inhibición fisiológica*, sucediéndose uno á otro rítmica y automáticamente.

Para proseguir nuestro razonamiento es indispensable dejar bien sentado, que desde el punto de vista químico, el proceso funcional de todo ser organizado, y en último término el de la célula, se reduce á dos momentos, que no obstante su aparente antagonismo, están solidariamente coordinados, resultando cada uno como consecuencia de su antecesor.

El momento activo, que se revela por el desprendimiento de calor y de electricidad, ó por la producción de trabajo mecánico, y también por la elaboración de las secreciones efectuada por la actividad glandular, es el momento destructor, analítico ó catabólico, en el cual por desintegración de materia, se pone en libertad la energía generadora de la multiforme variedad de los trabajos fisiológicos.

El momento de reposo es el reconstructor, el sintético ó anabólico, en el cual se acumula en las células, formando

compuestos lábiles, muy ricos en energía cinética, la materia que ha de sufragar los gastos dinámicos é histológicos de los organismos.

*
* *

Es axioma biológico que la función desarrolla el órgano, y como corolario suyo, es forzoso admitir que el acrecentamiento de la materia organizada se lleva á cabo porque los productos catabólicos son estimulantes del anabolismo; si así no fuese, dicho desarrollo sería imposible.

Sabido es que los músculos y las glándulas en prolongado reposo van decreciendo hasta el límite de la atrofia, al contrario de lo que sucede en un activo ejercicio, en el cual se hipertrofian, siempre que no se llegue al extremo de la fatiga. Las cenizas normales determinan la reparación con usura de la materia desintegrada, mientras que las anormales del *surmenage* determinan la histolisis por intoxicación de las células.

Según experimentos de Chabrié (1), perros recién nacidos, alimentados con una comida de la cual formaba parte leche mezclada con algunos centímetros cúbicos de la siguiente disolución:

Cloruro amónico.....	100 gramos
Bicarbonato sódico.....	10 ídem
Agua hasta formar.....	1 litro,

crecieron más que gemelos suyos á los cuales fué administrada idéntica comida, pero sin la disolución sodoamónica. Esta, en el interior del organismo, se transforma, parcialmente, en urea, y al aumentar la proporción del producto más importante del catabolismo de los albuminoides, pro-

(1) *Ann. Chim. et Physiq.* (7me).—III, pág. 524.

mueve la actividad trófica que se revela en el mayor crecimiento.

Es frecuente que los niños, en el curso de procesos febriles, crezcan en proporciones extraordinarias, y teniendo en cuenta que en la fiebre hay una exagerada destrucción de las materias proteicas, al gran aumento de los productos catabólicos es al que deben atribuirse las proporciones extraordinarias del fenómeno. En este caso, las ideas precedentes inducen á suponer, que los cuerpos tóxicos resultantes del catabolismo anormal, no sólo no alcanzan á producir la acción paralizante (no inhibitoria), sino que no llegan á contrarrestar el mayor estímulo correspondiente al incremento de los valores del proceso catabólico, cuyo influjo es ejercido en relación á sus variaciones cuantitativas.

Y hasta en los vegetales se explica, como consecuencia de actos inhibitorios, la limitación en el crecimiento de los órganos y en su diferenciación histológica cuando están asociados en el conjunto de la planta, limitación que desaparece en las ramas desgajadas y metidas en tierra húmeda, por haber desaparecido las acciones antagónicas, resultantes de la dependencia mutua de los diferentes órganos (1).

Pero siendo el ritmo cardíaco el fenómeno que más especialmente ha sido objeto de estudio para el esclarecimiento del mecanismo de la inhibición fisiológica, conviene examinarlo con la debida atención para llevar su valioso testimonio al apoyo de nuestra tesis.

En el proceso funcional del miocardio, la fase de diástole corresponde á la reintegración química de la substancia muscular, y la de sístole á la desintegración productora de la energía que ha de substentar el trabajo del órgano. Una y otra fase son las que respectivamente corresponden al anabolismo y al catabolismo del músculo cardíaco.

---

(1) *Principes de Botanique*, par R. Chodat.—Geneve, 1907.—página 363.

Creo que en la actualidad es más severamente científica la doctrina *miógena* que la *neurógena* de la actividad rítmica del corazón. Los nervios diastólicos, realmente no desempeñan su papel por acción inmediata, sino determinando el proceso anabólico de la materia miocárdica y por igual mecanismo, aunque en sentido inverso, desempeñan su papel los nervios sistólicos.

Sabido es que estimulando el neumogástrico (nervio diastólico) se producen fenómenos de inhibición en el miocardio, durante los cuales, según demostraron hasta la evidencia Gaskell y Fano, es más activa la integración material en dicho órgano. El mismo resultado obtuvieron Bottazzi (1) y otros investigadores al experimentar, mediante irrigaciones artificiales, la acción de las sales potásicas sobre el corazón aislado, haciendo notar que este género de sales es uno de los productos de desintegración del miocardio.

Tanto Fano como Bottazzi aplicaron su gran sagacidad á poner de manifiesto que en la inhibición producida, ya por el estímulo del neumogástrico, ya por los compuestos potásicos, ciertamente no se observa otra cosa que la exageración de un proceso que se desarrolla de manera rítmica y automática en condiciones ordinarias en el interior de las células miocárdicas.

El fenómeno inhibitorio aparece en último análisis como un aumento en la duración de la pausa fisiológica correspondiente al acto anabólico.

***

El gran desarrollo dado actualmente á los estudios de la Física y de la Química biológicas ha inducido á los investigadores á penetrar en el campo de la vida, no como los

(1) *Archives de Physiologie,* 1896, pág. 882.

antiguos naturalistas, que se limitaban á observar la obra de la Naturaleza respetando la espontaneidad de su producción, sino como hombres de laboratorio que modifican intencionadamente el proceso de los fenómenos naturales y hasta determinan su aparición.

Según este nuevo criterio, ya no puede satisfacerse el biólogo con el conocimiento de los hechos; debe extender sus pesquisas á la intimidad de los mecanismos en que aquéllos se originan, y movido por tal exigencia intentaré dar una explicación *puramente química* del papel estimulante que desempeñan los productos catabólicos en el curso de los actos tróficos y en el acrecentamiento de su período dentro del ritmo fisiológico, ó, lo que es igual, en el determinismo de los fenómenos inhibitorios.

Al encadenamiento solidario de la destrucción y de la reconstrucción de la materia viva es al que Max Verworn ha dado el nombre de *biotono* (1), expresado sus valores en cada caso por los de los respectivos cambios materiales; y teniendo en cuenta que pertenecen al género de las *limitadas* las reacciones fundamentales de los procedimientos bioquímicos, en el desarrollo de éstos habrán de constituirse *equilibrios químicos* que limiten la amplitud de las oscilaciones de los valores del biotono en la alternación de los momentos catabólico y anabólico, de igual manera que las cantidades de los cuerpos resultantes de la disociación de un compuesto invierten la marcha del fenómeno determinando la regeneración de la materia disociada cuando aquéllas superan á las estrictamente indispensables para el mantenimiento del equilibrio químico.

En el ejemplo clásico de la disociación del carbonato cálcico (CO^3Ca) en cal (CaO) y en anhídrido carbónico (CO^2), las cantidades de los componentes aislados son las que ponen en cada grado de la escala de las temperaturas el

(1) *Allgemeine Physiologie*, 4.ª Aufl., 519.

límite á la disociación en vasija cerrada, y apenas visto este hecho, el criterio de analogía compele á suponer que los productos catabólicos suspenden el catabolismo de las materias de que proceden, en el caso de ser excesiva su producción, porque siendo más laborioso el arrastre de aquéllos por la corriente sanguínea, resulta más persistente la atmósfera constituída por los cuerpos disociados y hace más duradero el momento estático del equilibrio químico.

Si para cierto grado de disociación del carbonato cálcico (siempre en vasija cerrada) se inyecta desde fuera gas carbónico, se irá regenerando progresivamente el carbonato hasta el límite de la regeneración total, en el caso de que la cantidad de gas inyectada sea la necesaria para contrarrestar la tensión de disociación. La cal no establece diferencias entre el anhídrido carbónico con que anteriormente estaba combinada, y el que la rodea procedente del exterior.

Siendo el potasio uno de los productos catabólicos de la materia del miocardio, su persistencia en el lugar en que se desprende como resultado de una disociación bioquímica, ha de suspender, mientras la corriente sanguínea no lo arrastre, el curso del proceso analítico, y añadiendo potasio, como en el experimento de Bottazzi, el período de suspensión será más largo, porque su eliminación será más laboriosa, y no hay motivo alguno para que la materia de las células miocárdicas establezca diferencias entre el potasio resultante de su disociación, y el que la rodea procedente del exterior.

Desde este punto de vista, los fenómenos inhibitorios se reducen á suspensiones ó á retrogradaciones del proceso de disociación de la materia viva, generador del trabajo fisiológico, como consecuencia de un aumento de cualquiera de los términos resultantes de dicho proceso (la urea, en el experimento de Chabrié, y el potasio, en el de Bottazzi), acrecentando las proporciones de la síntesis anabólica.

Según el citado Max Verworn, el *biógeno,* ó sea la molécula de la materia viva, sólo se descompone parcialmente

en el curso del trabajo fisiológico, regenerándose sobre la base del resto fijo de su descomposición (como el carbonato cálcico sobre la base de la cal, siempre que las condiciones físicas le permiten fijar el gas carbónico), y la regeneración, según la doctrina de los equilibrios químicos correlativos á las reacciones limitadas, es favorecida por la presencia de los cuerpos separados por disociación.

El desprendimiento del gas carbónico por la acción del ácido sulfúrico sobre el carbonato cálcico, transformándolo en sulfato, es un proceso *no reversible* comparable á las acciones paralizantes producidas por intoxicación, las cuales son diversas de los fenómenos de inhibición, como lo es de los fenómenos de disociación el expresado modo de descomponerse el carbonato cálcico por el ácido sulfúrico. Los productos de un catabolismo anormal, no sólo por la cantidad, sino también por la calidad — como los de la autointoxicación por fatiga, ó por alteraciones patológicas, ó por envenamiento exógeno, que coagulan el protoplasma ó transforman sus lábiles albuminoides en cuerpos no disociables por las acciones físicoquímicas del proceso fisiológico —son los que constituyen substancias comparables al sulfato cálcico del ejemplo precedente, cuya formación determina efectos paralizantes, pero no inhibitorios.

Como ejemplo de la evolución del criterio fisiológico, merecen ser citadas las sucesivas explicaciones del fenómeno de la inhibición.

Cuando en el año 1846, los hermanos Weber descubrieron que, excitando el neumogástrico por un estímulo suficientemente enérgico el corazón suspende sus funciones hasta que la excitación cesa ó la inervación se ha agotado, hubo entonces de imaginarse una vibración nerviosa elaborada en algunos ganglios interiores del corazón, la cual neutralizaba la actividad de las células excitomotoras.

Esta primera explicación revistió después carácter exclusivamente físico, presentándola como caso particular de los

fenómenos de interferencia; y Lauder-Brunton, en 1883, suponía que las vibraciones nerviosas se dividen en dos ramas de desigual longitud, reuniéndose nuevamente en una sola, en la que las ondas antes bifurcadas se encuentran en fases opuestas, anulándose como las dos ondas luminosas cuya diferencia de velocidad es una semionda que al chocar producen un punto oscuro. Y, según esta teoría, la misma célula puede desempeñar funciones inhibitorias ó excitomotoras, conforme á la manera y á las circunstancias en que se propaguen sus ondas de impulsión.

La crítica de los hechos invalidó esta hipótesis, la cual fué sustituída por la teoría química cimentada en la correlación de la fase catabólica y anabólica de las mutaciones materiales en el seno de los elementos organizados.

Aceptado este nuevo concepto, deben aceptarse también sus lógicas consecuencias, entre las cuales propongo que se coloque en primer término, la admisión de equilibrios químicos en el proceso de las reacciones limitadas correspodientes á los cambios materiales de los organismos; y á la manera que la saturación del ambiente de vapor acuoso impide que el agua líquida se evapore, y que el carbonato cálcico se disocie cuando en su ambiente alcanza cierto grado de tensión el anhídrido carbónico, y que el glucógeno hepático y muscular se hidrolicen cuando existe en la sangre cierta proporción de glucosa, la materia del miocardio no puede descomponerse mientras la envuelven los productos de su descomposición, y en este momento, se producirá el fenómeno de la inhibición por haberse suspendido el proceso analítico ó catabólico del cual resulta la energía generadora del trabajo fisiológico.

Desde este punto de vista, el fenómeno de la inhibición redúcese á un cambio más ó menos fugaz en el desarrollo de la curva que representa la disociación de la materia viva.

V.— Nueva teoría para el desarrollo de las ecuaciones finales.

POR GUALTERIO M. SECO.

SEGUNDA PARTE

Bases para una teoría de la conjugación.

I

Definiciones.

Una matriz cuadrada cualquiera,

$$\begin{matrix} a^1{}_1\, a^2{}_1\, a^3{}_1 & a_1\, b_1\, c_1 \\ a^1{}_2\, a^2{}_2\, a^3{}_2 & a_2\, b_2\, c_2 \\ a^1{}_3\, a^2{}_3\, a^3{}_3 & a_3\, b_3\, c_3 \end{matrix}$$

cuyos elementos sean susceptibles de tomar todos los valores posibles, estén ó no estén ligados entre sí por determinadas relaciones, podrá recibir el nombre de *matriz general de su grado.*

La designaremos con el de matriz de repetición de ecuaciones, ó, sencillamente, *matriz de repetición,* cuando proceda de un cuadro generador formado con m ecuaciones idénticas, de m términos cada una, multiplicados, ó no, por las potencias sucesivas de una letra p, ordenatriz. Por ejemplo (siendo $p^3 = p^m = k$):

$$\left|\begin{matrix} y + ap + bp^2 = 0 \\ yp + ap^2 + bp^3 = 0 \\ yp^2 + ap^3 + bp^4 = 0 \end{matrix}\right| \qquad \left|\begin{matrix} y & a & b \\ bk & y & a \\ ak & bk & y \end{matrix}\right|$$

Cuando nos convenga, para mayor mayor sencillez, representaremos, con un subíndice, el exponente de p; y hasta suprimiremos el subíndice, supuesto que podremos restablecer p y sus potencias, teniendo en cuenta que el subíndice es igual al número de orden alfabético, multiplicado por el exponente de la letra respectiva, en la coordinación $abcd$ ..... Así, tendremos

$$ap + bp^2 + \ldots\ldots = a_1 + b_2 + \ldots\ldots = a + b + \ldots\ldots$$

$$a^2 p^2 + b^2 p^4 + \ldots\ldots = a^2_2 + b^2_4 + \ldots\ldots = a^2 + b^2 + \ldots\ldots$$

Términos conjugados (distíngase de elementos conjugados y de líneas conjugadas) son aquéllos en los cuales va pasando cada letra, sucesivamente, de un extremo á otro, mientras los exponentes van todos ganando un lugar en la misma dirección, á cada traspaso de una letra. Por ejemplo: $y^r a^s b^t$, $a^r b^s y^t$, $b^r y^s a^t$.

Cuando la notación de la matriz es de índices superpuestos, son términos conjugados aquellos que, teniendo todos los índices (ó todos los subíndices) iguales y en el mismo orden, ofrecen la particularidad de que los subíndices (ó los índices) correlativos se diferencian en una cantidad constante. Por ejemplo: $a^1_1\, a^2_3\, a^3_2$, $a^1_{1+1}\, a^2_{3+1}\, a^3_{2+1}$, $a^1_{1+2}\, a^2_{3+2}\, a^3_{2+2}$.

Conjugación es el conjunto de todos los términos conjugados entre sí; y la distinguiremos con los adjetivos *literal* ó *numérica,* respectivamente, según se verifique por medio de la trasposición de letras, ó por el crecimiento ordenado de los índices ó de los subíndices. Será *completa,* si contiene tantos términos distintos como letras existen en la coordinación; por manera que, si pretendiéramos añadir un término más, habríamos de repetir necesariamente uno de los términos ya hallados.

También podemos clasificar las conjugaciones en la forma siguiente:

1.ª *Conjugación,* ó *conjugación de letras variadas,* es

aquélla en la cual existen uno ó varios exponentes iguales á cero, y las letras van apareciendo y desapareciendo sucesivamente.

EJEMPLO:

$$y^r a^s c^t d^u, \quad a^r b^s d^t e^u, \quad b^r c^s e^t f^u .....$$

donde sucesivamente desaparecen

$$b^0 = 1, \; c^0 = 1, \; d^0 = 1 ..... d^0 = 1, e^0 = 1, \; f^0 = 1 ....., \text{etc.},$$

reapareciendo cuando les llega el turno de tomar otro exponente

2.ª *Conjugación*, ó *conjugación de términos alternativos*, es aquélla cuyos exponentes se reproducen periódicamente, siendo causa de que los términos aparezcan y desaparezcan, alternativamente, sin sufrir otras variaciones.

Ejemplos:

Términos para conjugar:	$2a^2b^0c^2y^0$	$6a^1b^2c^3d^1e^2f^3g^1h^2i^3$
Conjugaciones:	a^2c^2	$2a\ b^2c^3d\ e^2f^3g\ h^2i^3$
	b^2y^2	$2a^3b\ c^2d^3e\ f^2g^3h\ i^2$
	a^2c^2	$2a^2b^3c\ d^2e^3f\ g^2h^3i$
	b^2y^2	$2a\ b^2c^3d\ e^2f^3g\ h^2i^3$
		.....
		.....

Como se ve, en la segunda de estas conjugaciones, el cuarto término es igual al primero, por lo cual volverán á repetirse el segundo y tercero; y estas repeticiones continuarán hasta obtener tres sumas de términos iguales, cuyo coeficiente común será 6. (Adviértase que esta conjugación no está tomada de matriz ninguna.)

3.ª *Conjugación*, ó *conjugación de términos invariables*

en su valor, porque contienen las mismas letras y todos los exponentes son iguales.

Ejemplos:

$$-yab - aby - bya = -3\,aby.$$
$$ny^r a^r b^r + na^r b^r y^r + nb^r y^r a^r = 3\,na^r b^r y^r.$$

Las conjugaciones pueden ser agrupadas por familias, formando cada familia las conjugaciones que tengan iguales exponentes.

Ejemplo:

$$a^3 b^2 y^7 \quad c^2 h^3 y^7.$$

Suponiendo que ordenamos por y dichas familias, las designaremos simbólicamente en esta forma:

$$F^m (r + s + t.....)\, y^p,$$

siendo m el grado de la conjugación; r, s, t..... p, los exponentes; y, debiendo ser igual á m, la suma de estas cifras. Cuando conozcamos el grado, m podrá ser suprimida.

EJEMPLO:

$$F(3)\,y^{m-3}, \quad F(2+1)\,y^{m-3}, \quad F(1+1+1)\,y^{m-3},$$

son todas las familias que pueden tener un término en el coeficiente de y^{m-3}, en ecuación del grado $m^{ésimo}$.

Teoría de la conjugación es la que estudia las propiedades y desarrollo de los términos conjugados.

Para efectuar la conjugación, teóricamente, haremos uso de un *polígono* ó *círculo eliminante;* aquél, de m lados; éste, dividido en m sectores; siendo m el grado de la matriz. En la práctica, emplearemos un encasillado, que es más sencillo y más cómodo para el manejo.

Denominaremos *orden alfabético* al observado dentro de una coordinación repetida indefinidamente: yab..... $ghyab$..... gh.....

II

Fundamentos racionales.

LEMA: *La determinante contiene la conjugación completa de cada uno de sus términos.*

Porque, trasladando columnas de un lado á otro de la matriz, si ésta es de repetición, cada letra irá ocupando sucesivamente los lugares que ocupaba su antecesora; y deberemos someterla á las mismas operaciones que practicáramos con ésta; y si la matriz es general, ocurrirá lo mismo con los elementos que ocupen los lugares que ocupaban los que los antecedían. Esta operación, repetida tantas veces como columnas contiene la matriz, engendrará otros tantos términos para cada conjugación, y no más, porque si repitieramos los traslados de columnas, sólo conseguiríamos repetir los términos ya encontrados. Y, como las columnas son tantas como las letras de la coordinación, y el número de éstas es igual al de los términos distintos que podemos formar trasponiendo letras del primero al último lugar, el lema es evidente.

La trasposición sucesiva de columnas es, verdaderamente, la conjugación de la matriz, puesto que da origen á la conjugación de todos sus términos.

COROLARIOS: 1.° *El coeficiente numérico de los términos de una conjugación es constante,* sin lo cual resultarían conjugaciones incompletas.

Ejemplo: En $2y^2a$, $3a^2b$, $3b^2y$, tendríamos dos conjugaciones idénticas completas, y nos faltaría un término, y^2a, para completar la tercera.

2.° *En matriz de grado impar, todos los términos de una conjugación van precedidos del mismo signo; y, si el grado es par, los signos son, alternativamente, positivos y negativos,* porque, al conjugar la matriz, la determinante cambia ó no

cambia de signo, según que el grado es par ó impar, toda vez que, al trasponer la primera columna al último lugar, el número de permutaciones es, respectivamente, impar ó par.

3.° *La conjugación puede efectuarse de arriba á abajo, ó de un lado al otro de la matriz*, porque la trasposición de filas daría el mismo resultado que la trasposición de columnas.

4.° *En matrices conjugadas, los términos de una misma conjugación están formados por elementos homólogos.* Véanse las conjugaciones de los términos yab, $a^1{}_1 a^3{}_2 a^1{}_3$, en los siguientes ejemplos:

$$\begin{vmatrix} y & a & b \\ b & y & a \\ a & b & y \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & y \\ y & a & b \\ b & y & a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b & y & a \\ a & b & y \\ y & a & b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a^1{}_1 & a^2{}_1 & a^3{}_1 \\ a^1{}_2 & a^2{}_2 & a^3{}_2 \\ a^1{}_3 & a^2{}_3 & a^3{}_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a^2{}_1 & a^3{}_1 & a^1{}_1 \\ a^2{}_2 & a^3{}_2 & a^1{}_2 \\ a^2{}_3 & a^3{}_3 & a^1{}_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a^3{}_1 & a^1{}_1 & a^2{}_1 \\ a^3{}_2 & a^1{}_2 & a^2{}_2 \\ a^3{}_3 & a^1{}_3 & a^2{}_3 \end{vmatrix}$$

5.° *El origen de una serie de matrices conjugadas ha de establecerse arbitrariamente en cualquiera de ellas, como si la serie procediese de tomar sucesivamente por origen de las generatrices una columna de una sola matriz arrollada á un cilindro. Consecuentemente, las series de letras de los términos conjugados forman, ó pueden formar, curvas reentrantes en sí mismas, estableciendo las conjugaciones en derredor de un centro, y siguiendo el orden alfabético ó el numérico.*

6.° *Conocido un término de una conjugación, podemos hallar todos los demás, en virtud del corolario anterior.*

TEOREMA PRIMERO. *Practicando ordenadamente una conjugación, las letras que, en términos sucesivos, llevan igual exponente, siguen el orden alfabético, y su exponente se con-*

serva siempre, en todos los términos, á igual distancia, en el orden alfabético, de otro exponente dado. Recíprocamente: *si dos términos tienen sus exponentes en el mismo orden, siendo iguales, uno á uno, los de un término, á los del otro; y, en uno de éstos, las distancias de dichos exponentes, en orden alfabético, son iguales á las que existen en el otro entre los mismos exponentes, ambos términos pertenecen á la misma conjugación.*

El enunciado de este teorema es consecuencia inmediata de la definición de las conjugaciones, y no necesita demostración. En cuanto á la recíproca, basta considerar que, al conjugar uno de los términos, siguiendo el orden alfabético y la equidistancia de exponentes, necesariamente habrá un momento en que aparezca el otro término. Por ejemplo: sean los términos $a^x d^z e^u$, $p^x s^z t^u$ los que llenan los requisitos exigidos; y establecida la coordinación alfabética

$$a^x b^0 c^0 d^z e^u \ldots\ldots p^0 q^0 r^0 s^0 t^0$$

con los exponentes correspondientes al primero de dichos términos, veremos que, al conjugarlo, iniciando los términos de la conjugación, sucesivamente, en b, en c, en d, etc., cuando lleguemos á p se reproducirá el segundo de los términos dados.

Caso particular. Se nos presentará con frecuencia el caso en que los términos simétricos pertenezcan á una misma conjugación, lo cual ocurrirá cuando, introducido el factor y^n en ambos términos, además de satisfacer éstos las dos condiciones exigidas, se observe que, en cada término, sean iguales los exponentes de cada par de letras equidistantes de los extremos. Ejemplo: $y^x a^z b^u c^z d^x$, $p^x q^z r^u s^z y^x$ pertenecen á una misma conjugación, y son simétricos en el sentido explicado en la primera parte.

TEOREMA SEGUNDO. *Ordenando la determinante por las potencias de una letra* (por ejemplo, y), *el término del coefi-*

ciente de una de estas potencias, que contenga letra con exponente mayor (ó menor) *que el de dicha potencia, tendrá otro ú otros términos de su conjugación en coeficientes de otras potencias mayores* (ó menores, respectivamente) *de la letra ordenatriz.*

Sea $T_0 d^{r \pm s}$ un término del coeficiente de y^r; y es evidente que, al conjugar el término $T_0 d^{r \pm s} y^r$, hallaremos otro término $T_1 y^{r \pm s}$, el cual, ó no existe, ó fué previamente ordenado en el coeficiente de $y^{r \pm s}$. Queda, pues, demostrado el teorema.

COROLARIOS. 1.° *Si conseguimos conocer los coeficientes de una letra ordenatriz, los términos independientes de ella serán dados por la conjugación.*

2.° *Practicada la ordenación según las potencias descendentes de dicha letra, é investigando sus coeficientes en el mismo orden, omitiremos, al examinar el coeficiente de una de las citadas potencias, el estudio de términos que contengan letras con exponente mayor.*

3.° *Dicha investigación podrá darse por terminada, en grado par, cuando conozcamos el coeficiente del cuadrado de la letra ordenatriz; pero si el grado es impar, después de conocer los términos del coeficiente del cuadrado, aun nos faltará averiguar el coeficiente numérico del término que contenga el producto de todas las letras de la coordinación*, yab ..... gh.

Conviene elegir, para ordenatriz, la letra y, porque, como veremos, careciendo de subíndice, por no estar multiplicada por p, se simplifica la operación de investigar la parte literal de sus coeficientes.

TEOREMA TERCERO. *El desarrollo de la matriz de repetición en su determinante obedece á los principios siguientes,* además de los que ya quedan enunciados, y otros muchos que ignoramos todavía.

1.° *El primer término que se presenta para la conjugación es el de la letra ordenatriz, elevada al grado de la determi-*

nante, con la unidad por coeficiente, porque éste es el *término principal*, según sabemos, de la matriz.

2.° *Siendo* m *el grado de la ecuación, no existirá término que contenga dicha letra elevada á* m — 1 (*), porque una letra, y^{m-1}, es la que ocupa la primera diagonal de una menor de primer orden, cuyo complemento algebraico es y: y el producto de ambas nos da y^m únicamente.

3.° *El coeficiente de* y^{m-2} *está formado por la suma, con signo negativo, de las combinaciones binarias de todos los pares de elementos conjugados, multiplicadas por* m.

Efectivamente, las menores principales de segundo orden, cuyos términos principales son y^{m-2}, tienen

$$\frac{(m-1)^2+m-1}{2}$$

menores complementarias cuya forma es

$$\begin{vmatrix} y_{rr} & \alpha_{rs} \\ \alpha_{sr} & y_{ss} \end{vmatrix};$$

y siendo siempre par la característica, la segunda diagonal $\alpha_{sr}\,\alpha_{rs}$ es negativa; y sus elementos, conjugados.

El número de combinaciones distintas de elementos conjugados será $\frac{m-1}{2}$, puesto que las letras distintas de y que entran en la coordinación son $m-1$; y no cabe dudar que, estando repetidas en la matriz, estas letras, igual número de veces, también las combinaciones binarias que con ellas formemos estarán igualmente repetidas: luego, cada una de las combinaciones binarias distintas tendrá igual coeficiente numérico que las otras.

(*) Este principio, con distinta demostración, se halla en la primera parte.

Y, siendo $\frac{m-1}{2}$ el número de combinaciones distintas, é igual el número de repeticiones de cada una; y ascendiendo á $\frac{(m-1)^2+m-1}{2}$ el total de dichas combinaciones, es evidente que $\frac{(m-1)^2+m-1}{2} : \frac{m-1}{2} = m$ será el coeficiente (con signo negativo, como ya hemos dicho) que corresponderá á cada combinación binaria distinta, quedando, con esto, demostrado el principio enunciado.

4.° *En el grado par* 2n, *el coeficiente de* y^{2n-2}, *como en el caso anterior, es negativo, y se compone de la suma de productos binarios, formados por elementos conjugados, multiplicada por la cifra del grado de la matriz; pero, además, contiene el cuadrado del* enésimo *de los elementos distintos de* y, *multiplicado por la mitad,* n, *de dicha cifra.*

La demostración es de la misma forma que la del caso anterior, sin otra diferencia que la de que el elemento *enésimo,* que motiva la excepción, ocupa en la matriz dos líneas paralelas á la primera diagonal, y de iguales dimensiones, resultando que cada repetición de este elemento es conjugada de otra repetición del mismo; por lo cual, tendremos n menores iguales á $\begin{vmatrix} y & a_n \\ a_n & y \end{vmatrix}$ que nos darán un producto $-n(a_n)^2$, conforme con el enunciado.

5.° *El coeficiente de* y^{m-3} *es positivo; y la suma de los coeficientes numéricos de los términos que lo componen es igual al duplo del número de menores de tercer orden, principales, de la matriz.*

Para demostrarlo, observaremos que, como en casos anteriores, resultan de multiplicar el término principal y^t de una menor principal (cuya característica es siempre par) por la determinante de su menor complementaria, en la cual ha de transformarse y en cero. Aplicando esta regla á la menor principal del orden $(m-3)^{ésimo}$, tendremos:

$$\begin{vmatrix} o & p & q \\ r & o & s \\ t & u & o \\ o & p & q \\ r & o & s \end{vmatrix}$$

de donde nos resultan dos solos términos positivos; luego, en M menores de la misma forma, los términos serán $2M$, cifra á la cual alcanzará la suma de los coeficientes numéricos.

6.° *En el coeficiente de* y^{m-3}, *que nos ocupa, existen, desde el cuarto grado en adelante, términos de la forma* $mr^2 s$ (*).

En la coordinación indefinida $a_1\, b_2\, c_3\, d_4\, e_5$ ..... correspondiente á los grados sucesivos, siempre hallaremos productos racionales a^2b_4, a^2c_5, a^2d_6.....ab^2_5, ac^2_7, ad^2_9.....bc^2_8, bd^2_{10} ..... que no quedarán anulados en las determinantes de los grados marcados por la racionalidad de los subíndices, porque, como hemos visto en la demostración anterior, proceden de determinantes menores totalmente positivas. Observado esto, formemos la matriz indefinida siguiente, poniendo en los elementos los subíndices que señalan los exponentes de $p = \sqrt[m]{k}$:

(*) En tercer grado, este término no puede existir, conforme al principio 2.°

$$\left|\begin{array}{ccccccc}
y & a_1 & b_2 & c_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\
h_{m-1} & y & a_1 & b_2 & c_3 & \cdot & \cdot \\
g_{m-2} & h_{m-1} & y & a_1 & b_2 & \cdot & \cdot \\
f_{m-3} & g_{m-2} & h_{m-1} & y & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & f_{m-3} & g_{m-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right|$$

En esta matriz vemos que, al formar las menores del orden $(m-3)^{ésimo}$, si queremos obtenerlas con la condición de hallar en todas el producto $a^2_2 g_{m-2} = a^2 gk$, es indispensable formarlas con filas y columnas consecutivas, porque, si con la y y la a de la primera fila, ha de formar menor otro elemento de la misma fila, que no sea b, ya no entrará en la menor, ó entrará en la columna de a el elemento g_{m-2}, que no podrá formar término con a. Y, como este razonamiento puede aplicarse á todas las demás menores del mismo orden, resultará que las únicas menores que nos dan ese producto son las complementarias de Δ^{123}_{123}, $\Delta^{234}_{234} \ldots \Delta^{456}_{456} \ldots \Delta^{(m-2)(m-1)(m)}_{(m-2)(m-1)(m)}$, $\Delta^{(m-1)(m)(1)}_{(m-1)(m)(1)}$, $\Delta^{m1.2}_{m1.2}$, ó sea, en total, m menores, que nos dan el término ma^2g, que es lo que querríamos demostrar, y análogamente demostraríamos que es m el coeficiente de todos los términos de igual forma: $r^2 s$, considerando sucesivamente las menores

$$\Delta^{135}_{135}, \Delta^{246}_{246} \ldots\ldots \Delta^{m\,24}_{m\,24},$$
$$\Delta^{147}_{147}, \Delta^{258}_{258} \ldots\ldots \Delta^{m\,36}_{m\,36},$$

etcétera.

7.° *En dicho coeficiente de* y^{m-3}, *entra un término de la forma* 2mrst, *á partir del sexto grado* (*).

Siguiendo el procedimiento de la demostración anterior, veremos que abc_6, abd_7, abe_8 ..... acd_8, ace_9 ....., *etc.*, son términos de la determinante; y hallaremos su número, observando que las menores que pueden dar un producto abc, por ejemplo, son las que resultan de las combinaciones.

$$(^{**})\ \begin{matrix} y_1^1\, y_2^2\, y_4^4 \\ y_{m-1}^{m-1}\, y_1^1\, y_2^2 \end{matrix} \Big/ \begin{matrix} y_2^2\, y_3^3\, y_5^5 \ldots\ldots y_{m-1}^{m-1}\, y_m^m\, y_2^2 \\ y_m^m\, y_2^2\, y_3^3 \ldots\ldots y_{m-3}^{m-3}\, y_{m-1}^{m-1}\, y_m^m \end{matrix} \Big/ \begin{matrix} y_m^m\, y_1^1\, y_3^3 \\ y_{m-2}^{m-2}\, y_m^m\, y_1^1 \end{matrix}$$

total, $2m$ combinaciones. Después, generalizaríamos la demostración á las demás combinaciones de igual forma, rst.

8.° *En el grado* 3n^{ésimo} (siendo n entero), *el coeficiente contiene términos de la forma* xq^3, *cuyo coeficiente numérico,* x, *podemos determinar fácilmente.*

Indudablemente, en la coordinación fundamental habrá dos términos irracionales q_n, r_{2n}, que elevados al cubo, se harán racionales.

Conocidos por el método que después explicaremos, los términos mp^2q, mr^2s ..... $2mxzu$, $2mbdl$ ..... sumados sus coeficientes numéricos, y restada esta suma del número de menores principales del orden $(3n - 3)^{\text{ésimo}}$ que puedan formarse en la matriz, la diferencia, dividida por dos, será el coeficiente numérico de los términos $q^3 y^{m-3}$, $r^3 y^{m-3}$, supuesto que, en la matriz, q, r, ocupan posiciones simétricas, y deben, necesariamente, aparecer en igual número de menores del orden citado.

(*) En quinto grado no puede existir, porque los productos $a_1b_2c_3$, $a_1b_2d_4$, $a_1c_3d_4$, $b_2c_3d_4$, son irracionales.

(**) Fijémonos en este cuadro, donde cada par de elementos consecutivos, v. gr.: $y^5\, y^6$, da lugar á dos solas combinaciones: $y^3\, y^5\, y^6$, $y^5\, y^6\, y^8$.

9.° *Existirá en grado impar, pero no en grado par, término formado por el producto de todas las letras de la coordinación,* y a b c ..... *elevadas á la primera potencia.*

En el grado impar $2n + 1$, este producto será

$$a_1 b_2 \ldots\ldots d_n e_{n+1} \ldots\ldots g_{2n-1} h_{2n} = a_1 h_{2n} \times b_2 g_{2n-1} \times \ldots\ldots \times$$
$$\times d_n e_{n+1} = a \ldots\ldots h p^{n(2n+1)};$$

y, en el grado par $2n$, será

$$a_1 b_2 \ldots\ldots d_n \ldots\ldots f_{2n-2} g_{2n-1} = a_1 g_{2n-1} \times b_2 f_{2n-2} \times \ldots\ldots \times$$
$$\times d_n = a \ldots\ldots g p^{2n(n-1)+n}.$$

Tenemos, pues, en el grado impar, donde es par el número de letras $ab \ldots\ldots gh$, que el factor $p^{n(2n+1)} = k^n$ es racional; y, en el grado par, donde el número de letras $ab \ldots\ldots g$ es impar, que el factor $p^{2n(n-1)+n} = k^{n-1}. k^{\frac{n}{2n}} = k^{n-1}. \sqrt{k}$ es irracional; y, como sabemos que los términos de la determinante han de ser racionales, queda demostrado que puede existir en grado impar; pero no en grado par, el término de la forma expresada.

***

El teorema tercero, que antecede, es susceptible de ampliarse hasta el infinito, puesto que infinitos pueden ser los grados de una matriz; las dificultades de la ampliación son considerabilísimas, creciendo enormemente según aumenta el número de orden del término que sometemos á estudio.

A pesar de estos inconvenientes, nos decidimos á incluir este teorema tan sumamente incompleto, porque los nueve principios, que quedan demostrados, nos suministran, sin previos cálculos, un número no despreciable de términos para conjugar, facilitando el problema del desarrollo de la determinante.

III

Problemas.

I. *Conjugar numéricamente la matriz general.*

Puesto que la conjugación se desarrolla circularmente, repitiéndose sus términos hasta el infinito, teóricamente, y sin distinción de la clase de la matriz, procede describir el polígono (véase la figura 1.ª) ó círculo de que ya hemos hablado, é inscribir en uno de los sectores un término de cada conjugación, y, haciendo girar la figura alrededor de su centro, ir anotando en sectores sucesivos los términos de cada conjugación, lo cual se consigue, sumando una unidad á cada índice, ó á cada subíndice de un término, para formar el término del sector siguiente hasta llenar los m sectores. Cuando en las sumas encontramos una cifra que exceda á m en una unidad, la restamos m unidades, y escribimos 1 en el lugar correspondiente. Inútil es decir que m representa el grado de la matriz.

Si hacemos la conjugación de los subíndices, resultará hecha de arriba abajo; si, la de los índices, de izquierda á derecha; si restamos unidades, en lugar de sumarlas, la haremos en sentido inverso.

En sentido diagonal, no existe conjugación.

Si la notación de la matriz estuviese hecha con letras ordenadamente repetidas en cualquiera dirección, la sucesión de letras en orden alfabético, directo ó inverso, substituirá á la sucesión de índices.

En la práctica, substituiremos el polígono por un encasillado dividido en $\lfloor m - 1$ renglones y m columnas, para acomodar ordenadamente los $\lfloor m$ términos que, según sabemos, constituyen la determinante general; y conjugaremos sucesivamente, en la primera columna, *primero, la primera menor principal del orden* $(m - 2)^{\text{ésimo}}$, *á cuyos términos*

añadiremos, como factor común, el tercer elemento de la primera diagonal; conjugados, así, estos términos, nos darán la determinante de la primera menor principal del orden $(m - 3)^{\text{ésimo}}$, *cuyos términos multiplicaremos por el cuarto elemento de la primera diagonal, conjugándolos, á su vez, para obtener la determinante menor del orden* $(m - 4)^{\text{ésimo}}$, *que multiplicaremos por el quinto elemento de la primera diagonal, continuando la operación hasta que la primera columna contenga la conjugación completa de la primera menor principal de primer orden, la cual, multiplicada por el último elemento de la primera diagonal, podrá, finalmente, ser conjugada, llenando las demás columnas, con lo cual queda terminada la operación, durante la cual se cuidará de que los signos sean, alternativamente, positivos y negativos, cuando se desarrolle determinante, ó menor, de grado par; é iguales, en caso contrario.*

En el caso de que la conjugación sea numérica, sólo debe escribirse los índices y subíndices, dejando huecos para llenarlos después con los respectivos elementos, en esta forma:

$$\begin{vmatrix} q_1^1 & r_1^2 & s_1^3 \\ t_2^1 & u_2^2 & v_2^3 \\ x_3^1 & y_3^2 & z_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + \cdots {}^{1}_{1} \cdots {}^{2}_{2} \cdots {}^{3}_{3} \\ - \cdots {}^{1}_{2} \cdots {}^{2}_{1} \cdots {}^{3}_{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} + \cdots {}^{1}_{2} \cdots {}^{2}_{3} \cdots {}^{3}_{1} \\ - \cdots {}^{1}_{3} \cdots {}^{2}_{2} \cdots {}^{3}_{1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} + \cdots {}^{1}_{3} \cdots {}^{2}_{1} \cdots {}^{3}_{2} \\ - \cdots {}^{1}_{1} \cdots {}^{2}_{3} \cdots {}^{3}_{2} \end{vmatrix}$$

EJEMPLO (véase el cálculo número 1): $\lfloor m = \lfloor 5 = 120$, $\lfloor m - 1 = 24$. Distribuída la superficie del papel en 24 líneas y 5 columnas, dividimos aquéllas por 2, señalando con $A_1\ A_2$ el principio de cada división, la cual, á su vez, dividimos por 3, señalando con B' ..... $B^2{}_3$ los puntos de división; y, finalmente, nos quedan, en cada una de estas, cuatro líneas, que señalamos con CC únicamente para aclarar la explicación.

Escribimos en la primera columna, línea A_1, el primer elemento de la primera diagonal, indicado por $a^1{}_1$ y lo mul-

tiplicaremos por el segundo a^2_2, teniendo así la primera diagonal de la primera menor de tercer orden, la cual conjugamos, escribiendo en $A_2 - a^1_2\, a^2_1$. Multiplicamos ambos términos por a^3_3, y los conjugamos, $+ a^1_1\, a^2_2\, a^3_3$, en $B^1_1\, B^1_2\, B^1_3$; y $- a^1_2\, a^2_1\, a^3_3$, en $B^2_1\, B^2_2\, B^2_3$, multiplicando esta conjugación por a^4_4, conjugando en seguida los términos del producto por el orden que indican los índices de C, y cuidando de alternar los signos por operar en grado par. Seguidamente, multiplicaremos por a^5_5 todos los términos hallados, y los conjugaremos en las demás columnas, con lo cual termina la operación.

II. *Hallar los factores literales de las potencias de* y, *en la matriz de repetición, para poder conjugar los términos que contienen esta letra.*

Ordenaremos las familias, empezando por el coeficiente de y^{m-2}, siguiendo el orden descendente de las potencias de esta letra, y cuidando de que, dentro de cada paréntesis, no haya cifra mayor que la del exponente de la ordenatriz, hasta llegar, en grado par, al coeficiente de y^2 inclusive; y añadiendo, en grado impar, $F(1 + 1 + \ldots\ldots + 1)\,y$, todo en la siguiente forma:

$$F(1+1)\,y^{m-2}. \text{ (No hay caso de } F(2)\,y^{m-2})$$
$$F(1+1+1)\,y^{m-3}, \quad F(1+2)\,y^{m-3}, \quad F(3)\,y^{m-3}.$$
$$F(1+1+1+1)\,y^{m-4}, \quad F(1+1+2)\,y^{m-4},$$
$$F(2+2)\,y^{m-4}, \quad F(3+1)\,y^{m-4} \quad F(4)\,y^{m-4}.$$

. . . . . .

$$F(1+1+\ldots\ldots+1)\,y^3, \quad F(2+1+\ldots\ldots+1)\,y^3 \ldots\ldots$$
$$F(3+1+\ldots\ldots+1)\,y^3 \ldots\ldots F(3+2+1\ldots\ldots+1)\,y^3 \ldots\ldots$$
$$F(1+1+\ldots\ldots+1)\,y^2, \quad F(2+1+\ldots\ldots+1)\,y^2 \ldots\ldots$$
$$F(2+2+\ldots\ldots 1+1)\,y^2 \ldots\ldots F(1+1+\ldots\ldots+1+1)\,y.$$

Según vayamos formando las familias, ó después de ordenarlas todas, formaremos agrupaciones de filas, cada una de

las cuales contenga todas las letras de la coordinación, menos y, con los subíndices que correspondan al exponente de p, y elevadas las letras de cada fila á una misma potencia, de manera que las diversas potencias á que estén elevadas las filas tengan los exponentes indicados dentro del paréntesis de la familia, en la forma siguiente:

$$F(1+2+3)\,y^m \left\{ \begin{array}{ccccc} a_1 & b_2 & c_3 & d_4 & \ldots\ldots \\ a_2^2 & b_4^2 & c_6^2 & d_8^2 & \ldots\ldots \\ a_3^3 & b_6^3 & c_9^3 & d_{12}^3 & \ldots\ldots \\ \hline \end{array} \right.$$

Después, tomando un subíndice de cada fila, de modo que la suma de estos subíndices sea m ó un múltiplo de m, con las letras correspondientes á estos subíndices, formaremos términos que iremos escribiendo, y que podrán pertenecer á un coeficiente de y^r, porque serán racionales. Sea $m = 14$, y, en el ejemplo que antecede, tendremos

$$a\,b^2\,c^3\,p^{14} = a\,b^2\,c^3\,k$$

y si fuese $m = 10$, tendremos

$$a^3\,b^2\,c\,p^{10} = k \qquad b\,c^2\,d^3\,p^{20} = b\,c^2\,d^3\,k^2.$$

Es de advertir que, bien por examen directo, bien por resultado de la conjugación de un término, podremos hallar otro término de los que hemos anotado, que pertenezca á la misma conjugación; en este caso, lo tacharemos, ó lo señalaremos con un paréntesis, para abstenernos de conjugarlo.

También, como resultado de los cálculos siguientes, ó de razonamientos *à priori*, algunos de dichos términos resultarán con cero por coeficiente, y los eliminaremos de la determinante.

Los cálculos números 2 y 3 sirven de ejemplo.

III. *Hallar los coeficientes numéricos de los términos conjugables.*

Seguiremos el método explicado en la primera parte, sin otra diferencia que la de que allí buscábamos la mitad de los términos de la ecuación final, y ahora solamente necesitamos la $m^{ésima}$ parte, siendo ésta la gran ventaja que lleva el método de conjugación al de simetría, que allí expusimos. Aun resulta otra ventaja más: la de que, conociendo anticipadamente la parte literal por el problema segundo, podemos descartar del cálculo los términos que no sean semejantes á los que buscamos (*).

También el teorema tercero de este capítulo nos permite otras abreviaciones, dándonos algunos términos sin previo cálculo.

Ahora veamos la marcha de la operación en quinto grado: por la fórmula, muy conocida, del término general de la potencia de un polinomio, establecemos los términos en que debemos operar, por ser los únicos que nos pueden dar términos distintos para la conjugación. Estos términos elegidos, lo son teniendo en cuenta el esquema de la potencia del polinomio irracional, incluído en la primera parte. Debajo van, con signo negativo, los coeficientes hallados para y, y^2, y^3, por el método ya explicado, y formamos, en la parte indispensable, las potencias de $-y = (a + b + ...)$, $y^2 = (a + b + ...)^2$, $-y^3 = (a + b + ...)^3$, (es decir, hasta y^{m-2}).

Más allá del término de p^{11}, sacamos los coeficientes numéricos que resultan de la multiplicación de estas potencias de y por sus coeficientes ya hallados (el cálculo para hallarlos está debajo de la raya horizontal); pero, omitiendo los productos que no son de la forma $a^2 b c d$, y verificando la resta indicada, hallamos $5 a^2 b c d$, que dividido por a y multiplicado por $-y$, nos da el término que nos falta para com-

(*) En el método explicado en la primera parte, con un término $T a^n p^n$ dividido por $a^n p^n$ hallábamos el término $T y^n$. Recíprocamente, el término $T y^n$ nos conduce al término $T a^n p^n$, que estableceremos fácilmente.

pletar la investigación: téngase en cuenta que en este cálculo, abreviación del que practicamos en la primera parte, hemos transformado y en $-y$.

Como hemos querido presentar completos los cálculos números 1 y 2 al establecer la fórmula de los términos de la potencia, estampamos como antecedente, para repasar si hubiera error, la fórmula del coeficiente numérico entre paréntesis, y, á continuación, la cantidad á que asciende. En quinto grado, este resultado se obtiene fácilmente haciendo la operación de memoria; pero en sexto grado pudiera haber error, y hacemos figurar por separado los calculitos de dichos coeficientes bajo la raya horizontal.

En este grado hemos separado el cálculo de los términos de p^{13} y p^{14} del de los que no pasan de p^{10}, ateniéndonos á las dimensiones del papel. Creemos que, enterado el lector del mecanismo de la operación explicada al principio de esta memoria, no son necesarias más aclaraciones.

IV. *Conjugar los términos hallados en la matriz de repetición.*

Sea en el polígono (fig. 1.ª), ó sea en el encasillado (cálculos números 1 y 2), no hay más qué hacer que conjugar cada término, letra por letra, siguiendo el orden alfabético, poniendo á las letras conjugadas el mismo exponente, según se ve en los ejemplos citados.

V. *Redactar, sin cálculos prèvios, las determinantes de los grados tercero, cuarto y quinto.*

El teorema tercero nos permite resolver este problema.

Sus principios 1.°, 2.° y 3.° nos dan, para conjugar, el término y^3 (a^3, b^3), y para último término, $-3\,a\,b\,y$, en tercer grado. El 1.° y el 4.° dan, para el cuarto grado, las únicas conjugaciones y^4, $-2\,b^2$, $-4\,a\,c$. El 1.°, 3.° y 6.°, en relación con el 5.°, atribuyen al quinto grado las conjugaciones de y^5, $-5\,a\,d$, $-5\,b\,c$; y otras de la forma $5\,p^2\,q$, que hallaremos sencillamente con fijarnos en los elementos a_1 b_2 c_3 d_4, que nos dan, para dicha forma,

$$-5\,a_1\,b_4^2\ (=-5\,a\,b^2\,k)\ \text{y}\ -5\,a_2^2 c_3\ (=-5\,a^2\,c\,k),$$

cuyas conjugaciones contienen los términos simétricos en el cuadro de la potencia $-5\,b_2\,d_8^2$ y $-5\,c_6^2\,d_4$; y hallando por el medio explicado en la siguiente nota el coeficiente $5-10=-5$, del término $a\,b\,c\,d\,y$, tenemos todos los medios necesarios para establecer la ecuación, sin necesidad de escribir cálculo alguno, bastando conjugar, siguiendo el orden alfabetico, al mismo tiempo que escribimos la determinante.

NOTA. Al principio de la investigación, nos cansamos escribiendo menores; y después nos resultó inútil la tentativa de cubrir columnas con tiras sueltas de papel, que volaban al menor movimiento. Tuvimos, pues, que echar mano del recurso indicado en la figura 2.ª: cortamos las tiras, siguiendo las líneas continuas de la lámina, numeradas por el anverso y el reverso, y dobladas por las líneas de puntos $p\,q$ en el orden conveniente para tapar filas y columnas, dejando descubierta la menor que deseábamos someter á investigación ó cálculo. Las tiras p', q', r', s', son más largas, para que, doblándolas sobre las p, q, r, s, pudiera sujetar sus extremos la mano izquierda, mientras la derecha hacía las anotaciones. La lámina es copia de la hoja en que, previa la siempre indispensable formación del índice de menores, investigamos en las de tercer orden los coeficientes numéricos de los términos $b^3\,y^3$, $a^2\,d\,y^3$, $a\,b\,c\,y^3$, en la determinante de sexto grado, señalando cada unidad con una raya á continuación del término correspondiente. La investigación en las veinte menores principales duraría un par de minutos.

Para calcular simultáneamente las menores complementarias, sería preciso cortar otras tiras sobre la matriz y á la izquierda de ella, y ordenar las menores, por el orden numérico de las filas (ó de las columnas), para que las tiras puedan cubrir todos los elementos extraños á las menores. Por ejemplo: en la matriz de quinto grado, elegidas dichas menores $\Delta\,{}^{13}_{14}$, $\Delta\,{}^{245}_{235}$, complementarias, donde están barajadas filas y co-

lumnas, no podríamos cubrir los elementos a^{3}_{2}, a^{2}_{4}; pero los podemos cubrir siempre si tomamos las menores de segundo ó tercer orden, de las primeras ó de las últimas columnas ó filas.

El aparatito, susceptible de alguna variación en su forma, es infantil, y así lo reconocemos; pero lo incluímos, para evitar que un calculista novel pierda algunas horas, como las perdimos nosotros, antes de idearlo.

IV

Comparación de métodos.

Para que pueda efectuarse esta comparación, á continuación insertamos, completos, los cálculos necesarios para cada método de los que vamos á cotejar, numerados del 1 al 5.

Debemos prescindir del trabajo necesario para escribir la determinante, que es el objeto del problema; y sólo atenderemos á la labor preparatoria, que es donde hay que buscar la economía de tiempo y de trabajo.

Observemos que el método de las menores nos da las siguientes combinaciones: en quinto grado, 10 menores de tercer orden, apareadas con sus diez complementarias de segundo; en sexto grado, 20 de tercer orden, con otras 20 del mismo; en séptimo grado, 35 de tercer orden, con 35 del cuarto; pero, en este grado, cada una de las 35 del cuarto orden ha de descomponerse en 10 pares del quinto, resultando, en este orden, 350 pares.

De otra manera, la determinante contiene, en quinto grado, 120 términos y 600 letras; la de sexto, 720 y 4.320, y la de séptimo, 5.040 y 35.280, respectivamente. La proporción de letras, tomando por unidad las 600 del quinto grado, es, en sexto, 7,2, y en séptimo, 58,6.

Ahora, empecemos la comparación entre el método de las menores, y el de la conjugación (cálculos números 1 y 5),

aquél, en la matriz general; y éste, en la general y en la de repetición. En aquél, el sencillo trabajo, que puede encomendarse á un niño de ocho años, de sumar unidades á los índices ó subíndices, puede considerarse como nulo: es rapidísimo. En el de las menores, si, en el grado m, tenemos que desarrollar solamente una menor principal, para conjugar sus términos, en lugar de desarrollar m menores del mismo orden, el trabajo T, del método, quedará indudablemente reducido á $\frac{T}{m}$, pero, en dicha menor de primer orden, si desarrollamos solamente una menor principal de segundo orden, el trabajo $\frac{T}{m}$ quedará reducido á $\frac{T}{m} : (m - 1)$; y repitiendo el razonamiento, este trabajo será, finalmente, $\frac{T}{\lfloor m}$, reduciéndose á la nulidad, prácticamente considerado.

La sola comparación de los cálculos 1 y 5 basta para convencernos de que el método de conjugación es ventajosísimo.

Si efectuamos la comparación entre los cálculos números 2 y 5, la ventaja es aún mayor, pues en el método de las menores, después de practicar las multiplicaciones, todavía hay que reducir términos semejantes, trabajo harto prolijo, cuando los términos que hay que reducir son, en grados sucesivos, 120, 720, 4320, 34560, 311040 .....

Aplicando al sexto grado (cálculos números 3 y 4) el método que dimos en el capítulo primero para las ecuaciones de grado par, y comparándolo con el método de la conjugación, éste continúa prevaleciendo; y debemos desechar el otro.

Nos falta confrontar los métodos de conjugación numérica y literal, aplicados á las matrices de repetición.

En este caso, el cálculo número 1, de definitiva extensión de la determinante, se convierte en preparatorio, pues hallados los $\lfloor m$ términos contenidos en las $\lfloor m - 1$ líneas y m columnas, todavía tendríamos que reducir términos semejantes, para formar la verdadera determinante.

En quinto grado, este cálculo número 1, que no es más que preparatorio en el caso que nos ocupa, contiene 1.800 letras y guarismos. El cálculo preparatorio del número 2, sólo contiene 327 letras y guarismos, luego el desarrollo es *cinco y media veces menor;* y esta reducción del desarrollo compensa ya, con creces, en el 5.° grado, la mayor complicación de las operaciones; pero en los grados superiores la ventaja es mucho mayor.

Aplicando el método del número 1 á los grados 6.° y 7.°, el desarrollo, proporcional al número de letras, es, respectivamente, 7,2 y 58,6 veces mayor.

Pues bien; por el método de conjugación literal, el cálculo en 6.° grado (número 3), que contiene 1.076 letras y guarismos, sólo alcanza un desarrollo 3,3 veces mayor que el del número 2, y mucho menor todavía, en número de letras y cifras, que el del número 1, en lo tocante al total de caracteres.

Calculamos, á ojo de buen cubero, que el desarrollo del cálculo, aprovechando las abreviaciones que permite el teorema tercero de este capítulo, que nos daría doce términos hechos en el 7.° grado, no excedería del triple del desarrollo del cálculo número 3; es decir, no excedería de 3.200 caracteres. Pues bien; en dicho grado, por el método del número 1, el total de caracteres alcanzaría la enorme cifra de 105.840.

COROLARIOS: 1.° En la práctica, el método del cálculo de las menores debe ser abandonado, substituyéndolo por el de la conjugación en todos los casos.

2.° Siendo la matriz de repetición, hasta el 5.° grado, basta el teorema tercero para hallar la determinante; y, en los grados superiores, debe preferirse el método de conjugación literal, con las abreviaciones que permite dicho teorema, y las que se logre idear en lo sucesivo.

PUBLICACIONES RECIBIDAS DESDE 1.° DE JULIO DE 1907

Real Academia de la Historia.—Cortes de los antiguos Reinos de Aragón y de Valencia y Principado de Cataluña.—Tomo XI.—*Cortes de Cataluña.* Madrid, 1907.

Real Academia de la Historia.—Boletín.—Tomo 50, cuaderno 6.°—Tomo 51, cuadernos 1.° al 4.°—Madrid, 1907.

Real Academia de Bellas Artes de San Fernando.—Boletín (2.ª época), números 1 y 2.—Madrid, 1907.

Real Academia de Medicina.—Anales.—Tomo 27, cuadernos 2.° y 3.°—Madrid, 1907.

Real Sociedad Geográfica.—Boletín.—Tomo 49, tercer trimestre 1907.—Revista de Geografía Colonial y Mercantil.—Tomo 4.°, núm. 6.—Idem 5.°, núms. 7 al 9.—Madrid, 1907.

Universidad Central de España.—Memoria del curso 1905 á 1906 y Anuario del de 1906 á 1907 de su distrito universitario.—Madrid, 1907.

Universidad Literaria de Salamanca.—Memoria sobre el estado de la instrucción en esta Universidad y establecimientos de enseñanza de su distrito, correspondiente al curso académico de 1905 á 1906.—Anuario para el de 1906 á 1907.—Variedades.—Salamanca, 1907.

Facultad de Ciencias de Zaragoza.—Anales.—Año 1.°, núm. 2.—Zaragoza, 1907.

Observatorio de San Fernando.—Carta fotográfica del cielo; 20 hojas.

Observatorio de Marina de San Fernando.—Anales del Instituto (sección 2.ª), Observaciones meteorológicas, magnéticas y sísmicas.—Año 1906.—San Fernando, 1907.

Instituto de Alfonso XIII.—Sueroterapia, Vacunación y Bacteriología.—Año 3.°, núms. 10 y 11.—Madrid, 1907.

Sociedad Española de Física y Química.—Anales.—Tomo 5.°, núms. 45 y 46.—Madrid, 1907.

Sociedad Aragonesa de Ciencias Naturales.—Linneo en España.—Homenaje á Linneo en su segundo Centenario 1707-1907.—Extracto, 3 folletos. Zaragoza, 1907.

Instituto Central Meteorológico.—Boletín diario.—Año 15.—Hojas de 1.° Julio á 30 Septiembre de 1907.—Madrid, 1907.

Instituto General y Técnico de Vitoria.—Memoria del curso de 1905 á 1906. Vitoria, 1907.

Senado.—Diario de las Sesiones de Cortes.—Legislatura de 1905 á 1906 (8 tomos).—Madrid, 1905 y 906.

Ministerio de Fomento.—Memoria acerca del estado de la industria en la provincia de Madrid en el año 1905.—Madrid, 1907.

Ministerio de Hacienda.—Estadística de la contribución sobre las utilidades de la riqueza mobiliaria.—Año 1905.—Madrid, 1907.

Ministerio de Hacienda. — Estadística del impuesto sobre los transportes de viajeros y mercancías por las vías terrestres y fluviales.—Año 1905.—Madrid, 1907.

Instituto de Reformas Sociales.—Bibliografía de Revistas.—Artículos sobre cuestiones sociales publicados en 1906.—Año 1.º—Congresos sociales en 1906.—Resumen de los trabajos del Instituto desde su constitución definitiva, 3 folletos.—Madrid, 1907.

Ayuntamiento de Madrid.—Boletín del Laboratorio municipal de Higiene.—Tomo VII, núms. 4, 5 y 6.—Madrid, 1907.

Aizola y Minondo (Pablo de).—La Reforma del impuesto de Consumos.—Madrid, 1907.

Armada Losada, Marqués de Figueroa (Excmo. Sr. D. Juan)—Discurso leído en la solemne apertura de los Tribunales, celebrada en 16 de Septiembre de 1097.—Madrid, 1907.

Barras y de Aragón (D. Francisco de las).—Discurso leído en la Universidad de Oviedo en la solemne apertura del curso académico de 1907 á 1908.—Oviedo, 1907.

Blanco y Martínez (D. Emilio) — Los impuestos interiores sobre el consumo. Memoria que obtuvo el premio del Conde de Toreno, concedido por la Real Academia de Ciencias Morales y Políticas en el primer concurso ordinario.—Madrid, 1907.

Bonet y Bonet (D. Baldomero).—Discurso leído ante la Universidad Central en la solemne inauguración del curso académico de 1907 á 1908.—Madrid, 1907.

Catalina García (D. Juan) y Pérez de Guzmán (D. Juan).— Discursos leídos ante la Real Academia de la Historia en la junta pública de 16 de Junio de 1097.—Madrid, 1907.

Comas Solá (D. José).— El planeta Júpiter durante la oposición de 1905-1906 y estudio sobre el origen de las corrientes atmosféricas de algunos astros. Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona.—Volumen VI.—núm. 14 —Barcelona, 1907.

Comas Solá (D. José) —Terremoto local del 18 de Febrero de 1907 y Observaciones de los Satélites I y III de Júpiter.—Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona.—Volumen VI, núm. 19.—Barcelona, 1907.

Cotarelo y Valledor (D. Armando).—Discurso leído en la solemne apertura del curso académico de 1907 á 1908 en la Universidad de Santiago de Compostela.—Santiago, 1907.

Chías y Carbó (D. Benito) —Mapa de la provincia de Madrid —Colección de Cartas Corográficas de las provincias españolas.— Barcelona.— Establecimiento editorial de Alberto Martín.

Escriche y Mieg (D. Tomás).— Elementos de Física, precedidos de unas nociones de Mecánica y seguidos de unas breves nociones de Meteorología (5.ª edición).—Barcelona, 1906.

Galán y Ruiz (D. Gabriel).— Discurso leído en la Universidad de Zaragoza en la solemne apertura del curso académico de 1907 á 1908.—Zaragoza, 1907.

Gorria (D. Hermenegildo).— Importancia de la Hidráulica aplicada.—Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona —Volumen VI, núm. 17.—Barcelona, 1907.

Guillén García (D. Guillermo J. de).— Transmisión de dibujos y fotografías con la telegrafía sin hilos.—Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona.—Volumen VI, núm. 15.—Barcelona, 1907.

Madariaga (José María de).—Ensayos realizados con un motor de gas sistema Letombe instalado en la Escuela de Minas de Madrid. — Publicado en la Revista Minera Metalúrgica y de Ingeniería.—Madrid, 1907.

Muñoz del Castillo (José).—Primera nota sobre la radioactividad de las Aguas Lerez.—Anales de la Sociedad Española de Física y Química.—Octubre 1907.—Madrid, 1907.

Observatorio Astronómico de Cartuja. — Eclipse total de Sol del 30 de Agosto de 1905.—Observaciones hechas en Carrión de los Condes (Palencia) por la Sección Astronómica.—Granada, 1905.

Pérez de Muñoz (D. Francisco).—Introducción al estudio del Cálculo de Cuaterniones y otras Algebras especiales —Madrid, 1906.

Rodríguez Marín (D. Francisco).—Discursos leídos ante la Real Academia Española en la recepción pública del Sr. . . —Madrid, 1907.

Sánchez Mata (Dr. D. Nicasio). — El Socialismo y la Democracia cristiana como sistemas de restauración social.—Oración inaugural del curso académico de 1907 á 1908, leída ante la Universidad literaria de Salamanca. — Salamanca, 1907.

Santa María (Ramon de). — El naturalista Termeyer; noticias biográficas. — Publicado en el Boletín de la Sociedad Aragonesa de Ciencias Naturales.—Zaragoza, 1907.

Seco (G. M.). - Tratado de Derecho remuneratorio.—Mahón, 1896.

Sentenach (D. Francisco).—Discursos leídos ante la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando en la recepción pública del Sr. D.....— Madrid, 1907.

Torres Campos (Dr. D. Manuel).—Discurso leído en la solemne apertura del curso académico de 1907 á 1908 en la Universidad de Granada.—Granada, 1907.

Valentí Vivó (Dr. D. Ignacio).—Herencia y Trabajo.—Nota de Antroposociología.—Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona.—Volumen XVI, núm. 16 —Barcelona, 1907.

(Continuará).

VI.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia undécima.

SEÑORES:

Dimos por terminada, en la última conferencia, la exposición de la teoría de la Elasticidad, según el método de Cauchy.

Exposición, como dijimos al principio, de carácter elemental, que más bien que el título que le hemos dado, debería llevar el de: *Nociones* sobre el problema de la Elasticidad con arreglo al método de Cauchy.

Conferencias de pura propaganda, pero que podrán servir á mis oyentes y á mis lectores, para estudiar sin grandes dificultades las memorias originales del insigne matemático.

En las conferencias precedentes hemos determinado, pues, las ecuaciones fundamentales de la elasticidad de los cuerpos y de los sistemas, ya para el caso del equilibrio, ya para el del movimiento, ó en particular para el de los movimientos vibratorios. Y ambos problemas en una de dos hipótesis: Primera, cuando el sistema es indefinido; segunda, cuando está encerrado en superficies límites.

Y vimos, que *en la primera* hipótesis, las ecuaciones fundamentales son tres, y que en la segunda, además de las tres ecuaciones diferenciales parciales para el interior del cuerpo, hay otras tres para la superficie límite.

Uno y otro problema son inmensamente difíciles, y aunque ambos están planteados, sólo pueden resolverse en casos muy particulares, y aun en muchos de éstos, á fuerza de ingenio ó de esfuerzos de cálculo.

Precisamente, en las pocas conferencias que nos quedan para este curso, ó mejor dicho, para la primera parte del mismo, hemos de aplicar las ecuaciones generales á una serie de ejemplos, que tomaremos principalmente de un opúsculo notabilísimo por su claridad y por su método, publicado con el título de *Notions sur la théorie de l'Elasticité*, por E. Sarrau.

El autor no sigue, para establecer las ecuaciones fundamentales, el método de Cauchy, sino más bien el de Lamé; aunque para nuestro objeto esto importa poco, puesto que sólo se trata de la aplicación á unos cuantos ejemplos de las fórmulas generales, que en todos los autores son las mismas, con la diferencia de ser dos coeficientes en vez de uno los que resultan para el caso de los cuerpos isótropos.

Advertiremos, por último, que todos los ejemplos que hemos de presentar, por lo menos en el presente curso, á este caso particular de cuerpos isótropos se refieren, porque es el caso más sencillo y de aplicaciones más útiles.

***

Dos métodos pueden seguirse en la exposición de todas las doctrinas matemáticas y aun en las de la Física matemática.

Primero, empezar por casos particulares, por ejemplos sencillos, que vienen á ser como procedimientos de exploración en un terreno desconocido.

Luego estos ejemplos se van multiplicando y se complican; las soluciones van siendo cada vez más generales, y al fin llega un momento en que un sabio de genio ó de gran poder sintético recoge todos estos materiales, que pudiéramos llamar históricos, porque constituyen la historia de cada ciencia en particular y aun de cada teoría dentro de cada ciencia; y por una vigorosa generalización condensa todos

aquellos casos particulares en un método y en una teoría, que á todos los comprende, elevando la ciencia de la variedad á la unidad.

Es algo así como el método experimental aplicado á las ciencias matemáticas. Es como una *inducción* aplicada á ejemplos en cada uno de los que se habrá aplicado el método deductivo. Esto sin perjuicio de que, constituída la teoría general, se la demuestre por el método *à priori*, que es el propio de esta clase de ciencias.

Tal procedimiento, por medio de ejemplos, es además muy sugestivo y se anticipa á dificultades con las que al cabo se hubiera tropezado partiendo de una teoría general establecida desde el principio.

La escuela inglesa, permítaseme este calificativo, por carácter de raza y por instinto práctico, es muy aficionada al método que acabamos de señalar.

Pudiéramos dar los títulos de muchas obras inglesas en que éste es el sistema que se sigue, no sólo para la investigación, sino para la exposición.

Lo cual no quiere decir que los insignes sabios de aquella nación no se lancen muchas veces directamente, sin detenerse en detalles, á las regiones más elevadas del pensamiento y á las combinaciones matemáticas más abstractas.

***

Entre los sabios franceses y alemanes hay, por el contrario, marcada preferencia por las grandes unidades científicas, por las teorías generales y abstractas; para descender después, dueños, por decirlo así, de la clave de los problemas, á las aplicaciones, á ejemplos y á casos particulares.

Esto de los ejemplos, ó con más propiedad, de los casos particulares, es método fecundo, como método de investigación, y á él no creo que renuncie sistemáticamente ningún

matemático; pero forjada ya la teoría general, cabe discusión sobre el modo de exponerla en una obra didáctica.

Para la mejor comprensión de los alumnos, ¿conviene ir de lo general á lo particular, ó elevarse de lo particular á lo general?

Los franceses, con la claridad de su exposición, con la precisión de su idioma, con su espíritu elevado de generalización, prefieren mirar las cosas desde arriba, para expresarnos de este modo.

Y es lo cierto que sus libros son, por regla general, un modelo como claridad y como método.

Sea de ello lo que fuere, ya en las conferencias anteriores hemos expuesto la teoría general, según el método de Cauchy; y ahora, por una serie de ejemplos, vamos á quitarle lo que pueda tener de vaga por su propia generalidad; vamos á aclararla y precisarla, haciéndola más práctica y más sensible.

***

No lo olvidemos: Las fórmulas que vamos á aplicar en estos *problemas del equilibrio*, que han de ser los que primero tratemos, son las siguientes:

Si se trata de un sistema elástico indefinido, las ecuaciones serán estas tres:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\Delta u+\rho X=0,\\(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dy}+\mu\Delta v+\rho Y=0,\\(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dz}+\mu\Delta w+\rho Z=0,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

que se llaman ecuaciones *indefinidas* y en que ρ, λ y μ son constantes cuyos valores dependen de la naturaleza del sistema elástico y en cierto modo lo definen.

X, Y, Z son los componentes de las fuerzas exteriores por unidad de masa.

u, v, w son asimismo las componentes del desplazamiento de un punto cualquiera y, por lo tanto, son funciones de x, y, z. Constituyen, por decirlo así, las incógnitas del problema y hemos de encontrar para estas incógnitas expresiones que, substituídas en (1), convierten las tres ecuaciones en tres identidades: $0 = 0$.

θ tiene por valor

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz},$$

y el símbolo Δ se expresa de este modo:

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}.$$

Si, por el contrario, se trata de un sistema elástico limitado, para su interior habrá que aplicar las tres ecuaciones (1); mas para la superficie, los valores de u, v, w deberán satisfacer á otras tres ecuaciones,

$$\begin{aligned} Pl &= N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma, \\ Pm &= N_2\beta + T_1\gamma + T_3\alpha, \\ Pn &= N_3\gamma + T_2\alpha + T_1\beta, \end{aligned} \qquad (2)$$

que expresan el equilibrio de un punto cualquiera de la superficie; ó mejor dicho, el equilibrio de un tetraedro sumamente pequeño cuya base está en dicha superficie y en que las otras tres caras son paralelas á los planos coordenados.

En estas ecuaciones (2),

P representa la fuerza que actúa en cada punto de la superficie y está referida á la unidad de área;

α, β, γ son los cosenos de los ángulos, que dicha fuerza forma con los tres ejes coordenados; y es claro que, en general, P, α, β, γ, serán funciones de x, y, z.

Por último, N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, se expresan por las siguientes ecuaciones:

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu \frac{du}{dx}, \quad T_1 = \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right),$$

$$N_2 = \lambda\theta + 2\mu \frac{dv}{dy}, \quad T_2 = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right),$$

$$N_3 = \lambda\theta + 2\mu \frac{dw}{dz}, \quad T_3 = \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right),$$

y substituyendo estas expresiones en el grupo (2), se convertirá éste en tres ecuaciones, en diferenciales parciales de *primer orden* de u, v, w, con relación á x, y, z.

La solución del problema consistirá, como tantas veces hemos explicado, en buscar para u, v, w, tres funciones de x, y, z, que satisfagan á las tres ecuaciones (1) convirtiéndolas en identidades $0 = 0$; y que contengan el número de constantes arbitrarias ó de funciones arbitrarias en x, y, que satisfagan al grupo (2): de suerte que, substituídas estas expresiones de u, v, w, en este último grupo, lo conviertan, como al grupo (1), en otras tres identidades $0 = 0$.

Abreviadamente se trata de buscar valores de v, x, w, que satisfagan á las seis ecuaciones (1) y (2).

Claro es que para este último grupo siempre se podrá eliminar z, porque ésta se deduce de la ecuación de la superficie límite,

$$S(x, y, z) = 0,$$

en función de las otras dos variables x, y.

Para el caso del movimiento, podríamos repetir lo que precede, con algunas modificaciones, agregando á las tres ecuaciones del grupo (1) las componentes de las fuerzas de inercia.

Y ahora vamos, según dijimos al principio, á presentar una serie de ejemplos, que esclarezcan la teoría general.

***

PRIMER EJEMPLO. *Compresión normal y uniforme.*

Sea un sistema elástico sometido en toda su superficie á una presión normal y uniforme P.

Suponemos, por lo tanto, que el sistema es limitado; además, que las fuerzas exteriores que actúan sobre el interior no existen, de suerte que hasta del peso del sistema prescindimos; y, por último, que la fuerza sobre la superficie es una compresión P uniforme, es decir, la misma por unidad de área. Cambiando el signo, claro es que podría ser una tracción.

Las tres ecuaciones generales del grupo (1) se simplifican; porque como suponemos, que las fuerzas sobre el interior son nulas, para cada punto interior del cuerpo tendremos:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0;$$

con lo cual las ecuaciones del grupo (1) se reducirán á las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\Delta u = 0, \\ (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dy} + \mu\Delta v = 0, \\ (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dz} + \mu\Delta w = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

Debemos integrar estas tres ecuaciones, ó si no sabemos integrarlas en general, debemos buscar soluciones particulares que tengan generalidad suficiente para satisfacer al grupo (2).

Ahora bien, como en este grupo (2) no entran más que constantes, porque la fuerza sobre la superficie lo es, *ocurre* que acaso bastará, que en estas integrales particulares no entren más que constantes arbitrarias.

Por otra parte, se ve desde luego, que si la u, v, w no contuviesen más que funciones lineales de x, y, z, al diferenciarlas dos veces, las derivadas segundas serían cero, y como en las ecuaciones (1′) no entran más que derivadas segundas en todos los términos, dichas ecuaciones se anularían.

Esto induce á *suponer* para u, v, w, estos tres valores:

$$u = ax, \quad v = ay, \quad w = az,$$

en que a es una constante arbitraria.

Las expresiones anteriores son el resultado de una hipótesis, de una intuición pudiéramos decir, y hay que ensayar si dichos valores de u, v, w satisfacen en efecto á los grupos (1′) y (2).

Se trata, como decimos, de un *ensayo*, que si sale bien, tendrá fuerza de demostración; y si sale mal, nos obligará á cambiar la forma de u, v, w.

Pongamos á prueba, pues, los valores expresados.

Las ecuaciones (1′) desarrolladas, es decir, substituyendo en ellas por θ y Δu, Δv, Δw, sus valores darán:

$$(\lambda + \mu)\frac{d\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)}{dx} + \mu\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) = 0,$$

$$(\lambda + \mu)\frac{d\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)}{dy} + \mu\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right) = 0,$$

$$(\lambda + \mu)\frac{d\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)}{dz} + \mu\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right) = 0,$$

ó bien, no escribiendo más que la primera, porque lo que de ésta vamos á decir, pudiéramos repetirlo para las otras:

$$(\lambda + \mu)\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dxdy} + \frac{d^2w}{dxdz}\right) +$$
$$+ \mu\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) = 0.$$

Pero de los valores supuestos, $u = ax$, $v = ay$, $w = az$, se deduce diferenciando,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2u}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2v}{dxdy} = 0,$$
$$\frac{d^2w}{dxdz} = 0;$$

luego esta primera ecuación queda satisfecha y se reduce á la entidad $0 = 0$.

Los mismos resultados se obtienen para las dos ecuaciones restantes.

De donde se deduce que los valores expresados de u, v, w satisfacen á las ecuaciones (1').

Veamos ahora si pueden satisfacer á las ecuaciones (2) merced á la indeterminación de la constante arbitraria a.

Las ecuaciones (2), recordando que la fuerza P es normal á la superficie y hacia el interior, y que por lo tanto los cosenos i, m, n de los ángulos que forma con los tres ejes son iguales numéricamente y de signo contrario á α, β, γ; es decir, que $l = -\alpha$, $m = -\beta$, $n = -\gamma$ se reducen á

$$-P\alpha = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma,$$
$$-P\beta = N_2\beta + T_1\gamma + T_3\alpha,$$
$$-P\gamma = N_3\gamma + T_2\alpha + T_1\beta;$$

y sólo nos resta determinar los valores de la N, T y substituirlos en las ecuaciones anteriores.

Para ello, de los tres valores $u = ax$, $v - ay$, $w = az$, deduciremos las derivadas que entran en las N y T, que serán las siguientes:

$$0 = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = a + a + a = 3a;$$

$$\frac{du}{dx} = a; \quad \frac{dv}{dy} = a; \quad \frac{dw}{dz} = a;$$

$$\frac{dw}{dy} = 0; \quad \frac{dv}{dz} = 0; \quad \frac{du}{dz} = 0; \quad \frac{dw}{dx} = 0;$$

$$\frac{dv}{dx} = 0; \quad \frac{du}{dy} = 0;$$

De modo que,

$$N_1 = 3\lambda a + 2\mu a = (3\lambda + 2\mu)a,$$
$$N_2 = (3\lambda + 2\mu)a,$$
$$N_3 = (3\lambda + 2\mu)a,$$
$$T_1 = 0; \quad T_2 = 0; \quad T_3 = 0;$$

y las ecuaciones (2) se reducen á

$$-P\alpha = (3\lambda + 2\mu)a\alpha,$$
$$-P\beta = (3\lambda + 2\mu)a\beta,$$
$$-P\lambda = (3\lambda + 2\mu)a\gamma.$$

Es decir, á una sola

$$-P = (3\lambda + 2\mu)a.$$

Luego basta dar á la constante arbitraria a el valor deducido de esta ecuación, para que ella, ó mejor dicho, las tres del grupo (2), queden satisfechas.

Tendremos, pues,

$$a = \frac{-P}{3\lambda + 2\mu}.$$

Así, pues, las componentes de los desplazamientos serán iguales, para cualquier punto de coordenadas x, y, z, á los valores determinados por las siguientes ecuaciones:

$$u = -\frac{P}{3\lambda + 2\mu}x; \quad v = -\frac{P}{3\lambda + 2\mu}y;$$
$$w = -\frac{P}{3\lambda + 2\mu}z.$$

El problema queda completamente resuelto, toda vez que las expresiones anteriores satisfacen á los grupos (1) y (2), es decir, al equilibrio del interior del cuerpo y al equilibrio de la superficie.

Respecto á los esfuerzos interiores, ya los hemos determinado; para cualquier punto son

$$N_1 = N_2 = N_3 = (3\lambda + 2\mu)\,a; \quad T_1 = T_2 = T_3 = 0;$$

y poniendo a por su valor $-\dfrac{P}{3\lambda + 2\mu}$:

$$N_1 = N_2 = N_3 = (3\lambda + 2\mu)\frac{-P}{3\lambda + 2\mu} = -P.$$

En el interior no exísten más que presiones iguales á la de la superficie y fuerzas de resbalamiento nulas; no hay resbalamiento.

Y esto dicen casi todos los autores al resolver el problema elemental que acabamos de exponer, y no dicen más.

Pero es conveniente que los principiantes se fijen en una

porción de puntos, que con ser el problema tan sencillo, tan elemental, son dignos de consideración, sin embargo, para los que por primera vez estudian esta materia.

***

Observaciones sobre el problema precedente. — 1.ª Recordarán los que han seguido estas conferencias, que en una de ellas dijimos, que para el *equilibrio* de un sistema elástico no podían escogerse arbitrariamente las fuerzas exteriores X, Y, Z ..... ni las fuerzas P, ni existían estas últimas.

Suponiendo que se llegara al equilibrio elástico, el cuerpo podría considerarse como un cuerpo sólido; pero cuando sobre un cuerpo sólido actúan varias fuerzas, para que exista equilibrio, es preciso que se verifiquen seis ecuaciones de condición, á saber: que las tres componentes paralelas á los ejes sean iguales á cero, y que los tres pares correspondientes á los tres planos coordenados sean iguales á cero también.

Esto es lo que sucede en el ejemplo que acabamos de

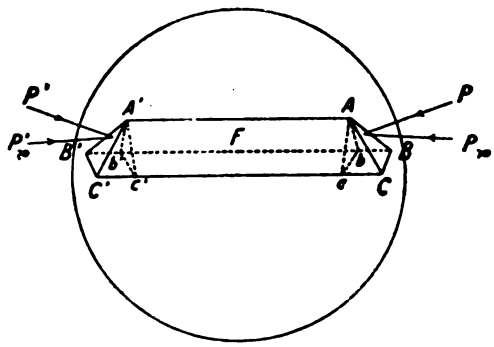


Figura 43.

presentar. La cuestión es tan elemental, que nos contentaremos con una ligera indicación.

Imaginemos dividido el cuerpo en filetes sumamente estrechos, paralelos, por ejemplo, al eje de las x. Su sección puede ser cualquiera, y admitiremos que es triangular.

Sea el filete F (fig. 43).

Y supongamos, que corta á la superficie del cuerpo según dos triángulos, que serán próximamente rectilíneos, $A\,B\,C$, y $A'\,B'\,C'$, de modo que ambos pertenecerán á la superficie del cuerpo.

Representaremos por $P = P'$ las presiones por unidad de superficie sobre ambos triángulos, y llamando ω y ω' á sus áreas, tendremos, puesto que $P = P'$,

$$\text{presión sobre } A\,B\,C = P\omega,$$
$$\text{presión sobre } A'B'C' = P\omega'.$$

Si cortamos el prisma por dos secciones rectas, $A\,b\,c$ y $A'\,b'\,c'$, que serán evidentemente iguales, la componente paralela á las aristas del prisma ó sea el eje de las x, que llamaremos P_x, tendrá por valor,

$$P\omega\,.\cos(P, P_x);$$

y la P' será asimismo

$$P\omega\,.\cos(P', P'_x).$$

Ahora bien, como el ángulo de P y P_x es el mismo que el de las caras $A\,B\,C$, $A\,b\,c$, toda vez que P es normal á $A\,B\,C$, y P_x, normal á $A\,b\,c$, resultará que

$$\omega\,.\cos(P, P_x)$$

será el área de $A\,b\,c$, proyección de $A\,B\,C$ sobre el plano normal al prisma, y llamándola Ω, tendremos

$$P_x = P\omega\cos(P, P_x) = P\Omega.$$

Del mismo modo

$$P'_x = P\omega' \cos P' P'_x = P\Omega.$$

Luego las dos componentes paralelas á las aristas del prisma son iguales y contrarias; ni dan una resultante, ni dan un par resultante.

Lo mismo podemos decir de todos los filetes paralelos al eje de las x y aun de todos los filetes en que dividamos el cuerpo paralelamente á los otros dos ejes.

***

2.ª Como las componentes de los desplazamientos son de esta forma:

$$u = ax, \quad v = ay, \quad w = az;$$

ó de otro modo, como todas las coordenadas de todos los puntos del cuerpo varían en la misma proporción, determinada por la constante a, claro es que el sistema deformado constituirá un sistema de puntos semejante al primitivo, en que *el origen* será el centro de semejanza, puesto que para $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ resulta $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$.

En efecto, tracemos desde dicho origen una recta cualquiera r, á un punto del sistema: su longitud será

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

antes de la deformación, y después de ésta, las tres coordenadas x, y, z, se habrán convertido en

$$x + u = x + ax = x(1 + a); \quad y + v = y(1 + a);$$
$$z + w = z(1 + a).$$

El punto deformado continuará en la recta r, porque

$$\frac{x+u}{x}=\frac{y+v}{y}=\frac{z+w}{z}=1+a,$$

y la nueva longitud tendrá por valor

$$r'=\sqrt{x^2(1+a)^2+y^2(1+a)^2+z^2(1+a)^2}=$$
$$=(1+a)\sqrt{x^2+y^2+z^2}=(1+a)r;$$

de modo que todas las rectas r conservarán la misma dirección y variarán acortándose, puesto que a es negativa, en la relación de $1+a$ á 1.

Esto supone, como hemos dicho, que $a=\frac{-P}{3\lambda+2\mu}$ es negativa; es decir, que $3\lambda+2\mu$ es positiva.

***

Al que por primera vez estudia estas materias, es muy posible que le asalte una duda.

Como en los valores de u, v, w, para $x=0$, $y=0$, $z=0$, las componentes de los desplazamientos se reducen también á cero, resulta que el origen de coordenadas queda fijo.

Pero ninguna condición previa determina cuál deba ser en el cuerpo el origen de coordenadas.

Cualquier punto puede tomarse como origen; luego cualquier punto del cuerpo puede tener un desplazamiento nulo; resultando verdaderamente extraño, porque de aquí resultan infinitas soluciones para el problema analítico y una gran indeterminación para el problema físico.

La objeción, por sencilla que sea, se enlaza con otro problema de la Elasticidad de verdadera importancia.

Y de todas maneras, la solución propuesta se ve que no es única.

Pero esto se ve directamente, porque si á los tres valores de u, v y w, se les agregan tres constantes: h_1, h_2, h_3, los nuevos valores

$$u = h_1 + ax; \quad v = h_2 + ay; \quad w = h_3 + az,$$

se observa desde luego que satisfacen á las seis ecuaciones (1) y (2), puesto que en las diferenciaciones desaparecen las tres constantes h.

Mas esto se explica; porque al cuerpo, después de las deformaciones, es lícito considerarlo como un cuerpo sólido, al cual se le puede comunicar un movimiento de traslación, que supondremos infinitamente pequeño, y cuyas tres componentes sean h_1, h_2, h_3.

De donde resulta que los desplazamientos totales se compondrán de los desplazamientos elásticos representados por ax, ay, az, y de los de movimiento de traslación.

Ahora bien, en el movimiento de traslación se puede hacer que cualquier punto vuelva á la posición que tenía al principio, con lo cual podría servir de origen para expresar los valores ax, ay, az.

Realmente, los desplazamientos elásticos, ó sean sus componentes, serán ax, ay, az; y h_1, h_2, h_3 no indicarán más que un movimiento del cuerpo ya deformado é invariable: no son verdaderos desplazamientos elásticos.

Por lo demás, siempre la forma del cuerpo deformado será la misma, es decir, semejante al primitivo en la relación $\frac{a+1}{1}$; la única diferencia entre unas y otras soluciones será que ocupará el sistema posiciones distintas en el espacio.

En realidad, estos nuevos movimientos son arbitrarios y artificiosos, y no entran en los datos del problema; si de

ellos se prescinde, el punto fijo será único y determinado; á saber, el centro de gravedad.

***

Pero hay más: al cuerpo ya deformado, y por lo tanto, convertido en un sólido invariable, un sólido de la Geometría pura, no sólo se le puede comunicar un movimiento de traslación, sino dos movimientos combinados, como se sabe por Cinemática, á saber: un movimiento de traslación, arbitrario, aunque suponemos que sea infinitamente pequeño, cuyas componentes hemos representado por h_1, h_2, h_3; y también un movimiento de rotación alrededor de un eje cualquiera, que será, como se sabe, la componente de tres rotaciones alrededor de los tres ejes, rotaciones que representaremos por ω_x, ω_y, ω_z.

En Cinemática se demuestra, y la demostración es elemental, que las componentes de la rotación total proyectadas sobre los ejes tienen por valores.

$$\omega_y z - \omega_z y,$$
$$\omega_z x - \omega_x z,$$
$$\omega_x y - \omega_y x.$$

Pues estas cantidades pueden agregarse á su vez para obtener un desplazamiento general; de suerte que los tres desplazamientos podrán ser:

$$u = h_1 + ax + \omega_y z - \omega_z y;$$
$$v = h_2 + ay + \omega_z x - \omega_x z;$$
$$w = h_3 + az + \omega_x y - \omega_y x.$$

Tales expresiones satisfacen evidentemente al grupo (1),

porque todas las derivadas segundas de u, v, w se reducen á cero.

Vamos á ver que también satisfacen al grupo (2).

Empecemos por calcular las N y las T; para ello diferenciaremos u, v y w con relación á x, y, z, y tendremos:

$$\frac{du}{dx} = a; \quad \frac{dv}{dy} = a; \quad \frac{dw}{dz} = a;$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} + \frac{dw}{dz} - \theta = 3\,a;$$

$$\frac{du}{dy} = -\omega_z; \quad \frac{du}{dz} = +\omega_y; \quad \frac{dv}{dx} = +\omega_z;$$

$$\frac{dv}{dz} = -\omega_x; \quad \frac{dw}{dy} = +\omega_x; \quad \frac{dw}{dx} = -\omega_y,$$

y substituyendo estos valores en las N y las T, resultará:

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx} = 3\lambda a + 2\mu a = (3\lambda + 2\mu)\,a:$$

$$T_1 = \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{du}{dz}\right) = \mu\,(\omega_x - \omega_x) = 0;$$

$$N_2 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dv}{dz} = 3\lambda a + 2\mu a = (3\lambda + 2\mu)\,a;$$

$$T_2 = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right) = \mu\,(\omega_y - \omega_y) = 0;$$

$$N_3 + \lambda\theta + 2\mu\frac{d\omega}{dz} = 3\lambda a + 2\mu a = (3\lambda + 2\mu)\,a;$$

$$T_3 = \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right) = \mu\,(\omega_z - \omega_z) = 0;$$

que substituyendo en el grupo (2) convierte todas sus ecuaciones en identidades, si se da á a el valor que antes hemos determinado.

Resulta, pues, que tres traslaciones y tres rotaciones infinitamente pequeñas, considerando al cuerpo elástico después de las deformaciones elásticas como un cuerpo sólido, satisfacen á las seis ecuaciones del equilibrio.

Por lo tanto, los valores u, v, w,

$$u = h_1 + ax + \omega_y z - \omega_z y;$$
$$v = h_2 + ay + \omega_z x - \omega_x z;$$
$$w = h_3 + az + \omega_x y - \omega_y x,$$

que son más generales que los primitivos

$$u = ax, \quad v = ax, \quad w = ax,$$

que eran

$$u = -\frac{P}{3\lambda + 2\mu} x, \quad v = -\frac{P}{3\lambda + 2\mu} y,$$
$$w = -\frac{P}{3\lambda + 2\mu} z,$$

satisfacen á las ecuaciones de la Elasticidad (1) y (2).

Mas en rigor, sólo estos valores primitivos representan deformaciones elásticas; las restantes significan *cambio de posición*, pero no cambio en la estructura del sistema, como indicamos antes.

Igual generalización puede aplicarse á todos los problemas del equilibrio, y de este modo, los valores de u, v, w forman una serie de grupos que se dicen equivalentes.

3.ª Otra observación más que tiene también mucha importancia:

Hemos encontrado una solución para el cálculo de las deformaciones ó desplazamientos elásticos:

$$u = ax; \quad v = ay; \quad w = az,$$

Y prescindiendo de los desplazamientos, que correspondan á movimientos totales de traslación ó rotación, se presenta en este ejemplo, que estamos tratando, como se presentaría en otro cualquiera, el siguiente problema que hemos enunciado muchas veces: la solución de estos problemas del equilibrio elástico, ¿es única para cada caso, ó puede haber muchas soluciones?

En el problema físico, *parece* que el instinto de la realidad y la fijeza, ó unidad por decirlo así, de las leyes naturales, nos dicen que la solución es única; pero la solución analítica, ¿lo será también? ¿Irán de acuerdo perfecto el problema físico y el cálculo matemático?

Esto no parece evidente, y bueno sería demostrar por el análisis, que la solución es única, es decir, la que hemos encontrado.

Séannos, pues, permitidas, sobre este objeto, las siguientes observaciones que nos ocurren:

Supongamos, que en el ejemplo que estamos tratando, se han encontrado dos soluciones para las deformaciones elásticar:

$$u,\ x,\ w$$

y

$$u_1,\ v_1,\ w_1,$$

y representemos sus diferencias por U, V, W.

De modo que

$$u_1 - u = U;\quad v_1 - v = V;\quad w_1 - w = W.$$

Puesto que u, v, w son una solución del problema, satisfarán á las ecuaciones del grupo (1) que escribiremos en forma desarrollada:

$$(\lambda + \mu)\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dydx} + \frac{d^2w}{dzdx}\right) +$$

$$+\mu\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)=0,$$

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{d^2u}{dydx}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2w}{dydz}\right)+$$

$$+\mu\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right)=0,$$

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{d^2u}{dzdx}+\frac{d^2v}{dydz}+\frac{d^2w}{dz^2}\right)+$$

$$+\mu\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right)=0.$$

Pero como u_1, v_1, w_1 son también soluciones del problema, también satisfarán á las mismas ecuaciones, y tendremos:

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{d^2u_1}{dx^2}+\frac{d^2v_1}{dydx}+\frac{d^2w_1}{dzdx}\right)+$$

$$+\mu\left(\frac{d^2u_1}{dx^2}+\frac{d^2u_1}{dy^2}+\frac{d^2w_1}{dz^2}\right)=0,$$

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{d^2u_1}{dydx}+\frac{d^2v_1}{dy^2}+\frac{d^2w_1}{dydz}\right)+$$

$$+\mu\left(\frac{d^2v_1}{dx^2}+\frac{d^2v_1}{dy^2}+\frac{d^2v_1}{dz^2}\right)=0,$$

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{d^2u_1}{dzdx}+\frac{d^2v_1}{dydz}+\frac{d^2w_1}{dz^2}\right)+$$

$$+\mu\left(\frac{d^2w_1}{dx^2}+\frac{d^2w_1}{dy^2}+\frac{d^2w_1}{dz^2}\right)=0.$$

Restando del grupo anterior éste, ecuación por ecuación, y no escribiendo más que la primera para abreviar la escritura, resultará:

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{d^2(u_1-u)}{dx^2}+\frac{d^2(v_1-v)}{dxdy}+\frac{d^2(w_1-w)}{dxdz}\right)+$$
$$+\mu\left(\frac{d^2(u_1-u)}{dx^2}+\frac{d^2(u_1-u)}{dy^2}+\frac{d^2(u_1-u)}{dz^2}\right)=0,$$

. . . . . .

. . . . . .

ó bien:

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda+\mu)\left(\dfrac{d^2U}{dx^2}+\dfrac{d^2V}{dxdy}+\dfrac{d^2W}{dxdz}\right)+\\ \quad+\mu\left(\dfrac{d^2U}{dx^2}+\dfrac{d^2U}{dy^2}+\dfrac{d^2U}{dz^2}\right)=0.\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\ (1'')$$

Estas ecuaciones demuestran que U, V, W son una solución del grupo (1) como era natural, en virtud del principio de la superposición de efectos. Si u, v, w; u_1, v_1, w_1 son dos soluciones, su suma ó diferencia lo será también.

Una cosa análoga podemos decir para las ecuaciones relativas á los límites.

Supongamos que los valores de T y N para la solución u, v, w sean, según las fórmulas generales,

$$V_1=\lambda\theta+2\mu\frac{du}{dx}=\lambda\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)+2\mu\frac{du}{dx};$$
$$T_1=\mu\left(\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz}\right);$$

. . . . . .

. . . . . .

y para las soluciones u_1, v_1, w_1,

$$N'_1 = \lambda\left(\frac{du_1}{dx} + \frac{dv_1}{dy} + \frac{dw_1}{dz}\right) + 2\mu\,\frac{du_1}{dx};$$

$$T'_1 = \mu\left(\frac{dw_1}{dy} + \frac{dv_1}{dz}\right);$$

. . . . . .

. . . . . .

Restando las segundas de las primeras, y haciendo

$$N'_1 - N_1 = n_1;\ N'_2 - N_2 = n_2;\ N'_3 - N_3 = n_3\ T'_1 - T_1 = t_1,$$
$$T'_2 - T_2 = t_2,\ T'_3 - T_3 = t_3,$$

tendremos

$$n_1 = \lambda\left(\frac{d(u_1 - u)}{dx} + \frac{d(v_1 - v)}{dy} + \frac{d(w_1 - w)}{dz}\right) +$$
$$+ 2\mu\,\frac{d(u_1 - u)}{dx};\quad t_1 = \mu\left(\frac{d(w_1 - w)}{dy} + \frac{d(v_1 - v)}{dz}\right);$$

. . . . . .

. . . . . .

ó bien

$$\left.\begin{aligned}
n_1 &= \lambda\left(\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz}\right) + 2\mu\,\frac{dU}{dx};\\
t_1 &= \mu\left(\frac{dW}{dy} + \frac{dV}{dz}\right);\\
n_2 &= \lambda\left(\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz}\right) + 2\mu\,\frac{dV}{dy};\\
t_2 &= \mu\left(\frac{dU}{dz} + \frac{dW}{dx}\right);\\
n_3 &= \lambda\left(\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz}\right) + 2\mu\,\frac{dW}{dz};\\
t_3 &= \mu\left(\frac{dV}{dx} + \frac{dU}{dy}\right).
\end{aligned}\right\}\quad (2'')$$

Por último, aplicando las dos soluciones u, v, w, y u_1, v_1, w_1, á las condiciones de los límites, tendremos también estos dos grupos de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} -P\alpha = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}$$

y

$$\left.\begin{array}{l} -P\alpha = N'_1\alpha + T'_3\beta + T'\gamma, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}$$

y restando unas de otras;

$$\left.\begin{array}{l} 0 = n_1\alpha + t_3\beta + t_2\gamma, \\ 0 = n_2\beta + t_1\gamma + t_3\alpha, \\ 0 = n_3\gamma + t_2\alpha + t_1\beta. \end{array}\right\} \quad (3'')$$

Los tres grupos (1″) (2″) y (3″) expresan el equilibrio en el interior del cuerpo y en la superficie, cuando no existen fuerzas exteriores, puesto que en el grupo (1″) no entran X, Y, Z; cuando no existen tampoco fuerzas en la superficie, toda vez que en el grupo (3″) y en el primer miembro no entra ninguna componente, todos los primeros miembros son cero.

Por lo demás, el grupo (2″) expresa los esfuerzos n y t en un punto cualquiera del interior del cuerpo.

Si en estas condiciones, es decir, no existiendo fuerzas exteriores, y no existiendo fuerza sobre la superficie, hubiéramos querido calcular las componentes de los desplazamientos, éstas serían las ecuaciones que hubiéramos escrito, y U, V, W, hubieran expresado las componentes de dichos desplazamientos.

Pero en las condiciones expresadas, los desplazamientos serían nulos, puesto que no actúan fuerzas sobre el sistema; luego

$$U=0, \quad V=0, \quad W=0,$$

es decir,

$$u=u_1, \quad v=v_1, \quad w=w_1;$$

de modo que la solución primitiva es única.

O cuando más, diferirá una de otra por los desplazamientos que corresponden, según antes explicábamos, á traslaciones y rotaciones del sistema como cuerpo sólido.

Y sin embargo, este razonamiento no convence por completo. Podrá convencer para la cuestión mecánica, pero no para la cuestión analítica, porque el problema se vuelve á plantear aquí como se planteaba al principio.

$U=0$, $V=0$, $W=0$, podrán ser una solución; pero ¿no existirán otras soluciones analíticas que satisfagan á los grupos (1″) y (3″)?

Es el problema primitivo bajo otra forma, y el problema analítico no queda resuelto, ni el teorema queda demostrado.

Demos un paso más.

Supongamos que se ha partido al aplicar las fuerzas X, Y, Z ..... P....., no del *equilibrio inicial* de Mr. Poincaré, sino del *estado natural* de Lamé y otros autores.

Recordemos cómo definen éstos el estado natural:

Mr. Sarraú dice terminantemente: «llamamos *estado natural* de un sistema material, aquel en que *no existe ninguna tensión*». El término *tensión* parece que aquí es genérico; se aplica lo mismo á compresión, que á tracción, que á fuerzas de resbalamiento.

Dice asimismo Mr. Appell en su tratado de Mecánica racional: «Cauchy y Poisson han tratado este problema de la Elasticidad adoptando la hipótesis de las fuerzas centrales, es decir, admitiendo que dos puntos materiales cualesquiera

del medio elástico se atraen ó se rechazan, según una cierta función de sus distancias».

Esta misma hipótesis ha sido adoptada por Lamé, que admite, además, que la acción mutua de dos puntos cualesquiera es nula en el estado natural, y que tales puntos se atraen ó se rechazan según que su distancia es superior ó inferior á la que corresponde á dicho estado natural.

Y continúa diciendo Mr. Appell: «Esta hipótesis de Lamé es mucho más restrictiva, que la que nosotros hacemos aquí, admitiendo que los esfuerzos interiores son nulos en el estado natural; puesto que nosotros suponemos únicamente, que las fuerzas interiores que obran sobre un punto material del sistema tienen una resultante nula en el estado natural, y no que ellas son nulas separadamente, como supone Lamé».

Prescindiendo de algunas reflexiones, que nos sugieren los párrafos que acabamos de traducir literalmente, se ve desde luego que aplicando á las ecuaciones (1″), (2″), (3″) al *estado natural*, las n y t, podrá suponerse que son nulas, y tendremos las ecuaciones siguientes para determinar U, V, W:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \lambda\left(\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz}\right)+2\mu\frac{dU}{dx};\\
0 &= \mu\left(\frac{dW}{dy}+\frac{dV}{dz}\right);\\
0 &= \lambda\left(\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz}\right)+2\mu\frac{dV}{dy};\\
0 &= \mu\left(\frac{dU}{dz}+\frac{dW}{dx}\right);\\
0 &= \lambda\left(\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz}\right)+2\mu\frac{dW}{dz};\\
0 &= \mu\left(\frac{dV}{dx}+\frac{dU}{dy}\right);
\end{aligned}\right\}\ (a)$$

Las tres primeras pueden ponerse bajo esta forma:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{dU}{dx} + \lambda\frac{dV}{dy} + \lambda\frac{dW}{dz} = 0,$$
$$\lambda\frac{dU}{dx} + (\lambda + 2\mu)\frac{dV}{dy} + \lambda\frac{dW}{dz} = 0,$$
$$\lambda\frac{dU}{dx} + \lambda\frac{dV}{dy} + (\lambda + 2\mu)\frac{dW}{dz} = 0.$$

Son tres ecuaciones de primer grado, suponiendo que las incógnitas sean

$$\frac{dU}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dW}{dz},$$

y sin segundo término.

De suerte que á menos de no tener las constantes λ y μ valores tales, que la determinante de los coeficientes sea nula, deduciremos de ellas,

$$\frac{dU}{dx} = 0, \frac{dV}{dy} = 0, \frac{dW}{dz} = 0.$$

Lo cual nos demuestra que U sólo contiene las variables y, z, toda vez que la derivada con relación á x es cero; que V sólo contiene á las variables x, z, y que W no puede contener más que las variables x, y.

Además, diferenciando por relación á x la segunda ecuación del grupo (a), después de suprimir μ; por relación á y la cuarta, y por relación á z la última, tendremos:

$$\frac{d^2W}{dxdy} + \frac{d^2V}{dxdz} = 0,$$
$$\frac{d^2U}{dydz} + \frac{d^2W}{dydx} = 0,$$
$$\frac{d^2V}{dxdz} + \frac{d^2U}{dzdy} = 0.$$

De estas ecuaciones se deduce inmediatamente, porque son ecuaciones de primer grado con las incógnitas,

$$\frac{d^2U}{dydz}, \frac{d^2V}{dxdz}, \frac{d^2W}{dxdy},$$

que debe tenerse:

$$\frac{d^2U}{dzdy} = 0; \quad \frac{d^2V}{dxdz} = 0; \quad \frac{d^2W}{dxdz} = 0.$$

Integrando la primera con relación á y,

$$\frac{dU}{dz} = C,$$

en que C no podrá contener la variable y, que es la de la integración, sino la x y la z; pero como tampoco puede contener la variable x, porque no la contiene U, sólo podrá ser una función de z. Llamándola $\varphi'_1(z)$, resulta:

$$\frac{dU}{dz} = \varphi_1'(z).$$

Integrando otra vez con relación á z, tendremos:

$$U = f\varphi_1'(z)\,dz + C_1 = \varphi_1(z) + C_1.$$

C_1 no puede contener más que la x y la y, porque la z es la variable de la integración; y como tampoco puede contener x porque no la contiene U, sólo podrá ser una función de y, que la representaremos por $f_1(y)$. Así, pues,

$$U = f_1(y) + \varphi_1(z),$$

lo cual era casi evidente *à priori*.

Repitiendo esto mismo para $\frac{d^2V}{dxdz}$ y $\frac{d^2W}{dxdy}$ obtendremos

$$U = f_1(y) + \varphi_1(z),$$
$$V = f_2(z) + \varphi_2(x),$$
$$W = f_3(x) + \varphi_3(y).$$

Substituyendo estos valores en las ecuaciones segunda, cuarta y última de (*a*), tendremos:

$$\varphi'_3(y) + f'_2(z) = 0 \quad ó \quad \varphi'_3(y) = -f'_2(z),$$
$$\varphi'_1(z) + f'_3(x) = 0 \quad ó \quad \varphi'_1(z) = -f'_3(x),$$
$$\varphi'_2(x) + f'_1(y) = 0 \quad ó \quad \varphi'_2(x) = -f'_1(y).$$

Pero las tres últimas ecuaciones no pueden subsistir si entran las variables x, y, z, porque como son variables independientes, no pueden estar ligadas por ninguna ecuación. No hay manera de satisfacerlas, sino reduciéndose ambos miembros á una constante.

Representando estas constantes por ω_x, ω_y, ω_z para que las notaciones resulten conformes con las que antes hemos adoptado, resulta:

$$\varphi'_3(y) = \omega_x \text{ é integrando } \varphi_3(y) = \omega_x y + \text{constante.}$$
$$-f'_2(z) = \omega_x, \text{ de donde } f_2(z) = -\omega_x z + \text{constante.}$$
$$\varphi_1(z) = \omega_y x + \text{constante;}$$
$$f_3(x) = -\omega_y x + \text{constante;}$$
$$\varphi_2(x) = \omega_z x + \text{constante;}$$
$$f_1(y) = -\omega_z y + \text{constante.}$$

Poniendo estos valores en los de U, V, W, y llamando U_0, V_0, W_0 á las constantes definitivas,

$$U = \omega_y z - \omega_z y + U_0,$$
$$V = \omega_z x - \omega_x z + V_0,$$
$$W = \omega_x y - \omega_y x + W_0.$$

La demostración que precede está tomada de la obra de Mr. Poincaré sobre la Elasticidad; pero el ilustre autor sólo emplea la demostración á que nos referimos con el objeto de hacer ver que, si las dilaciones y los deslizamientos son nulos, el cuerpo se moverá á la manera de un sólido invariable.

Nuestro objeto, en cierto modo, es distinto, como ya hemos indicado al comienzo; nos proponíamos probar, que si en un cuerpo elástico en estado natural los esfuerzos interiores, es decir, las T y N son iguales á cero, las componentes de los desplazamientos sólo pueden ser las que resultan por los movimientos de traslación y de rotación del cuerpo, como si fuera un sólido invariable.

Pero recordemos que U, V y W representan las diferencia $u_1 - u$, $v_1 - v$, $w_1 - w$; y resulta que, si no son iguales ambas soluciones, u_1, v_1, w_1; u, v y w, sólo podrán diferir por un movimiento total de traslación y rotación.

Que es como si dijéramos, que *la solución relativa á desplazamientos elásticos es única*, al menos en este ejemplo que estamos considerando.

Por lo demás, es evidente, que el mismo método de demostración podríamos emplear, y al mismo resultado de una solución única llegaríamos en el caso general, dado que existiesen X, Y, Z..... y P.

Parece, pues, resultar que en el equilibrio elástico es única la solución.

***

Pero este resultado, ¿es tan general y tan exacto como hemos indicado provisionalmente?

La pregunta da lugar á varias observaciones.

En primer lugar, las condiciones iniciales á que esté sujeto el sistema, pueden ser distintas de las indicadas; por ejemplo, puede haber puntas fijos ó empotramientos, y éstos exigirían nuevas demostraciones.

Pero además, y esto es aún más importante, hemos partido de *una hipótesis*, admitida bajo la autoridad de autores respetables, pero que despierta algunas dudas, y sobre todo, que no es *condición analítica:* es condición mecánica.

Hemos dicho: existe, al menos teóricamente, para todo cuerpo elástico un *estado natural* en el cual las N y T son cero.

Y prescindimos de otras hipótesis como la de Lamé, que es muy discutible, pero respecto á la cual nada diremos.

Sin embargo, aun la que hemos admitido, no es evidente: exige una demostración de su posibilidad.

Es decir, consideramos, que es necesario demostrar que en un sistema isótropo (que es el caso de que se trata), puede darse á las masas una distribución geométrica tal, que las N y T sean iguales á cero.

Pudiéramos intentar esta demostración, que habría de ser puramente analítica ó geométrica, y en que no habría más que una incógnita, á saber: distancia media entre cada dos puntos contiguos. Pero aunque la demostración pudiera intentarse estudiando las expresiones,

$$\Sigma mm' f(r)\, dz,\ \Sigma mm' f(r)\, dy,\ \Sigma mm' f(r)\, dz,$$

aun así ocurriría otra duda, y es que la ecuación de donde ha de deducirse esta distancia media, no puede afirmarse que no tenga diversas soluciones, dado que tenga una.

Con lo cual, la demostración que antes dimos caía por su base, porque se fundaba en que el estado natural *era único.*

Ya comprendo que todo esto es muy vago; más por el

motivo expuesto y por el carácter de estas conferencias, no puedo entrar en otros pormenores.

En la próxima continuaremos presentando ejemplos muy sencillos para la aplicación concreta de las fórmulas generales.

VII. — Del modo de expresar la acidez.

POR JUAN FAGES.

Cuando un cuerpo más ó menos complejo (vino, orina, aceites, etc.) contiene varios ácidos libres y no es posible, ó no es necesario, determinarlos separadamente, se mide la acidez total con una solución básica valorada. Para expresar la suma de ácidos presentes, se supone luego que en aquel cuerpo sólo hay un ácido libre, y se calcula su proporción en función de la solución básica empleada para la neutralización. El número resultante expresa la acidez del cuerpo, y así se dice en la práctica: «acidez expresada en ácido sulfúrico, ó en ácido fosfórico, ó en ácido oxálico, etc.»

Este modo de representar la acidez tiene el inconveniente de no ser la expresión de la verdad en ningún caso, y, á veces, ni existe en el cuerpo analizado el ácido elegido. Además no están de acuerdo los químicos en el ácido *patrón*, ni para cuerpos diferentes, analizados por el mismo químico, ni para cuerpos de igual naturaleza, analizados por diferentes químicos. Así resulta expresada la acidez de un mismo cuerpo por números diferentes, según el ácido elegido por cada químico que lo ha analizado.

Considero mucho más racional y conveniente, en la práctica, representar la acidez por lo que es causa de ella, á

saber: *por la proporción de hidrógeno-ión que los ácidos presentes pueden originar.*

Esta manera de expresar la acidez tiene las siguientes ventajas:

1.ª Es la expresión de la verdad, independientemente de toda clase de hipótesis, pues aunque desaparezca la teoría de los iones, el hecho de la existencia del hidrógeno sustituíble por metales en los ácidos será siempre exacto, y es este hidrógeno el que mide la acidez.

2.ª Es la expresión de la acidez como carácter genérico de todos los ácidos, independientemente de la naturaleza concreta de cada uno de ellos. Así, determinar la acidez es equivalente á determinar el cloro-ión ó el sulfato-ión, etcétera, en cloruros ó sulfatos respectivamente, etc., ó el potasio-ión, el cinc-ión, etc., en las sales potásicas, cíncicas, etc.

3.ª Es aplicable á los casos de existir uno solo ó varios ácidos, si lo que interesa es sólo la acidez, independientemente del ácido ó ácidos que la motivan.

4.ª Los resultados númericos de los análisis de acidez serán absolutamente comparables. También lo son expresando la acidez por un ácido determinado, como actualmente se hace; pero como la elección de ácido *patrón* es un convencionalismo sin base seria, resulta lo que ahora ocurre, es decir, desacuerdo entre los químicos en la elección del ácido y desacuerdo consiguiente en los resultados numéricos. Siendo el hidrógeno-ión lo *único* común á todos los ácidos, no caben criterios diversos dentro de lo exacto; la elección del hidrógeno como expresión de la acidez tiene mucho menos de convencional, pues está tan fundada como la del cloro-ión y demás aniones para las diversas sales de un mismo ácido, y la del potasio y demás cationes para las diferentes sales de un mismo metal y adoptadas por todos los químicos.

5.ª La acidez de dos líquidos de naturaleza diferente será directamente comparable. Aunque en la práctica no interesa

comparar, por ejemplo, la acidez de la orina con la del vino, facilita á la memoria recordar los límites ordinarios de acidez de los diversos líquidos el referirlos á la misma unidad.

6.ª Una solución ácida normal será la que contenga, ó pueda originar, un gramo de hidrógeno-ión por litro. Una solución básica normal será la equivalente, á igual volumen, á la solución ácida normal. Así, las soluciones ácidas y alcalinas valoradas tendrán las ventajas de las *normales*, por su mutua equivalencia general á igual volumen, y las ventajas de las soluciones de valoración *empírica*, porque su *valor* resultará expresado por números muy sencillos.

En efecto, un centímetro cúbico de una solución básica normal será equivalente á 0,001 gramo de hidrógeno-ión ó de acidez y, por lo tanto, los centímetros cúbicos de líquido básico normal empleados en neutralizar la acidez de un líquido expresarán inmediatamente, sin cálculo alguno, los miligramos de hidrógeno-ión de dicho líquido y, por lo tanto, su acidez. Resulta también brevísimo, tal vez sin más cálculo que correr la coma, el referir luego la acidez al litro de disolución. Los cálculos, que tanto conviene simplificar y si puede ser evitar, en la práctica analítica, casi desaparecen adoptando el hidrógeno-ión para expresar la acidez.

No recuerdo que esta proposición haya sido hecha por otros químicos. Si ya se ha hecho, uno mi voto y adhesión á la anteriormente formulada.

VIII. — Estudio químico-geognóstico de algunos materiales volcánicos del Golfo de Nápoles (*).

POR RAMÓN LLORD Y GAMBOA

Con el presente trabajo termino, por ahora, el examen de los materiales recogidos durante mi estancia en las regiones volcánicas del golfo napolitano, cuya visita he reseñado en otra parte (**); proponiéndome, si las circunstancias favorecen, seguir aportando nuevos datos analíticos y geológicos de otras comarcas análogas, especialmente italianas, con el objeto de contribuir, aunque en modestísima esfera, al conocimiento del volcanismo europeo.

III

Lava del Vesubio de 1895.

Recogida de la gran corriente iniciada en Julio del referido año, esta lava densa, compacta, dura, muy obscura, está llena de pequeños cristales de leucita. Sus caracteres pirognósticos, iguales á la de 1905, excepción hecha del *fluor*, que pudo reconocerse en cortísima cantidad, por vía seca, en la que ahora se estudia.

La determinación del *cloro* merece especial mención, pues tratado el polvo de la roca con agua, hervida ésta, y examinado el líquido filtrado, limpio y transparente, con ácido ní-

---

(*) Véase el núm. 3 del tomo IV de la REVISTA. Marzo de 1906.
(**) *Boletín de la Real Sociedad de Historia Natural*, Enero, 1906.

trico y nitrato argéntico, apareció manifiesta la reacción de aquel halógeno. Hirviendo después el polvo con ácido nítrico diluído y tratado con el mismo nitrato, la reacción se verificó con mayor intensidad. Este resultado, obtenido en la lava anterior, se repite en casi todos los materiales estudiados:

Acido fosfórico.—Reacción muy manifiesta.

Acidos bórico y *sulfúrico.*—Nada.

Bióxido de titano.—Por vía seca pudo apreciarse en débil cantidad.

El análisis cuantitativo del polvo desecado de la lava dió el siguiente resultado:

SiO_2 hallada.....	47,0620	Silicio = Si.....	21,9622
FeO ídem (*).....	8,0115	Hierro = $Fe + Fe_2$ (ferroso y férrico).....	6,2000
Al_2O_3 ídem.....	19,7829	Aluminio = Al_2.....	10,4733
CaO ídem.....	8,0260	Calcio = Ca.....	5,7300
MgO ídem.....	3,5000	Magnesio = Mg.....	2,0400
K_2O ídem.....	5,7200	Potasio = K_2.....	4,7466
Na_2O ídem.....	3,2915	Sodio = Na_2.....	2,4311
P_2O_5 ídem.....	0,7430	Fósforo = P_2.....	0,3194
$F+Cl+TiO_2$+pérdida	3,8631	Oxígeno total.....	42,2343
	100,0000	Fluor + cloro + titano; pérdida.....	3,8631
			100,0000

Las listas anteriores demuestran la analogía entre esta lava y la recogida en el cráter del Vesubio poco después de expulsada por éste, como puede verse comparando ambos análisis (**). Esta analogía continúa en todas las rocas del mismo origen, según iremos viendo.

(*) El hierro, determinado volumétricamente, está en su casi totalidad *ferroso* en la lava. Calculado en FeO, resulta la cifra de éste un poco distinta de la realidad, pero sin importancia para el resultado final del análisis.

(**) En el análisis de la lava de 1905 hay un error que pasó inadvertido. En donde dice *sosa*, léase *potasa*, y donde *sodio*, *potasio*.

IV

Lava del Vesubio de 1855.

Muy parecida á la anterior en aspecto, dureza, color y densidad, llena también de cristales de leucita, esta lava formó otra gran corriente, de donde proceden los ejemplares estudiados. Sus caracteres pirognósticos son los mismos de las anteriores, dando indicios de *fluor*.

El *cloro* apenas manifestó su presencia en el agua hervida con el polvo de la roca; pero en la disolución nítrica diluída apareció gran enturbiamiento y pequeño precipitado, demostrativos de la existencia del cloro en combinación insoluble en el agua. Más adelante procuraré interpretar estos hechos tan constantes en los materiales eruptivos del Vesubio y Somma.

El análisis cuantitativo del polvo desecado proporcionó los datos siguientes:

SiO_2 hallada	48,9602	Si	22,8482
FeO ídem (*)	10,8367	$Fe + Fe_2$ (ferroso y férrico)	8,4286
Al_2O_3 ídem	16,4883	Al_2	8,7388
CaO ídem	6,7660	Ca	4,8332
MgO ídem	2,0040	Mg	1,2024
K_2O ídem	8,9838	K_2	7,4565
Na_2O ídem	3,1161	Na_2	2,3059
P_2O_5	0,6550	P_2	0,2800
$F + Cl + TiO_2$ + pérdida	2,1899	Oxígeno total	41,7165
		$F + Cl + Ti$ + pérdida	2,1899
	100,0000		100,0000

(*) Hacemos la misma observación que en el análisis anterior.

V

Lava del Vesubio de 1851.

Recogida, como la anterior, en el camino de Resina al Observatorio, de la gran corriente lávica provocada por el paroxismo de 1850-51, ofrece los mismos caracteres de dureza, color, densidad, etc., é iguales resultados pirognósticos. No se pudo comprobar en ésta el *fluor* ni el *titano*. El *cloro* no dió señales sensibles de su presencia en el agua hervida con el polvo; pero en la disolución nítrica diluída apareció, como en las anteriores, muy manifiesto.

Las listas siguientes dan cuenta de la composición centesimal de esta roca:

SiO_2	49,0202	Si	22,8764
FeO (*)	6,6404	$Fe + Fe_2$	5,1648
Al_2O_3	20,1368	Al_2	10,6725
CaO	6,9253	Ca	4,9169
MgO	2,1060	Mg	1,2636
K_2O	10,4845	K_2	8,7022
Na_2O	2,6674	Na_2	1,9738
P_2O_5	0,7182	P_2	0,3078
Cl + pérdida	1,3012	Oxígeno total	42,8208
		Cl + pérdida	1,3012
	100,0000		100,0000

VI

Lava basáltica, piroxénica del Vesubio.

Cenicienta, de estructura porfiroide (salpicada de cristales de piroxeno), dura, compacta, densa, de aspecto basáltico,

(*) Véanse las notas anteriores.

recogida de entre los productos sueltos próximos al gran cono de erupción, esta roca pertenece á las denominadas *cenicientas* del macizo eruptivo Vesubio-Somma.

Caracteres pirognósticos. — Difícilmente fusible sobre el carbón á fuerte llama de *O.*, en esferitas negras, brillantes, no magnéticas (pasta leucítica).

Alambre de platino y sal de fósforo. — Esqueleto silíceo en láminas exagonales de tridimita. Examinada la perla muy caliente, sin estar roja, con una lente, las láminas de tridimita se ven muy bien, pudiéndose apreciar además el color verde algo amarillento de la perla (hierro), que va palideciendo poco á poco si se deja enfriar muy despacio. Con el bórax sólo se reconoce el *hierro.*

Los demás caracteres cualitativos, sensiblemente iguales á los señalados en las lavas estudiadas, incluyendo el *cloro.*

La roca está casi totalmente *ferrosa.*

Sólo se determinó cuantitativamente la *sílice.*

Véase el resultado del análisis:

$$SiO_2 = 49{,}30\ _0/^0.$$

Hierro = $(Fe + Fe_2)$.	Cloro.
Manganeso (ligeros vestigios).	Fósforo = $(P_2\,O_5)$.
Aluminio.	(Oxígeno.)
Calcio.	
Magnesio.	
Potasio.	
Sodio.	

VII

Lava pumítica del Vesubio.

Masas ásperas, cenicientas-agrisadas, de tonos claros, ligeras, aunque con cierta densidad; porosas en grande, es decir, con agujeritos de todas dimensiones, penetrando más

ó menos profundamente en su seno; dirigida su masa en una dirección dominante (estructura fluidal); con cristalitos en gran número diseminados, pertenecientes á los silicatos fundamentales de las lavas (nefelina, piroxeno, olívino, alguna laminita de mica). Es dura pero frágil, pulverizándose fácilmente por estar algo espumosa en su interior.

Caracteres pirognósticos.—Fusible sobre el carbón, más bien en los bordes y en pequeñitas partículas, formando masas vítreas de color gris-verdoso-claro á la lente.

En el alambre de platino con sal de fósforo se observó lo mismo que en la del número anterior.

No se pudo comprobar el *fluor* ni el *ácido sulfúrico.*

La investigación del *cloro* dió iguales resultados que en el análisis anterior.

El *manganeso* demostró su presencia en muy corta cantidad.

Los demás caracteres analíticos, como en las lavas examinadas. El resultado fué el siguiente:

$$SiO_2 = 52{,}90\ \%$$

Hierro (ferroso y férrico).	Cloro.
Manganeso (vestigios).	Fósforo (P_2O_5).
Aluminio.	(Oxígeno.)
Calcio.	
Magnesio.	
Potasio.	
Sodio.	

El examen de esta lista, y especialmente la cantidad de SiO_2 hallada, hacen ver que esta roca se diferencia muy poco de las lavas propiamente dichas del Vesubio, resultando muy básica al comparar su composición y riqueza en sílice con las traquitas y punitas en general, cuyos caracteres exteriores y de estructura presenta no obstante.

VIII

Lava del Somma: Antiguo derrame de la base del monte, próximo á Santa María di Castello (Lagno del Purgatorio).

Dura, áspera, de aspecto traquítico, cenicienta-obscura, tirando algo al color rojizo; finamente porosa, de pasta leucítica, con cristales pequeños diseminados en su masa, al parecer, también de leucita. A la lente toda la roca es cristalina, y la leucita está como fundida, dando brillo vítreo al magma, del que destacan los cristales más ó menos formados de igual especie. Aun siendo finamente porosa, es densa. Raya al vidrio, lo que exige una dureza igual ó superior á 6.

Caracteres pirognósticos.—Fusible á fuerte llama prolongada de *O*. Los demás analíticos, iguales á los de las lavas anteriores, incluyendo el *cloro*.

No se descubrió el *fluor*, quedando en duda la existencia del *titano*.

En el análisis cualitativo se demostró la naturaleza eminentemente *leucítica* de esta roca por el intenso espectro del *potasio* y el muy débil del *calcio*, siendo también muy exigua la porción de *magnesia* obtenida en la marcha analítica.

Se recogieron los datos siguientes:

$$SiO_2 = 45{,}60\ \%$$

Hierro (ferroso y férrico).	Cloro.
Manganeso.	Fósforo = ($P_2\ O_5$).
Aluminio.	(Oxígeno.)
Calcio.	
Magnesio.	
Potasio.	
Sodio.	

Manifiesta esta lava su carácter básico por la cifra indicadora de la *sílice* por 100, y su antigüedad relativa por el estado casi totalmente *férrico* de su hierro, aun cuando no debemos olvidar la influencia posible de varias circunstancias físicas en la rapidez de desagregación de muchas rocas.

IX

Lapilli del Somma. (Depósitos antiguos subiendo por Santa María di Castello.)

Grandes depósitos de *lapilli* negro, pardusco, pardo-negro, con matices amarillentos, verdosos ó verde-azulados, siempre de tonos obscuros, pueden observarse en el Somma, y muchos y muy extensos reconocí al subir por Santa María di Castello, teniendo que marchar grandes trechos sobre estos depósitos movedizos, de espesor variable, que puede alcanzar en algunos sitios varios metros.

De uno de éstos proceden los trocitos recogidos á mitad de altura del monte. Su volumen, en general, varía desde el de un guisante á una nuez.

Esta roca es ligera, porosa, dura, friable, fácilmente pulverizable. Sus caracteres pirognósticos y los demás analíticos no se diferencian de los hallados en las lavas ya conocidas.

Merece especial mención el *hierro*, casi totalmente *ferroso* en este lapilli, siendo digna de atención la persistencia del ferroso en rocas como estas y otras muchas de distinta naturaleza, expuestas durante tantos años á la intemperie, con sus humedades, etc., etc., tratándose en este caso de un material pequeño, suelto y seguramente antiguo, pues estaba situado profundamente en la parte media de la vertiente N. del Somma; el depósito fué descubierto por denudación y tiene apariencia estratificada. Sobre él hay otros posteriores, todo lo cual demuestra su relativa antigüedad.

También debo hacer constar que el *cloro* no existe en combinación soluble en el agua; pero en la disolución nítrica y con nitrato argéntico, produjo fuerte reacción. Este resultado es, pues, general en todos los materiales antiguos y modernos de origen lávico del Vesubio y Somma. A continuación se expresa la lista de materias reconocidas:

$$Si\ O_2 = 50{,}60\ \%$$

Hierro (ferroso y algo férrico.	Cloro.
Manganeso.	Fósforo.
Aluminio.	(Oxígeno.)
Calcio.	
Magnesio.	
Potasio.	
Sodio.	
Agua.	

Esta composición es la de las lavas estudiadas, y demuestra que el *lapilli* es lava dividida y expulsada violentamente por los gases en los momentos eruptivos, cayendo á distancias relativamente cortas y cubriendo al depositarse las partes altas de las laderas ó vertientes de los volcanes. En el Vesubio hay grandes depósitos en las partes superiores del cono, y en el Somma á diversas alturas, aumentando en espesor y extensión en razón directa de la altura.

X

Pumita (pómez) del Somma.

Blanca, muy ligera, flota en el agua, manifestando ser, por su gran porosidad, una *espuma silícea*, penetrada íntimamente por los gases salidos de su seno, habiéndola dejado, al descender la temperatura, en estado de *esqueleto*, formado por los materiales más fijos.

La recogí de un pequeño depósito, situado en la falda del Somma, al comenzar á subir desde Santa María di Castello. Este depósito se halla en un escarpe obligado á cruzar por estar abierta allí la única y estrecha senda que conduce al monte.

Caracteres pirognósticos.—Fusible sobre el carbón en un vidrio blanco.

En el alambre de platino con sal de fósforo, se determinaron el *hierro* y la *sílice.*

No dió señal de *fluor* ni de *ácido sulfúrico.*

El *cloro,* apenas manifestó su presencia en el agua hervida con el polvo de la roca; pero en la disolución nítrica apareció fuertemente.

Débil reacción de *ácido fosfórico.*

Fuerte reacción de *manganeso* por la fusión con los carbonatos alcalinos, y por vía húmeda con el ácido sulfúrico, minio y ácido nítrico hirviente. Esta reacción tan visible del manganeso no era de esperar en una roca tan blanca, espumosa y silícea como ésta.

Poquísima *cal* y *magnesia.*

Presencia del *litio* con el *potasio* y *sodio.*

El hierro *muy ferroso.*

He aquí el resultado de las determinaciones:

$$SiO_2 = 56{,}70\ \%.$$

Hierro = $(Fe + Fe_2)$.	Cloro.
Manganeso.	Fósforo.
Aluminio.	(Oxígeno.)
Calcio.	
Magnesio.	
Potasio.	
Sodio.	
Litio.	

Esta pumita resulta ser de las mas básicas que se conocen, pues por bajo de 60 por 100 de SiO_2 no pertenecen, en

general, á las liparitas espumosas y pumitas traquíticas del comercio. Manifiesta una vez más este resultado químico el carácter básico dominante en la formación volcánica del Somma y de su hijo, el actual Vesubio.

XI

Lava roja, porfiroide del Somma (llamada «lapilli rojo» en la localidad).

Se encuentra en depósitos de trozos sueltos á distintas alturas de las vertientes del Somma, lo mismo que el lapilli estudiado en el núm. IX. —En el pueblo de Somma, la denominan *lapilli rojo;* pero su densidad y estructura porfiroide corresponden de lleno á las lavas. En su masa, finamente porosa, hay diseminados multitud de cristales de *piroxeno* de colores verdes obscuros y algunos claros de tonos amarillentos, en diversos grados de desagregación, alternando con otros cristales de *leucita* y *olivino.* La roca es dura, áspera, de color rojizo (férrica.)

Caracteres pirognósticos.—Fusible en un vidrio negro no magnético. Los demás caracteres, como en las lavas anteriores.

El hierro está casi totalmente *férrico*, como lo indica el color rojizo de la roca. Esta pierde al rojo incipiente hasta 6 por 10 de agua y productos volátiles. Todas las lavas pierden también de su peso en iguales circunstancias.

Los ensayos del *cloro* dieron los mismos resultados ya conocidos. Al contacto con los ácidos, el polvo de esta roca produce ligera efervescencia de CO_2.—La presencia de corta porción de carbonato alcalino-térreo hace sospechar si se tratará de mezcla de rocas diferentes al ser lanzadas y trituradas unas y otras en el acto de las explosiones, formando así una roca mixta, desagregada después lentamente por los

agentes atmosféricos, conservando todavía en gran parte su caracter y tipo originarios, como puede verse actualmente.

El examen microscópico en luz polarizada y natural, puede contribuir á la resolución de éste como de otros muchos problemas de Química geológica.

A continuación se consignan las materias reconocidas:

$$SiO_2 = 48,40\ \%$$

Hierro.	Cloro.
Aluminio.	Fósforo.
Calcio.	Carbono.
Magnesio.	(Oxígeno)
Potasio.	
Sodio.	
Agua.	

XII

Lava compacta, celular, antigua, del Somma.

Cenicienta, de aspecto uniforme, compacta, macroscópicamente considerada, dejando ver á la lente algún cristal de *piroxeno* y *leucita*, y diseminados en su pasta, muy leucítica, laminitas de mica de colores claros. Es dura, no da al tacto la sensación de aspereza de las traquitas. Presenta numerosas celdillas y agujeritos, alargados unas y otros en el sentido de la que fué corriente lávica, abriéndose en una de sus caras. Estas oquedades, de origen gaseoso, no hicieron perder á la lava su densidad porque no la dieron la forma ó estado esponjoso.

Su composición es completamente análoga á todas las demás, y no la transcribo.

XIII

Caliza magnesiana, calcinada, del Somma.

Es un trozo suelto, recogido durante mi ascensión á este monte. Presenta una parte central, visible en una de las caras del ejemplar, presentando el aspecto de las calizas y dolomías compactas, blanco-amarillentas, del terreno terciario sobre el que descansa el macizo eruptivo. Este núcleo central es algo resistente á la punta de acero, y en él se ven, con la lente, puntitos múltiples de materia desagregada, como pulverulentos.

Rodeando á este núcleo central, hay otra porción blanca, blanda, manchadiza, que tizna los dedos, de aspecto cretáceo y puede rasparse con un cuchillo como la tiza vulgar. El análisis cuantitativo de esta porción cretácea, ha dado el siguiente resultado (*):

Carbonato cálcico	88,5666
Magnesia hidro carbonatada	8,9880
Materias extrañas (arcilla ferruginosa)	0,8000
Pérdida	1,6454
	100,0000

Parece ser éste un curioso ejemplo de calcinación, pues el calor debió convertir en cáusticos los carbonatos de calcio y magnesio en una zona, cuya profundidad está relacionada con la intensidad y tiempo de su acción sobre la roca. Después, la cal y magnesia en contacto de la atmósfera se carbonató la cal é hidrocarbonató la magnesia, resultando una

(*) El polvo se disuelve rápidamente en el ácido clorhídrico diluído con efervescencia de CO_2.

mezcla de carbonato cálcico aprisionando al hidrocarbonato magnésico. Así lo indican los cálculos del análisis, y parece comprobarlo la reacción bastante alcalina del polvo de esta parte calcinada de la roca al hervirle con agua.

Con la lente se ven gran número de agujeritos en la superficie, que indican los puntos de salida del CO_2 al calcinarse la roca.

Resumen y comentario de los datos anteriores.

El macizo volcánico Vesubio-Somma, constituído por los elementos generales de toda formación volcánica activa, dotada de aparato eruptivo en toda su extensión, en lo cual se parece, con ligeras variantes, á las formaciones análogas diseminadas por la superficie terrestre, presenta una facies especial, un modo de ser característico, resultantes de la naturaleza química del magma y de otras causas secundarias que contribuyen á dar un sello peculiar al volcanismo de esta región napolitana.

Tiene razón el distinguido geólogo M. Lacroix (*), cuando afirma que todas las rocas del macizo Vesubio-Somma, variables desde el punto de vista petrográfico, presentan un aire de familia notable: «Todas son muy potásicas, dice, encierran leucita ó tienen una composición virtual que permite la formación de la misma especie.» En efecto; todas las observaciones efectuadas hasta hoy, tanto microscópicas como químicas, están conformes sobre este punto, pudiéndose asegurar de un modo general, que la formación volcánica de que se trata es esencialmente básica, derivada, por consiguiente, de un magma rico en metales alcalinos, sobre los que domina el potasio; rico también en hierro, y con cantidades variables de aluminio, calcio y magnesio, componentes

(*) *L'eruption du Vesuve en Avril 1906. — Dans la Revue générale des Sciences du 30 Octobre et 15 Novembre 1906.*

los dos últimos del suelo terciario sobre el que descansa el macizo eruptivo, y los dos primeros con el sodio, de las plagioclasas existentes en sus múltiples productos.

La sílice no pasa, y en general no llega, al 50 por 100 de todos los materiales estudiados hasta hoy, considerados en grande, es decir, materiales constituyentes de grandes derrames, corrientes, etc., incluyendo los macizos mismos que forman los restos del Somma y el actual Vesubio, cuyo conjunto de materiales comprende la casi totalidad de la formación eruptiva. Los análisis verificados de gran número de lavas, escorias, cenizas, lapillis, etc., de esta región, no difieren esencialmente acerca de esto y concuerdan con los efectuados por mí; de donde se deduce que en un larguísimo período de tiempo que se remonta á la época post-terciaria (pleistocena), el carácter químico de los magmas eruptivos de esta zona no ha variado.

No sucede lo propio con su dinamismo, pues, según consigna oportunamente el profesor Lacroix (*) éste dinamismo ha sido y sigue siendo muy variable, semejándose á tipos distintos de volcanismo y recorriendo extensa escala de intensidades de todos los órdenes: explosivas, de corrientes lávicas, de fenómenos eléctricos, de movimientos sísmicos, de proyecciones de toda especie, etc., etc. Las explosiones, en particular, corresponden á todos los tipos admitidos, desde la salida tranquila de la lava como el agua de una fuente (tipo de Hawai: magma basáltico), hasta la *nube ardiente* (tipo de la Montaña Pelada en la Martinica), pasando por los tipos explosivos del Stromboli (stromboliano) y de Vulcano (vulcaniano), pudiéndose anotar todas estas formas de energía dinámica en la curiosísima é instructiva historia del Vesubio.

De lo dicho se desprende que no basta la fijeza de com-

(*) Loc. cit.

posición química de un magma para dar carácter especial á una región volcánica, pues si es cierto que un magma muy básico es más flúido que otro ácido, por ser el primero más fusible, debiendo derramarse con más facilidad y alcanzar, por tanto, sus corrientes grandes longitudes y extensiones, también lo es que diversas circunstancias físicas pueden influir y de hecho influyen modificando la marcha del fenómeno. Tales son la cantidad y altura alcanzada por la lava en los conos volcánicos; la temperatura de las distintas porciones de magma en sentido vertical; las tensiones gaseosas en íntima relación con estas temperaturas; las resistencias internas ó las velocidades iniciales del magna; la masa de éste, absoluta y relativa, etc., circunstancias modificadoras del dinamismo volcánico, hasta el punto de convertir un volcán tranquilo en violento y explosivo, y viceversa. Precisamente la historia del Vesubio nos ofrece repetidos ejemplos de lo que se acaba de afirmar.

El estudio más detallado y minucioso de las condiciones físico-químicas del magma vesubiano, es decir, de la porción interna, profunda del cráter, en comunicación con el que se supone ser baño intraterrestre de materias en fusión, sería de inmenso interés si tal estudio, deducido de todo lo que actualmente se conoce, óptica y químicamente acerca de cuantos productos han salido de aquel centro eruptivo, pudiera sistematizarse. Desgraciadamente hay tantas lagunas en esta relación íntima entre lo conocido y lo desconocido, que sólo podemos admitir algunas conclusiones limitadas, desprendidas de los hechos más ciertos y positivos observados en la región que nos ocupa.

1.ª El magma básico de la formación eruptiva del Somma-Vesubio, se caracteriza esencialmente por las condiciones químicas siguientes:

A. Riqueza relativa en *potasio*, dominante sobre los demás metales alcalinos.

B. Existencia variable de metales alcalino-térreos, nunca

dominantes, en general, sobre los alcalinos, lo que prueba que los primeros están subordinados á los segundos en el magma generador. Sobre ellos sobresale el *calcio*, ocupando el *magnesio* el inmediato lugar; aparecen como accidentales y sin importancia alguna el *estroncio* y *bario*.

C. Riqueza notable en *hierro*, que domina en absoluto sobre los demás metales pesados: *manganeso*, *cobre*, *plomo*, etcétera, que muy secundariamente aparecen en ciertos productos; el manganeso, aunque inconstante, lo es menos que demás. El hierro del magma originario de las lavas y demás rocas afines á éstas está total ó casi totalmente *ferroso* (*).

D. De los radicales negativos, la *sílice* ocupa el primer lugar; su cantidad relativa es, en general, de las más bajas en los materiales vesubianos, y me ha parecido ser todavía menor en los antiguos del Somma, aun cuando esta afirmación no tenga valor absoluto mientras no tengamos más datos analíticos de los materiales del Somma.

La presencia de la sílice, como ácido fijo de las altas temperaturas, excluye á la mayoría de los demás radicales ácidos, excepto el boro, el titano, el fósforo, que pueden coexistir con ella. El cloro y el fluor permanecen á temperaturas elevadas en unión del fósforo, mientras la presión externa no disminuye; cuando esto sucede aparecen las *fumarolas secas* de las corrientes lávicas, á pesar de descender ya á 800° ó 900° centígrados el calor de las masas recientemente expulsadas. Sabido es que estas fumarolas se componen de cloruros alcalinos esencialmente, y que la aparición de productos sucesivos está íntimamente ligada al descenso progresivo del calor, pudiéndose asegurar con M. Fouqué, á quien se deben notables trabajos sobre este particular, que la composición química de una fumarola es función de su temperatura.

(*) No se cita el aluminio porque no da carácter químico particular al magma.

El cloro y el fluor unidos al ácido fosfórico y á la cal dejan vestigios de su presencia en las lavas, como lo demuestra la aparición repetida en todos los productos de origen lávico examinados, de un cierto cloro, no aparente en el agua hervida con su polvo, y muy manifiesto en las disoluciones nítricas diluídas y hervidas. Este carácter analítico importante hace sospechar casi con certeza la existencia en aquellos productos de microscópicos cristales de *clorapatita*, con exiguas cantidades de *fluorapatita*, no constantes, según manifiesta la reacción débil del fluor hallada algunas veces. El cloro restante, encontrado en las simples disoluciones acuosas, debe ser el corto residuo de cloruros solubles retenidos procedentes del primitivo magma, después de expulsados de su seno, cuando las nuevas circunstancias físico-químicas en que aquél se halló así lo exigieron.

El *azufre*, que tan secundario papel representa en los productos sólidos del volcanismo activo de grandes temperaturas, empieza á ejercerlo cada vez más importante, en unión del *arsénico*, á medida que la fase volcánica se va acercando á sus límites inferiores: (fase solfatariana). Así sucede hace mucho tiempo en la porción occidental napolitana de los Campos flégreos, que rápidamente he de examinar después.

2.ª En consonancia con estos datos químicos, las especies minerales nacidas del seno de un magma de la naturaleza del estudiado, han de corresponder al grupo de las *básicas* y pertenecer á los *basaltos* ó á las rocas más afines á éstos.

En efecto, segun la clasificación de M. M. Fouqué y Michel Levy, propuesta en 1879 y adoptada por el Comité francés de Petrografía, constituído con motivo del 8.° Congreso Geológico Internacional de París en 1900, las lavas antiguas y modernas del Somma-Vesubio pertenecen á la clase de rocas conteniendo *feldespatos* y *feldespatoides*, tipo *microlítico* (á veces *porfiroide* y aun *porfídico*), grupo de

las *leucotefritas* (*), rocas que corresponden entre las eruptivas modernas (volcánicas) á las plutónicas llamadas *gabbros* y en especial al *gabbro leucítico* (**).

Las anteriores ideas bastan para definir á grandes rasgos el modo de ser del macizo vesubiano en su estática y en su dinámica. Nada nuevo se ha expuesto en ellas, siendo esta region la mas estudiada quizá de todas las volcánicas conocidas; sólo la satisfacción de comprobar personalmente lo más característico de aquella hermosa é interesantísima comarca, me movió á escribir las páginas que anteceden, sin pretensiones de ningun género. Voy á terminar con las observaciones recogidas en los campos flégreos napolitanos.

(*) Conteniendo feldespato cálcico-sódico, leucita, piroxeno, con ó sin anfíbol, mica ú olivino.

(**) La palabra *gabbro* tiene la siguiente acepción, según el Comité francés de Petrografía: Roca holocristalina, granuda, compuesta de feldespatos cálcico-sódicos y de piroxeno, con ó sin olivino ó biotita.

(Continuará.)

IX.—Nueva teoría para el desarrollo de las ecuaciones finales.

POR GUALTERIO M. SECO.

NÚMERO 1

Cálculo de la determinante de la matriz general de quinto grado (1).

$A_1 B^1_1 C^1_1$	$+a^1_1 a^2_2 a^3_3 a^4_4 a^5_5$	$+a^1_2 a^2_3 a^3_4 a^4_5 a^5_1$	$+a^1_3 a^2_4 a^3_5 a^4_1 a^5_2$	$+a^1_4 a^2_5 a^3_1 a^4_2 a^5_3$	$+a^1_5 a^2_1 a^3_2 a^4_3 a^5_4$
C^1_2	$-a^1_2 a^2_3 a^3_4 a^4_1 a^5_5$	$-a^1_3 a^2_4 a^3_5 a^4_2 a^5_1$	$-a^1_4 a^2_5 a^3_1 a^4_3 a^5_2$	$-a^1_5 a^2_1 a^3_2 a^4_4 a^5_3$	$-a^1_1 a^2_2 a^3_3 a^4_5 a^5_4$
C^1_3	$+a^1_3 a^2_4 a^3_1 a^4_2 a^5_5$	$+a^1_4 a^2_5 a^3_2 a^4_3 a^5_1$	$+a^1_5 a^2_1 a^3_3 a^4_4 a^5_2$	$+a^1_1 a^2_2 a^3_4 a^4_5 a^5_3$	$+a^1_2 a^2_3 a^3_5 a^4_1 a^5_4$
C^1_4	$-a^1_4 a^2_1 a^3_2 a^4_3 a^5_5$	$-a^1_5 a^2_2 a^3_3 a^4_4 a^5_1$	$-a^1_1 a^2_3 a^3_4 a^4_5 a^5_2$	$-a^1_2 a^2_4 a^3_5 a^4_1 a^5_3$	$-a^1_3 a^2_5 a^3_1 a^4_2 a^5_4$
$B^1_2 C^2_1$	$+a^1_2 a^2_3 a^3_1 a^4_4 a^5_5$	$+a^1_3 a^2_4 a^3_2 a^4_5 a^5_1$	$+a^1_4 a^2_5 a^3_3 a^4_1 a^5_2$	$+a^1_5 a^2_1 a^3_4 a^4_2 a^5_3$	$+a^1_1 a^2_2 a^3_5 a^4_3 a^5_4$
C^2_2	$-a^1_3 a^2_4 a^3_2 a^4_1 a^5_5$	$-a^1_4 a^2_5 a^3_3 a^4_2 a^5_1$	$-a^1_5 a^2_1 a^3_4 a^4_3 a^5_2$	$-a^1_1 a^2_2 a^3_5 a^4_4 a^5_3$	$-a^1_2 a^2_3 a^3_1 a^4_5 a^5_4$
C^2_3	$+a^1_4 a^2_1 a^3_3 a^4_2 a^5_5$	$+a^1_5 a^2_2 a^3_4 a^4_3 a^5_1$	$+a^1_1 a^2_3 a^3_5 a^4_4 a^5_2$	$+a^1_2 a^2_4 a^3_1 a^4_5 a^5_3$	$+a^1_3 a^2_5 a^3_2 a^4_1 a^5_4$
C^2_4	$-a^1_1 a^2_2 a^3_4 a^4_3 a^5_5$	$-a^1_2 a^2_3 a^3_5 a^4_4 a^5_1$	$-a^1_3 a^2_4 a^3_1 a^4_5 a^5_2$	$-a^1_4 a^2_5 a^3_2 a^4_1 a^5_3$	$-a^1_5 a^2_1 a^3_3 a^4_2 a^5_4$
$B^1_3 C^3_1$	$+a^1_3 a^2_1 a^3_2 a^4_4 a^5_5$	$+a^1_4 a^2_2 a^3_3 a^4_5 a^5_1$	$+a^1_5 a^2_3 a^3_4 a^4_1 a^5_2$	$+a^1_1 a^2_4 a^3_5 a^4_2 a^5_3$	$+a^1_2 a^2_5 a^3_1 a^4_3 a^5_4$
C^3_2	$-a^1_4 a^2_2 a^3_3 a^4_1 a^5_5$	$-a^1_5 a^2_3 a^3_4 a^4_2 a^5_1$	$-a^1_1 a^2_4 a^3_5 a^4_3 a^5_2$	$-a^1_2 a^2_5 a^3_1 a^4_4 a^5_3$	$-a^1_3 a^2_1 a^3_2 a^4_5 a^5_4$
C^3_3	$+a^1_1 a^2_3 a^3_4 a^4_2 a^5_5$	$+a^1_2 a^2_4 a^3_5 a^4_3 a^5_1$	$+a^1_3 a^2_5 a^3_1 a^4_4 a^5_2$	$+a^1_4 a^2_1 a^3_2 a^4_5 a^5_3$	$+a^1_5 a^2_2 a^3_3 a^4_1 a^5_4$
C^3_4	$-a^1_2 a^2_4 a^3_1 a^4_3 a^5_5$	$-a^1_3 a^2_5 a^3_2 a^4_4 a^5_1$	$-a^1_4 a^2_1 a^3_3 a^4_5 a^5_2$	$-a^1_5 a^2_2 a^3_4 a^4_1 a^5_3$	$-a^1_1 a^2_3 a^3_5 a^4_2 a^5_4$

	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$-a^1_3\,a^2_4\,a^3_1\,a^4_2\,a^5_5$	$-a^1_1\,a^2_5\,a^3_2\,a^4_3\,a^5_4$
C^4_2	$+a^1_3\,a^2_2\,a^3_4\,a^4_1\,a^5_5$	$+a^1_4\,a^2_3\,a^3_5\,a^4_2\,a^5_1$	$+a^1_5\,a^2_4\,a^3_1\,a^4_3\,a^5_2$	$+a^1_1\,a^2_5\,a^3_2\,a^4_4\,a^5_3$	$+a^1_2\,a^2_1\,a^3_3\,a^4_5\,a^5_4$
C^4_3	$-a^1_4\,a^2_3\,a^3_1\,a^4_2\,a^5_5$	$-a^1_5\,a^2_4\,a^3_2\,a^4_3\,a^5_1$	$-a^1_1\,a^2_5\,a^3_3\,a^4_4\,a^5_2$	$-a^1_2\,a^2_1\,a^3_4\,a^4_5\,a^5_3$	$-a^1_3\,a^2_2\,a^3_5\,a^4_1\,a^5_4$
C^4_4	$+a^1_1\,a^2_4\,a^3_2\,a^4_3\,a^5_5$	$+a^1_2\,a^2_5\,a^3_3\,a^4_4\,a^5_1$	$+a^1_3\,a^2_1\,a^3_4\,a^4_5\,a^5_2$	$+a^1_4\,a^2_2\,a^3_5\,a^4_1\,a^5_3$	$+a^1_5\,a^2_3\,a^3_1\,a^4_2\,a^5_4$
$B^2_2\,C^5_1$	$-a^1_3\,a^2_2\,a^3_1\,a^4_4\,a^5_5$	$-a^1_4\,a^2_3\,a^3_2\,a^4_5\,a^5_1$	$-a^1_5\,a^2_4\,a^3_3\,a^4_1\,a^5_2$	$-a^1_1\,a^2_5\,a^3_4\,a^4_2\,a^5_3$	$-a^1_2\,a^2_1\,a^3_5\,a^4_3\,a^5_4$
C^5_2	$+a^1_4\,a^2_3\,a^3_2\,a^4_1\,a^5_5$	$+a^1_5\,a^2_4\,a^3_3\,a^4_2\,a^5_1$	$+a^1_1\,a^2_5\,a^3_4\,a^4_3\,a^5_2$	$+a^1_2\,a^2_1\,a^3_5\,a^4_4\,a^5_3$	$+a^1_3\,a^2_2\,a^3_1\,a^4_5\,a^5_4$
C^5_3	$-a^1_1\,a^2_4\,a^3_3\,a^4_2\,a^5_5$	$-a^1_2\,a^2_5\,a^3_4\,a^4_3\,a^5_1$	$-a^1_3\,a^2_1\,a^3_5\,a^4_4\,a^5_2$	$-a^1_4\,a^2_2\,a^3_1\,a^4_5\,a^5_3$	$-a^1_5\,a^2_3\,a^3_2\,a^4_1\,a^5_4$
C^5_4	$+a^1_2\,a^2_1\,a^3_4\,a^4_3\,a^5_5$	$+a^1_3\,a^2_2\,a^3_5\,a^4_1\,a^5_1$	$+a^1_4\,a^2_3\,a^3_1\,a^4_5\,a^5_2$	$+a^1_5\,a^2_4\,a^3_2\,a^4_1\,a^5_3$	$+a^1_1\,a^2_5\,a^3_3\,a^4_2\,a^5_4$
$B^2_3\,C^6_1$	$-a^1_1\,a^2_3\,a^3_2\,a^4_4\,a^5_5$	$-a^1_2\,a^2_4\,a^3_3\,a^4_5\,a^5_1$	$-a^1_3\,a^2_5\,a^3_4\,a^4_1\,a^5_2$	$-a^1_4\,a^2_1\,a^3_5\,a^4_2\,a^5_3$	$-a^1_5\,a^2_2\,a^3_1\,a^4_3\,a^5_4$
C^6_2	$+a^1_2\,a^2_4\,a^3_3\,a^4_1\,a^5_5$	$+a^1_3\,a^2_5\,a^3_4\,a^4_2\,a^5_1$	$+a^1_4\,a^2_1\,a^3_5\,a^4_3\,a^5_2$	$+a^1_5\,a^2_2\,a^3_1\,a^4_4\,a^5_3$	$+a^1_1\,a^2_3\,a^3_2\,a^4_5\,a^5_4$
C^6_3	$-a^1_3\,a^2_1\,a^3_4\,a^4_2\,a^5_5$	$-a^1_4\,a^2_2\,a^3_5\,a^4_3\,a^5_1$	$-a^1_5\,a^2_3\,a^3_1\,a^4_4\,a^5_2$	$-a^1_1\,a^2_4\,a^3_2\,a^4_5\,a^5_3$	$-a^1_2\,a^2_5\,a^3_3\,a^4_1\,a^5_4$
C^6_4	$+a^1_4\,a^2_2\,a^3_1\,a^4_3\,a^5_5$	$+a^1_5\,a^2_3\,a^3_2\,a^4_4\,a^5_1$	$+a^1_1\,a^2_4\,a^3_3\,a^4_5\,a^5_2$	$+a^1_2\,a^2_5\,a^3_4\,a^4_1\,a^5_3$	$+a^1_3\,a^2_1\,a^3_5\,a^4_2\,a^5_4$

(Total, letras y cifras, 1.800. Si sumamos, porque la matriz sea de repetición, el total sube á 1.945.)

(1) Conjugación numérica.

NÚMERO 2

Cálculo de la determinante de la matriz de repetición de quinto grado (1).

	a_1	b_2	c_3	d_4
$F(1+1)\,y^3$	ad_5		bc_5	
$F(1+1+1)\,y^2$		0		
$F(1+1+1+1)\,y$		$abcd_{10}$		

$F(2)\,y^3 = 0$

	a_1	b_2	c_3	d_4	(A)
	a^2_2	b^2_4	c^2_6	d^2_8	
$F(1+2)\,y^2$	..... ab^2_5	.....	$(c^2 d_{10})$		
	..... $a^2 c_5$	.....	$(b d^2_{10})$		

$$a^5 p^5 + \left(\frac{\lfloor 5}{\lfloor 4} =\right) 5a^4 b\, p^6 + 5a^4 c\, p^7 + 5a^4 d\, p^8 + \ldots\ldots p^9 + \ldots\ldots \left(\frac{\lfloor 5}{\lfloor 2} =\right) 60\, a^2 bcd\, p^{11} \ldots \quad + 60 \qquad \text{(B)}$$

$$+ \left(\frac{\lfloor 5}{\lfloor 3 \lfloor 2} =\right) 10\, a^3 b^2 + 10\, a^2 b^3 \ldots\ldots \ldots\ldots \ldots$$

$$+ \left(\frac{\lfloor 5}{\lfloor 3} =\right) 20\, a^3 bc \ldots\ldots \ldots\ldots \ldots$$

$$- 5a^3 b \times (a + b + c + d) \ldots\ldots \ldots$$

$$- \begin{pmatrix} 5a^2 c \\ 5ab^2 \end{pmatrix} \times \left(a^2 \right. \quad + 2ab \ldots\ldots \ldots\ldots + c^2 \ldots \quad \left. \right)$$

$$\ldots\ldots \ldots\ldots + 2bc \ldots \quad - 10$$

$$- \begin{pmatrix} 5ad \\ 5bc \end{pmatrix} \times \left(a^3 \right. \quad \ldots\ldots \ldots\ldots + b^3 \ldots$$

$$\ldots\ldots \ldots\ldots + \left(\frac{\lfloor 3}{\lfloor 2} =\right) 3a^2 d \ldots \quad \left. \right) \quad - 15$$

$$\ldots\ldots \ldots\ldots + (\lfloor 3 =)\, 6\, abc \ldots \quad - 30$$

$-5a^3b.b = -5a^3b^2$	$+20a^3bc$
	$-5a^3bc$
	$-10a^3bc$
	$-10a^2b^3$
$5a^4c$	$+5a^4d$
$+5a^3b^2$	$+5a^3bc$

$$(5a^4c + 5a^3b^2)\frac{y^2}{a^2} = 5a^2cy^2 + 5ab^2y^2$$

$$(5a^4d + 5a^3bc) \times -\frac{y^3}{a^3} = -5ady^3 - 5bcy^3$$

$$5a^2bcd \times -\frac{y}{a} = -5abcd$$

y^5	$+a^5$	$+b^5$	$+c^5$	$+d^5$
$-5y^3ad$	$-5a^3by$	$-5b^3ca$	$-5c^3db$	$-5d^3yc$
$-5y^3bc$	$-5a^3cd$	$-5b^3dy$	$-5c^3ya$	$-5d^3ab$
$+5y^2ab^2$	$+5a^2bc^2$	$+5b^2cd^2$	$+5c^2dy^2$	$+5d^2ya^2$
$+5y^2a^2c$	$+5a^2b^2d$	$+5b^2c^2y$	$+5c^2d^2a$	$+5d^2y^2b$
$-5yabcd$	.....			

Total: 342 letras y cifras, sin contar la determinante, y 487, con ella.

---

(1) Conjugación literal. El cálculo preparatorio tiene menos de la quinta parte de desarrollo que el del núm. 1, porque 1800 : 342 = 5'263 ...

NÚMERO 3

Cálculo de la determinante de la matriz de repetición de sexto grado.

(MÉTODO DE CONJUGACIÓN)

	$a_1 b_2 c_3 d_4 e_5$		$a^2_2 b^2_4 c^2_6 d^2_8 e^2_{10}$		$a_1 b_2 c_3 d_4 e_5$		$a_1 b_2 c_3 d_4 e_5$
$F(1+1)y^4$.....	$ae_6 \ldots bd_6$	$F(2)\,y^4$	c^2_{12}		$a^2_2 b^2_4 c^2_6 d^2_8 e^2_{10}$		$a_1 b_2 c_3 d_4 e_5$
$F(1+1+1)y^3$.....	$abc_6 \ldots cde_{12}$	$F(2+2)\,y^2$	$\ldots a^2 e^2_{12} \ldots b^2 d_{12}$	$F(1+2)y^3$...	$a^2 d_6 \ldots be^2_{12}$		$a^2_2 b^2_4 c^2_6 d^2_8 e^2_{10}$
$F(5+1+1+1)y^2$...	$abde$		$\ldots (a^2 b^2_6) \ldots (d^2 e^2)$	$F(3)y^3$.....	$b^3_6 \ldots (d^3_{12})$	$F(1+1+2)\,y^2$	$\ldots acd^2_{12} \ldots (b^2 ce_{12})$
	$(F(1+3)\,y^2 = 0)$						$\ldots ac^2 e_{12} \ldots (bc^2 d_{12})$

$$\frac{\lfloor 6}{\lfloor 5} = 6 \qquad \frac{\lfloor 6}{\lfloor 4 \cdot \lfloor 2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15 \qquad \frac{\lfloor 6}{\lfloor 4} = 5 \cdot 6 = 30$$

$$\lfloor 6 \qquad 4 \cdot 5 \cdot 6 \qquad \lfloor 6 \qquad 4 \cdot 5 \cdot 6 \qquad \lfloor 6$$

$a^6 p^6 + \left(\frac{\lfloor 6}{\lfloor 5} =\right) 6a^5 b$	p^7 $+ 6a^5 c$	p^8 $+ 6a^5 d$	p^9 $+ 6a^5 e$	p^{10}
	$+ \left(\frac{\lfloor 6}{\lfloor 4 \cdot \lfloor 2} =\right) 15 a^4 b^2$		$+ 15 a^4 c^2$	
		$+ \left(\frac{\lfloor 6}{\lfloor 4} =\right) 30 a^4 bc$	$+ 30 a^4 bd$	
		$+ \left(\frac{\lfloor 6}{\lfloor 3 \cdot \lfloor 3} =\right) 20 a^3 b^3$		
			$+ \left(\frac{\lfloor 6}{\lfloor 3 \cdot \lfloor 2} =\right) 60 a^3 b^2 c$	
			$+ \left(\frac{\lfloor 6}{\lfloor 2 \cdot \lfloor 4} =\right) 15 a^2 b^4$	
$- 6a^4 b \times (a$	$+ b$	$+ c$	$+ d$	...)
	$\begin{pmatrix} - 6a^3 c \\ - 9a^2 b^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a^2 \end{pmatrix}$	$+ 2 ab$	$+ 2 ac$	.....)
			$+ b^2$	.....)
		$\begin{pmatrix} - 6 a^2 d \\ - 12 abc \\ - 2 b^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a^3 \end{pmatrix}$	$+ 3 a^2 b$	....)
			$\begin{pmatrix} - 6ae \\ - 3c^2 \\ - 6bd \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a^4 \end{pmatrix}$	....)

(Continúa en la hoja siguiente.)

NÚMERO 3 (continuación).

$$\begin{array}{r|l} 6a^5c + 15 & a^4b^2 = 6a^5c + 9a^4b^2 \\ -6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|l} 6a^5d + 30 & a^4bc + 20 & a^3b^3 = 6a^5d + 12a^4bc + 2a^3b^3 \\ -6 & -18 & \\ -12 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} 6a^5e + 15 & a^4c^2 + 30 & a^4bd + 60 & a^3b^2c + 15 & a^2b^4 = 6a^5e + 3a^4c^2 + 6a^4bd \\ -12 & -6 & -18 & -9 & \\ & -18 & -6 & -6 & \\ & & -36 & & \end{array}$$

$$(6a^5c + 9a^4b^2) \times -y^2 : a^2 = -6a^3cy^2 - 9a^2b^2y^2$$

$$(6a^5d + 12a^4bc + 2a^3b^3) \times y^3 : a^3 = 6a^2dy^3 + 12abcy^3 + 2b^3y^3,$$

$$[illegible] + 6a^4bc) \times -y^4 : a^4 = -6aey^4 - 3c^2y^4 - 6bdy^4.$$

$$\left(\frac{\lfloor 6}{\lfloor 3 \,.\, \lfloor 2} = 3.4.5 = 60\right) \ldots\ldots \left(\frac{\lfloor 6}{\lfloor 3} = 4.5.6 = 120\right) \ldots\ldots\ 60a^3bd^2p^{18} + 60a^3c^2dp^{13} + 120a^3bcep^{13}.$$

$$\left.\begin{array}{l}
-\begin{pmatrix} 6a^3c \\ 9a^2b^2 \end{pmatrix} p^6 \times \begin{pmatrix} 2be \\ 2cd \end{pmatrix} p^7 \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} -12a^3bce \\ -12a^3c^2d \end{array}\right. \\[2ex]
-\begin{pmatrix} 6a^2d \\ 12abc \\ 2b^3 \end{pmatrix} p^6 \times \begin{pmatrix} 3ac^2 \\ 3a^2e \\ 3b^2c \\ 6abd \end{pmatrix} p^7 \ldots \left\{\begin{array}{l} -18a^3c^2d \\ -36a^2bd^2 \\ -36a^3bce \end{array}\right. \\[2ex]
-\begin{pmatrix} 6ae \\ 6bd \\ 3c^2 \end{pmatrix} p^6 \times \begin{pmatrix} 12a^2bc \\ 4a^3d \\ 4ab^3 \end{pmatrix} p^7 \ldots \left\{\begin{array}{l} -72a^3bce \\ -24a^3bd^2 \\ -12a^3c^2d \end{array}\right.
\end{array}\right\} \ldots -60a^3bd^2p^{18} - 42a^3c^2dp^{13} - 120a^3bcep^{13},$$

$$0 \qquad + 18a^3c^2d \qquad + 0$$

$$18a^3c^2d \times + y : a = + 18a^2c^2dy.$$

(Continúa en la hoja siguiente.)

NÚMERO 3 (conclusión).

$$15a^4e^2p^{14} + {}^{(1)}\,90a^2b^2d^2$$

$$\left.\begin{array}{ll}
-\begin{pmatrix}6a^3c\\9a^2b^2\end{pmatrix}p^6\times\begin{pmatrix}2ce\\d^2\end{pmatrix}p^8\ldots\ldots & \left\{-9a^2b^2d^2\right. \\
-\begin{pmatrix}6a^2d\\12abc\\2b^3\end{pmatrix}p^6\times\begin{pmatrix}6acd\\6abe\\3bc^2\\3b^2d\end{pmatrix}p^8\ldots & \left\{-18a^2b^2d^2\right. \\
-\begin{pmatrix}6ae\\6bd\\3c^2\end{pmatrix}p^6\times\begin{pmatrix}12ab^2c\\6a^2c^2\\4a^3e\\12a^2bd\\b^4\end{pmatrix}p^8\ldots & \left\{\begin{array}{l}-24a^4e^2\\-72a^2b^2d^2\end{array}\right. \\
-\begin{pmatrix}-12a^3de\\-6b^4d\\+12ab^3e\\+6b^3c^2\\-12abc^3\\+18a^2c^2d\end{pmatrix}p^{12}\times bp^2\ldots\ldots & \left\{\ldots\ldots\ldots\right.
\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -24a^4e^2p^{14} - 99a^2b^2d^2$$

$$-9a^4e^2p^{14} - 9a^2b^2d^2$$

$$-(9a^4e^2 + 9a^2b^2d^2)\times -y^2 : a^2 = 9a^2e^2y^2 + 9b^2d^2y^2$$

(1) 16 [illegible]

				$+ d^6$	
$-6y^4ae$	$+6a^4by$	$-6b^4ca$	$+6c^4db$	$-6d^4ec$	$+6e^4yd$
$-6y^4bd$	$+6a^4ce$	$-6b^4dy$	$+6c^4ea$	$-6d^4yb$	$+6e^4ac$
$-3y^4c^2$	$+3a^4d^2$	$-3b^4e^2$	$+3c^4y^2$	$-3d^4a^2$	$+3e^4b^2$
$+12y^3abc$	$-12a^3bcd$	$+12b^3cde$	$-12c^3dey$	$+12d^3eya$	$-12e^3yab$
$+12y^3cde$	$-12a^3dey$	$+12b^3eya$	$-12c^3yab$	$+12d^3abc$	$-12e^3bcd$
$+6y^3a^2d$	$-6a^3b^2e$	$+6b^3c^2y$	$-6c^3d^2a$	$+6d^3e^2b$	$-6e^3y^2c$
$+6y^3be^2$	$-6a^3cy^2$	$+6b^3da^2$	$-6c^3eb^2$	$+6d^3yc^2$	$-6e^3ad^2$
$+2y^3b^3$	$-2a^3c^3$	$+2b^3d^3$	$-2c^3e^3$	$+2d^3y^3$	$-2e^3a^3$
$0\,y^2abde$	$0\,a^2bcey$	$0\,b^2cdya$	$0\,c^2deab$	$0\,d^2eybc$	$0\,e^2yacd$
$+9y^2a^2e^2$	$-9a^2b^2y^2$	$+9b^2c^2a^2$	$-9c^2d^2b^2$	$+9d^2e^2c^2$	$-9e^2y^2d^2$
$+9y^2b^2d^2$	$-9a^2c^2e^2$	.....	.....	.....	.....
$-18y^2acd^2$	$+18a^2bde^2$	$-18b^2cey^2$	$+18c^2dya^2$	$-18d^2eab^2$	$+18e^2ybc^2$
$0\,y^2ac^2e$	$0\,a^2bd^2y$	$0\,b^2ce^2a$	$0\,c^2dy^2b$	$0\,d^2ea^2c$	$0\,e^2yb^2d$

NÚMERO 4

Cálculo de la ecuación final de sexto grado, por el método explicado en la primera parte, para las ecuaciones irracionales de índice par.

$$y + a\sqrt[6]{k} + b\sqrt[6]{k^2} + c\sqrt[6]{k^3} + d\sqrt[6]{k^4} + e\sqrt[6]{k^5} = 0$$

$$-\left(y + b\sqrt[3]{k} + d\sqrt[3]{k^2}\right)^2 \qquad = \left(a\sqrt[6]{k} + c\sqrt[6]{k^3} + e\sqrt[6]{k^5}\right)^2$$

$$y^2 + 2by\sqrt[3]{k} + b^2\sqrt[3]{k^2} + 2dy\sqrt[3]{k^2} + 2bdk + d^2k\sqrt[3]{k} = a^2\sqrt[3]{k} + 2ac\sqrt[3]{k^2} + c^2k + 2aek + 2cek + e^2k\sqrt[3]{k^2}$$

$$(y^2 + 2bdk - c^2k - 2aek) + (2by + d^2k - a^2 - 2cek)\sqrt[3]{k} + (b^2 + 2dy - e^2k - 2ac)\sqrt[3]{k^2} = 0$$

Fórmula: $A + B\sqrt[3]{k} + C\sqrt[3]{k^2} = 0 \ldots\ldots A^3 + B^3k + C^3k^2 - 3ABCk = 0$

$$A^3 = (y^2 + 2bd - c^2 - 2ae)^3$$

$$\{(y^2 + 2bd) - (c^2 + 2ae)\}^3 =$$

$$(y^2 + 2bd)^3 - 3(y^2 + 2bd)^2(c^2 + 2ae) + 3(y^2 + 2bd)(c^2 + 2ae)^2 - (c^2 + 2ae)^3 =$$

$$\left.\begin{array}{c} y^6 + 6bdy^4 + 12b^2d^2y^2 + 8b^3d^3 - (c^6 + 6ac^4e + 12a^2c^2e^2 + 8a^3e^3) \\ -(y^4 + 4bdy^2 + 4b^2d^2)(3c^2 + 6ae) + (c^4 + 4ac^2e + 4a^2e^2)(3y^2 + 6bd) \end{array}\right\} =$$

$$\left.\begin{array}{l} -3c^2y^4 - 12bc^2dy - 12b^2c^2d^2 + 3c^4y^2 + 12ac^2ey^2 + 12a^2e^2y^2 \\ -6aey^4 - 24abdey^2 - 24ab^2d^2e + 6bc^4d + 24abc^2de + 24a^2bde^2 \end{array}\right\} =$$

$$\begin{array}{r|l|l|}
A^3 = y^6 + 6bd & y^4 + 12b^2d^2 & y^2 + 8b^3d^3 \\
-6ae & +3c^4 & +6bc^4d \\
-3c^2 & +12ac^2e & +24abc^2de \\
 & +12a^2e^2 & +24a^2bde^2 \\
 & -12bc^2d & -12b^2c^2d^2 \\
 & -24abde & -24ab^2d^2e \\
 & & -6ac^4e \\
 & & -12a^2c^2e^2 \\
 & & -8a^3e^3 \\
 & & -c^6
\end{array}$$

NÚMERO 2

Cálculo de la determinante de la matriz de repetición de quinto grado (1).

	a_1	b_2	c_3	d_4
$F(1+1)\,y^3$	ad_5		bc_5	
$F(1+1+1)\,y^2$		0		
$F(1+1+1+1)\,y$		$abcd_{10}$		

$F(2)\,y^3 = 0$

	a_1	b_2	c_3	d_4	(A)
	a^2_2	b^2_4	c^2_6	d^2_8	
$F(1+2)\,y^2$	..... ab^2_5	.....	$(c^2\,d_{10})$		
	..... $a^2\,c_5$	.....	$(b\,d^2_{10})$		

$a^5p^5 + \left(\frac{\lfloor 5}{\lfloor 4} =\right) 5a^4b$	p^6				$+ 5a^4c$	p^7			$+ 5a^4d$	$p^8 +$	.....	$p^9 +$	.....	$\left(\frac{\lfloor 5}{\lfloor 2} =\right) 60a^2bcd$	p^{11} ...		$+ 60$	(B)
		$+\left(\frac{\lfloor 5}{\lfloor 3\,\lfloor 2} =\right) 10a^2b^2$							$+ 10a^2b^3$		.....		.....		...			
								$+\left(\frac{\lfloor 5}{\lfloor 3} =\right) 20a^3bc$			.....		.....		...			
$-5a^3b \times (a$				$+ b$				$+ c$		$+ d)$	.....		.....		...			
		$-\begin{pmatrix}5a^2c\\5ab^2\end{pmatrix} \times \left(a^2\right.$						$+ 2ab$			.....		.....	$+ c^2$	...)			
											.....		.....	$+ 2bc$	...)		$- 10$	
							$-\begin{pmatrix}5ad\\5bc\end{pmatrix} \times \left(a^3\right.$				.....		.....	$+ b^3$	...			
											.....		.....	$+\left(\frac{\lfloor 3}{\lfloor 2} =\right) 3a^2d$	...)		$- 15$	
											.....		.....	$+\left(\lfloor 3 =\right) 6abc$	...		$- 30$	
																	$5a^2bcd$	

$10\,a^3 b^2$	$+\,10\,a^2 b^3$
$-\,5\,a^3 b\,.\,b = -\,5\,a^3 b^2$	$+\,20\,a^3 bc$
	$-\,5\,a^3 bc$
	$-\,10\,a^3 bc$
	$-\,10\,a^2 b^3$
$5\,a^4 c$	$+\,5\,a^4 d$
$+\,5\,a^3 b^2$	$+\,5\,a^3 bc$

$$5\,a^4 b \times -\frac{y}{a} = -\,5\,a^3 by$$

$$(5\,a^4 c + 5\,a^3 b^2)\,\frac{y^2}{a^2} = 5\,a^2 cy^2 + 5\,ab^2 y^2$$

$$(5\,a^4 d + 5\,a^3 bc) \times -\frac{y^3}{a^3} = -\,5\,ady^3 - 5\,bcy^3$$

$$5\,a^2 bcd \times -\frac{y}{a} = -\,5\,abcd$$

y^5	$+\,a^5$	$+\,b^5$	$+\,c^5$	$+\,d^5$
$-\,5\,y^3 ad$	$-\,5\,a^3 by$	$-\,5\,b^3 ca$	$-\,5\,c^3 db$	$-\,5\,d^3 yc$
$-\,5\,y^3 bc$	$-\,5\,a^3 cd$	$-\,5\,b^3 dy$	$-\,5\,c^3 ya$	$-\,5\,d^3 ab$
$+\,5\,y^2 ab^2$	$+\,5\,a^2 bc^2$	$+\,5\,b^2 cd^2$	$+\,5\,c^2 dy^2$	$+\,5\,d^2 ya^2$
$+\,5\,y^2 a^2 c$	$+\,5\,a^2 b^2 d$	$+\,5\,b^2 c^2 y$	$+\,5\,c^2 d^2 a$	$+\,5\,d^2 y^2 b$
$-\,5\,yabcd$	.....			

Total: 342 letras y cifras, sin contar la determinante, y 487, con ella.

(1) Conjugación literal. El cálculo preparatorio tiene menos de la quinta parte de desarrollo que el del núm. 1, porque 1800 : 342 = 5'263 ...

NÚMERO 3

Cálculo de la determinante de la matriz de repetición de sexto grado.

(MÉTODO DE CONJUGACIÓN)

	$a_1 b_2 c_3 d_4 e_5$		$a^2_2 b^2_4 c^2_6 d^2_8 e^2_{10}$		$a_1 b_2 c_3 d_4 e_5$		$a_1 b_2 c_3 d_4 e_5$
$F(1+1)y^4$.....	$ae_6 \ldots bd_6$	$F(2)\,y^4$	c^2_{12}		$a^2_2 b^2_4 c^2_6 d^2_8 e^2_{10}$		$a_1 b_2 c_3 d_4 e_5$
$F(1+1+1)y^3$.....	$abc_6 \ldots cde_{12}$	$F(2+2)\,y^2$	$\ldots a^2 e^2_{12} \ldots b^2 d_{12}$	$F(1+2)y^3$...	$a^2 d_6 \ldots be^2_{12}$		$a^2_2 b^2_4 c^2_6 d^2_8 e^2_{10}$
$F(5+1+1+1)y^2$...	abde		$\ldots (a^2 b^2_6) \ldots (d^2 e^2)$	$F(3)y^3$.....	$b^2_6 \ldots (d^3_{12})$	$F(1+1+2)\,y^2$	$\ldots acd^2_{12} \ldots (b^2 ce_{12})$
	$(F(1+3)\,y^2 = 0)$						$\ldots ac^2 e_{12} \ldots (bc^2 d_{12})$

$$\frac{\lfloor 6}{\lfloor 5} = 6 \qquad \frac{\lfloor 6}{\lfloor 4 \cdot \lfloor 2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15 \qquad \frac{\lfloor 6}{\lfloor 4} = 5 \cdot 6 = 30$$

$$\frac{\lfloor 6}{\lfloor 3 \cdot \lfloor 3} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3} = 20 \qquad \frac{\lfloor 6}{\lfloor 3 \cdot \lfloor 2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2} = 60 \qquad \frac{\lfloor 6}{\lfloor 2 \cdot \lfloor 4} = 15$$

$$
\begin{array}{r|r|r|r|l}
a^6 p^6 + \left(\frac{\lfloor 6}{\lfloor 5} =\right) 6a^5 b & p^7 \quad + 6a^5 c & p^8 \quad + 6a^5 d & p^9 \quad + 6a^5 e & p^{10} \\
 & + \left(\frac{\lfloor 6}{\lfloor 4 \cdot \lfloor 2} =\right) 15\, a^4 b^2 & & + 15\, a^4 c^2 & \\
 & & + \left(\frac{\lfloor 6}{\lfloor 4} =\right) 30\, a^4 bc & + 30\, a^4 bd & \\
 & & + \left(\frac{\lfloor 6}{\lfloor 3 \cdot \lfloor 3} =\right) 20\, a^3 b^3 & & \\
 & & & + \left(\frac{\lfloor 6}{\lfloor 3 \cdot \lfloor 2} =\right) 60 a^3 b^2 c & \\
 & & & + \left(\frac{\lfloor 6}{\lfloor 2 \cdot \lfloor 4} =\right) 15\, a^2 b^4 & \\
- 6a^4 b \times (a & + b & + c & + d & \ldots) \\
 & \left(\begin{array}{r} - 6a^3 c \\ - 9a^2 b^2 \end{array}\right) \times \left(a^2\right. & + 2\, ab & + 2\, ac & \ldots\ldots) \\
 & & & + b^2 & \ldots\ldots) \\
 & & \left(\begin{array}{r} - 6\, a^2 d \\ - 12\, abc \\ - 2\, b^3 \end{array}\right) \times \left(a^3\right. & + 3\, a^2 b & \ldots\ldots\ldots \\
 & & & & \ldots\ldots\ldots\ldots) \\
 & & & \left(\begin{array}{r} - 6ae \\ - 3\, c^2 \\ - 6bd \end{array}\right) \times \left(a^4\right. & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & & & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & & & & \ldots\ldots\ldots\ldots)
\end{array}
$$

(Continúa en la hoja siguiente.)

NÚMERO 3 (continuación).

$$\begin{array}{r|l} 6a^5c + 15 & a^4b^2 = 6a^5c + 9a^4b^2 \\ -6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|l} 6a^5d + 30 & a^4bc + 20 & a^3b^3 = 6a^5d + 12a^4bc + 2a^3b^3 \\ -6 & -18 & \\ -12 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} 6a^5e + 15 & a^4c^2 + 30 & a^4bd + 60 & a^3b^2c + 15 & a^2b^4 = 6a^5e + 3a^4c^2 + 6a^4bd \\ -12 & -6 & -18 & -9 & \\ & -18 & -6 & -6 & \\ & & -36 & & \end{array}$$

$$(6a^5c + 9a^4b^2) \times -y^2 : a^2 = -6a^3cy^2 - 9a^2b^2y^2$$

$$(6a^5d + 12a^4bc + 2a^3b^3) \times y^3 : a^3 = 6a^2dy^3 + 12abcy^3 + 2b^3y^3,$$

$$(6a^5e + 3a^4c^2 + 6a^4bc) \times -y^4 : a^4 = -6aey^4 - 3c^2y^4 - 6bdy^4.$$

$$\left(\frac{\lfloor 6}{\lfloor 3 \,.\, \lfloor 2} = 3.4.5 = 60\right) \ldots\ldots \left(\frac{\lfloor 6}{\lfloor 3} = 4.5.6 = 120\right) \ldots\ldots\ 60a^3bd^2p^{13} + 60a^3c^2dp^{13} + 120a^3bcep^{13}.$$

$$\left.\begin{array}{l}
-\begin{pmatrix} 6a^3c \\ 9a^2b^2 \end{pmatrix} p^6 \times \begin{pmatrix} 2be \\ 2cd \end{pmatrix} p^7 \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} -12a^3bce \\ -12a^3c^2d \end{array}\right. \\[2ex]
-\begin{pmatrix} 6a^2d \\ 12abc \\ 2b^3 \end{pmatrix} p^6 \times \begin{pmatrix} 3ac^2 \\ 3a^2e \\ 3b^2c \\ 6abd \end{pmatrix} p^7 \ldots \left\{\begin{array}{l} -18a^3c^2d \\ -36a^3bd^2 \\ -36a^3bce \end{array}\right. \\[2ex]
-\begin{pmatrix} 6ae \\ 6bd \\ 3c^2 \end{pmatrix} p^6 \times \begin{pmatrix} 12a^2bc \\ 4a^3d \\ 4ab^3 \end{pmatrix} p^7 \ldots \left\{\begin{array}{l} -72a^3bce \\ -24a^3bd^2 \\ -12a^3c^2d \end{array}\right.
\end{array}\right\} \ldots -60a^3bd^2p^{13} - 42a^3c^2dp^{13} - 120a^3bcep^{13},$$

$$0 \qquad + 18a^3c^2d \qquad + 0$$

$$18a^3c^2d \times + y : a = + 18a^2c^2dy.$$

(Continúa en la hoja siguiente.)

NÚMERO 3 (conclusión).

$$15a^4e^2p^{14} + {}^{(1)}\,90a^2b^2d^2$$

$$\left.\begin{array}{l}
-\begin{pmatrix}6a^3c\\9a^2b^2\end{pmatrix}p^6\times\begin{pmatrix}2ce\\d^2\end{pmatrix}p^8\ldots\ldots\left\{-9a^2b^2d^2\right.\\
-\begin{pmatrix}6a^2d\\12abc\\2b^3\end{pmatrix}p^6\times\begin{pmatrix}6acd\\6abe\\3bc^2\\3b^2d\end{pmatrix}p^8\ldots\left\{-18a^2b^2d^2\right.\\
-\begin{pmatrix}6ae\\6bd\\3c^2\end{pmatrix}p^6\times\begin{pmatrix}12ab^2c\\6a^2c^2\\4a^3e\\12a^2bd\\b^4\end{pmatrix}p^8\ldots\left\{\begin{array}{l}-24a^4e^2\\-72a^2b^2d^2\end{array}\right.\\
-\begin{pmatrix}-12a^3de\\-6b^4d\\+12ab^3e\\+6b^3c^2\\-12abc^3\\+18a^2c^2d\end{pmatrix}p^{12}\times bp^2\ldots\ldots\left\{\ldots\ldots\ldots\ldots\right.
\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -24a^4e^2p^{14} - 99a^2b^2d^2$$

$$-9a^4e^2p^{14} - 9a^2b^2d^2$$

$$-(9a^4e^2 + 9a^2b^2d^2)\times -y^2 : a^2 = 9a^2e^2y^2 + 9b^2d^2y^2$$

(1) $\lfloor 6 = 720 = 90$

y^6	$-a^6$	$+b^6$	$-c^6$	$+d^6$	$-e^6$
$-6y^4ae$	$+6a^4by$	$-6b^4ca$	$+6c^4db$	$-6d^4ec$	$+6e^4yd$
$-6y^4bd$	$+6a^4ce$	$-6b^4dy$	$+6c^4ea$	$-6d^4yb$	$+6e^4ac$
$-3y^4c^2$	$+3a^4d^2$	$-3b^4e^2$	$+3c^4y^2$	$-3d^4a^2$	$+3e^4b^2$
$+12y^3abc$	$-12a^3bcd$	$+12b^3cde$	$-12c^3dey$	$+12d^3eya$	$-12e^3yab$
$+12y^3cde$	$-12a^3dey$	$+12b^3eya$	$-12c^3yab$	$+12d^3abc$	$-12e^3bcd$
$+6y^3a^2d$	$-6a^3b^2e$	$+6b^3c^2y$	$-6c^3d^2a$	$+6d^3e^2b$	$-6e^3y^2c$
$+6y^3be^2$	$-6a^3cy^2$	$+6b^3da^2$	$-6c^3eb^2$	$+6d^3yc^2$	$-6e^3ad^2$
$+2y^3b^3$	$-2a^3c^3$	$+2b^3d^3$	$-2c^3e^3$	$+2d^3y^3$	$-2e^3a^3$
$0\,y^2abde$	$0\,a^2bcey$	$0\,b^2cdya$	$0\,c^2deab$	$0\,d^2eybc$	$0\,e^2yacd$
$+9y^2a^2e^2$	$-9a^2b^2y^2$	$+9b^2c^2a^2$	$-9c^2d^2b^2$	$+9d^2e^2c^2$	$-9e^2y^2d^2$
$+9y^2b^2d^2$	$-9a^2c^2e^2$	.....	.....	.....	.....
$-18y^2acd^2$	$+18a^2bde^2$	$-18b^2cey^2$	$+18c^2dya^2$	$-18d^2eab^2$	$+18e^2ybc^2$
$0\,y^2ac^2e$	$0\,a^2bd^2y$	$0\,b^2ce^2a$	$0\,c^2dy^2b$	$0\,d^2ea^2c$	$0\,e^2yb^2d$

NÚMERO 4

Cálculo de la ecuación final de sexto grado, por el método explicado en la primera parte, para las ecuaciones irracionales de índice par.

$$y + a\sqrt[6]{k} + b\sqrt[6]{k^2} + c\sqrt[6]{k^3} + d\sqrt[6]{k^4} + e\sqrt[6]{k^5} = 0$$

$$-\left(y + b\sqrt[3]{k} + d\sqrt[3]{k^2}\right)^2 \qquad = \left(a\sqrt[6]{k} + c\sqrt[6]{k^3} + e\sqrt[6]{k^5}\right)^2$$

$$y^2 + 2by\sqrt[3]{k} + b^2\sqrt[3]{k^2} + 2dy\sqrt[3]{k^2} + 2bdk + d^2k\sqrt[3]{k} = a^2\sqrt[3]{k} + 2ac\sqrt[3]{k^2} + c^2k + 2aek + 2cek + e^2k\sqrt[3]{k^2}$$

$$(y^2 + 2bdk - c^2k - 2aek) + (2by + d^2k - a^2 - 2cek)\sqrt[3]{k} + (b^2 + 2dy - e^2k - 2ac)\sqrt[3]{k^2} = 0$$

Fórmula: $A + B\sqrt[3]{k} + C\sqrt[3]{k^2} = 0 \ldots\ldots A^3 + B^3k + C^3k^2 - 3ABCk = 0$

$$A^3 = (y^2 + 2bd - c^2 - 2ae)^3$$

$$\{(y^2 + 2bd) - (c^2 + 2ae)\}^3 =$$

$$(y^2 + 2bd)^3 - 3(y^2 + 2bd)^2(c^2 + 2ae) + 3(y^2 + 2bd)(c^2 + 2ae)^2 - (c^2 + 2ae)^3 =$$

$$\left.\begin{array}{l} y^6 + 6bdy^4 + 12b^2d^2y^2 + 8b^3d^3 - (c^6 + 6ac^4e + 12a^2c^2e^2 + 8a^3e^3) \\ (y^4 + 4bdy^2 + 4b^2d^2)(2c^2 + 6ae) + (c^4 + 4ac^2e + 4a^2e^2)(2y^2 + 6bd) \end{array}\right\} =$$

$$\left.\begin{array}{l} -3c^2y^4 - 12bc^2dy - 12b^2c^2d^2 + 3c^4y^2 + 12ac^2ey^2 + 12a^2e^2y^2 \\ -6aey^4 - 24abdey^2 - 24ab^2d^2e + 6bc^4d + 24abc^2de + 24a^2bde^2 \end{array}\right\} =$$

$$\begin{array}{r|r|r|}
A^3 = y^6 + 6bd & y^4 + 12b^2d^2 & y^2 + 8b^3d^3 \\
-6ae & +3c^4 & +6bc^4d \\
-3c^2 & +12ac^2e & +24abc^2de \\
 & +12a^2e^2 & +24a^2bde^2 \\
 & -12bc^2d & -12b^2c^2d^2 \\
 & -24abde & -24ab^2d^2e \\
 & & -6ac^4e \\
 & & -12a^2c^2e^2 \\
 & & -8a^3e^3 \\
 & & -c^6
\end{array}$$

NÚMERO 4 (continuación).

$$B^3 = (2by + d^2 - a^2 - 2ce)^3$$

$$\left\{(2by + d^2) - (a^2 + 2ce)\right\}^3 =$$

$$(2by + d^2)^3 - 3(2by + d^2)^2(a^2 + 2ce) + 3(2by + d^2)(a^2 + 2ce)^2 - (a^2 + 2ce)^3 =$$

$$\left.\begin{array}{l} 8b^3y^3 + 12b^2d^2y^2 + 6bd^4y + d^6 - a^6 - 6a^4ce - 12a^2c^2e^2 - 8c^3e^3 \\ -(4b^2y^2 + 4bd^2y + d^4)(3a^2 + 6ce) + (a^4 + 4a^2ce + 4c^2e^2)(6by + 3d^2) \end{array}\right\} =$$

$$\begin{array}{c} 8b^3y^3 + 12b^2d^2y^2 + 6bd^4y + d^6 - a^6 - 6a^4ce - 12a^2c^2e^2 - 8c^3e^3 \\ -12a^2b^2y^2 - 24b^2cey^2 - 12a^2bd^2y + 3a^4d^2 + 12a^2cd^2e + 12c^2d^2e^2 \\ -24bcd^2ey - 3a^2d^4 - 6cd^4e + 6a^4by + 24a^2bcey + 24bc^2e^2y \end{array}$$

$B^3 = 8b^3y^3 + 12b^2d^2$	y^2 $+ 6bd^4$	y $+ d^6$	
$- 12a^2b^2$	$+ 6a^4b$	$- a^6$	
$- 24ab^2ce$	$+ 24a^2bce$	$- 6a^4ce$	
	$- 12a^2bd^2$	$- 12a^2c^2e^2$	
	$- 24bcd^2e$	$- 8c^3e^3$	
	$+ 24bc^2e^2$	$+ 3a^4d^2$	
		$+ 12a^2ed^2e$	
		$+ 12c^2d^2e^2$	
		$- 3a^2d^4$	

$$\left\{(2\,dy + b^2) - (2\,ac + e^2)\right\}^3 =$$

$$(2\,dy + b^2)^3 - 3\,(2\,dy + b^2)^2\,(2\,ac + e^2) + 3\,(2\,dy + b^2)\,(2\,ac + e^2)^2 - (2\,ac + e^2)^3 =$$

$$\left.\begin{array}{l} 8\,d^3\,y^3 + 12\,b^2\,d^2\,y^2 + 6\,b^4\,dy + b^6 - 8\,a^3\,c^3 - 12\,a^2\,c^2\,e^2 - 6\,ace^4 - e^6 \\ -(6\,ac + 3\,e^2)\,(4\,d^2\,y^2 + 4\,b^2\,dy + b^4) + (6\,dy + 3\,b^2)\,(4\,a^2\,c^2 + 4\,ace^2 + e^4) \end{array}\right\} =$$

$$\begin{array}{l} 8\,d^3\,y^3 + 12\,b^2\,d^2\,y^2 + 6\,b^4\,dy + b^6 - 8\,a^3\,c^3 - 12\,a^2\,c^2\,e^2 - 6\,ace^4 - e^6 \\ -24\,acd^2\,y^2 - 24\,ab^2\,cdy - 6\,ab^4\,c + 24\,a^2\,c^2\,dy + 24\,acde^2\,y + 6\,de^4\,y \\ -12\,d^2\,e^2\,y^2 - 12\,b^2\,de^2\,y - 3\,b^4\,e^2 + 12\,a^2\,b^2\,c^2 + 12\,ab^2\,ce^2 + 3\,b^2\,e^4 \end{array}$$

$C^3 = 8\,d^3\,y^3 + 12\,b^2\,d^2$	$y^2 \quad + 6\,b^4\,d$	$y \quad + b^6$
$- 24\,acd^2$	$+ 24\,a^2\,c^2\,d$	$- 8\,a^3\,c^3$
$- 12\,d^2\,e^2$	$+ 24\,acde^2$	$- 12\,a^2\,c^2\,e^2$
	$+ 6\,de^4$	$- 6\,ace^4$
	$- 24\,ab^2\,cd$	$- e^6$
	$- 12\,b^2\,de^2$	$+ 12\,a^2\,b^2\,c^2$
		$+ 12\,ab^2\,ce^2$
		$+ 3\,b^2\,e^4$
		$- 6\,ab^4\,c$
		$- 3\,b^4\,e^2$

NÚMERO 4 (conclusión).

$$-3\,ABC = -3\,(y^2 + 2\,bd - c^2 - 2\,ae)\,(2\,by + d^2 - a^2 - 2\,ce)\,(b^2 + 2\,dy - e^2 - 2\,ac)$$

$$-3\,y^2 - 6\,bd + 3\,c^2 + 6\,ae = -3\,A$$

$$2\,by + d^2 - a^2 - 2\,ce = B$$

$$(b^2 + 2\,dy - e^2 - 2\,ac) \times \left\{ \begin{array}{llll} -6\,by^3 & -12\,b^2\,dy & +6\,bc^2\,y & +12\,abey \\ -3\,d^2\,y^2 & -6\,bd^3 & +3\,c^2\,d^2 & +6\,ad^2\,e \\ +3\,a^2\,y^2 & +6\,a^2\,bd & -3\,a^2\,c^2 & -6\,a^3\,e \\ +6\,cey^2 & +12\,bcde & -6\,c^3\,e & -12\,ace^2 \end{array} \right\} = -3\,ABC$$

Producto por b^2:

$$\begin{array}{llll} -6\,b^3\,y^3 & -12\,b^4\,dy & +6\,b^3\,c^2\,y & +12\,ab^3\,ey \\ -3\,b^2\,d^2\,y^2 & -6\,b^3\,d^3 & +3\,b^2\,c^2\,d^2 & +6\,ab^2\,d^2e \\ +3\,a^2\,b^2\,y^2 & +6\,a^2\,b^3\,d & -3\,a^2\,b^2\,c^2 & -6\,a^3\,b^2\,e \\ +6\,b^2\,cey^2 & +12\,b^3\,cde & -6\,b^2\,c^3\,e & -12\,ab^2\,ce^2 \end{array}$$

Producto por $2\,dy$:

$$\begin{array}{llll} -12\,bdy^4 & -24\,b^2\,d^2\,y^2 & +12\,bc^2\,dy^2 & +24\,abdey^2 \\ -6\,d^3\,y^3 & -12\,bd^4\,y & +6\,c^2\,d^3\,y & +12\,ad^3\,ey \\ +6\,a^2\,dy^3 & +12\,a^2\,bd^2\,y & -6\,a^2\,c^2\,dy & -12\,a^3\,dey \\ +12\,cdey^3 & +24\,bcd^2\,ey & -12\,c^3\,dey & -24\,acde^2y \end{array}$$

Producto por $-e^2$:

$$\begin{array}{llll} +6\,be^2\,y^3 & +12\,b^2\,de^2\,y & -6\,bc^2\,e^2\,y & -12\,abe^3\,y \\ +3\,d^2\,e^2\,y^2 & +6\,bd^3\,e^2 & -3\,c^2\,d^2\,e^2 & -6\,ad^2\,e^3 \\ -3\,a^2\,e^2\,y^2 & -6\,a^2\,bde^2 & +3\,a^2\,c^2\,e^2 & +6\,a^3e^3 \\ -6\,ce^3y^2 & -12\,bcde^3 & +6\,c^3\,e^3 & +12\,ace^4 \end{array}$$

Producto por $-2\,ac$:

$$\begin{array}{llll} +12\,abcy^3 & +24\,ab^2\,cdy & -12\,abc^3\,y & -24\,a^2bcey \\ +6\,acd^2y^2 & +12\,abcd^3 & -6\,ac^3\,d^2 & -12\,a^2cd^2e \\ -6\,a^3\,cy^2 & -12\,a^3\,bcd & +6\,a^3\,c^3 & +12\,a^4\,ce \\ -12\,ac^2\,ey^2 & -24\,abc^2\,de & +12\,ac^4\,e & +24\,a^2\,c^2\,e^2 \end{array}$$

$-3ABC = -12bdy^4$	y^3	y^2	y	
$+6be^2$	$+3d^2e^2$	$+12b^2de^2$	$-6b^3d^3$	$+12abcd^3$
$+12abc$	$-3a^2e^2$	$-6bc^2e^2$	$+3b^2c^2d^2$	$-6ac^3d^2$
$-6b^3$	$-6ce^3$	$-12abe^3$	$+6ab^2d^2e$	$-12a^2cd^2e$
$-6d^3$	$+6acd^2$	$+24ab^2cd$	$+6a^2b^3d$	$-12a^3bcd$
$+6a^2d$	$-6a^3c$	$-12abc^3$	$-3a^2b^2c^2$	$+6a^3c^3$
$+12cde$	$-12ac^2e$	$-24a^2bce$	$-6a^3b^2e$	$+12a^4ce$
	$-3b^2d^2$	$-12b^4d$	$+12b^3cde$	$-24abc^2de$
	$+3a^2b^2$	$+6b^3c^2$	$-6b^2c^3e$	$+12ac^4e$
	$+6b^2ce$	$+12ab^3e$	$-12ab^2ce^2$	$+24a^2c^2e^2$
	$-24b^2d^2$	$-12bd^4$	$+6bd^3e^2$	
	$+12bc^2d$	$+12a^2bd^2$	$-3c^2d^2e^2$	
	$+24abde$	$+24bcd^2e$	$-6ad^2e^3$	
		$+6c^2d^3$	$-6a^2bde^2$	
		$-6a^2c^2d$	$+3a^2c^2e^2$	
		$-12c^3de$	$+6a^3e^3$	
		$+12ad^3e$	$-12bcde^3$	
		$-12a^3de$	$+6c^3e^3$	
		$-24acde^2$	$+12ace^4$	

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC =$$

$$y^6 - (6bd + 6ae + 3c^2)y^4 + (2b^3 + 2d^3 + 6be^2 + 6a^2d + 12abc + 12cde)y^3 +$$
$$+ (9b^2d^2 + 3c^4 + 9a^2e^2 - 9a^2b^2 - 18b^2ce - 18acd^2 - 9d^2e^2 - 6ce^3 - 6a^3c)y^2 +$$
$$+ (6a^4b - 6bd^4 + 18bc^2e^2 - 6b^4d + 18a^2c^2d + 6de^4 - 12abe^3 - 12abc^3 +$$
$$+ 6b^3c^2 + 12ab^3e + 6c^2d^3 - 12c^3de + 12ad^3e - 12a^3de)y + 2b^3d^3 + 6bc^4d +$$
$$+ 18a^2bde^2 - 9b^2c^2d^2 - 18ab^2d^2e + 6ac^4e - 9a^2c^2e^2 - 2a^3e^3 - c^6 + d^6 - a^6 +$$
$$+ 6a^4ce - 2c^3e^3 + 3a^4d^2 + 9c^2d^2e^2 - 3a^2d^4 - 6cd^4e + b^6 - 2a^3c^3 + 6ace^4 +$$
$$- e^6 + 9a^2b^2c^2 + 3b^2e^4 - 6ab^4c - 3b^4e^2 + 6a^2b^3d - 6a^3b^2e + 12b^3cde - 6b^2c^3e +$$
$$+ 6bd^3e^2 - 6ad^2e^3 - 12bcde^3 + 12abcd^3 - 6ac^3d^2 - 12a^3bcd = 0$$

PUBLICACIONES RECIBIDAS DESDE 1.° DE JULIO DE 1907

(Continuación.)

Vidal (D. Luis Mariano).—Nota sobre el supuesto granito eruptivo del Serrat Negre, en las montañas de La Nou, provincia de Barcelona.—Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona.— Volumen VI, número 18.—Barcelona, 1907.

Vitoria, S. J. (P. Eduardo).—Conferencias de Química Moderna dadas en el Laboratorio Químico del Ebro. — Química general. — Fasc. I.—Tortosa, 1907.

Revista de Obras públicas.—Año 60, núms. 1.658 á 1.674. - Madrid, 1907.

Revista Minera Metalúrgica y de Ingeniería.—Año 58, núms. 2.117 á 2.119 y 2.121 á 2.133.

Revista de Montes.—Año 31, núms. 731 á 738.—Madrid, 1907.

Asociación de Ingenieros Industriales.—Revista tecnológica industrial. — Año 30, núm. 7.—Barcelona, 1907.

Asociación de Peritos Industriales —Boletín tecnológico.—Año 3.°, números 24 á 28.—Madrid, 1907.

Memorial de Ingenieros del Ejército.—(4.ª época), tomo 24, núms. 7 al 10. Colección de Memorias.—Tomo 24, núm. 2. - Madrid, 1907.

Memorial de Artillería (Serie 5.ª), tomo 3.°, entrega 6.ª; tomo 4.°, entregas 1.ª á 4.ª—Madrid, 1907.

Ingeniería.—Revista industrial de Minas, Obras públicas, etc. —Año 3.°, números 81 á 92.—Madrid, 1907.

La Naturaleza.--Revista.—Tomo 17, núms. 14 á 20.—Madrid, 1907.

Electricidad y Mecánica.— Revista. —Año 3.°, núm. 9.—Valencia, 1907.

La Energía Eléctrica.—Revista.—Año 9.°, núms. 12 á 20.—Madrid, 1907.

Madrid Científico —Revista.—Año 14, núms. 562 á 574.—Madrid, 1907.

El Siglo Médico.—Boletín. - Año 54, núms. 2.794 á 2.811.

La Salud pública.— Revista de Higiene y de Tuberculosis. — Año 3.°, números 30 á 32.—Valencia, 1907.

Gaceta Médica del Sur de España.—Año 25, núms. 578 á 586.—Granada, 1907.

Revista de Medicina y Cirugía prácticas. — Año 31, núms. 984 á 1 000.—Madrid, 1907.

Medicina práctica.— Revista. —Año 5.°, núms. 7 á 9.—Barcelona, 1907.

Revista Española de Dermatología y Sifiliografía.—Año 9.°, núms. 101, 102 y 104.—Madrid, 1907.

Gaceta Sanitaria de Barcelona.—Año 29, núms. 4 á 9.—Barcelona, 1907.

Gaceta Médica Catalana.—Revista.—Tomo 31, núms. 722 á 727.—Barcelona, 1907.

Revista de Medicina y Farmacia.—Año 3.°, núms. 24 á 27.—Murcia, 1907.

El Monitor de la Farmacia y de la Terapéutica. — Año 13, núms. 424 á 434.—Madrid, 1907.

La Farmacia Española.—Revista.—Año 39, núms. 26 á 37 y 39 á 44.—Madrid, 1907.

Revista de Farmacia.—Año 3.°, núms. 6 á 8.—Barcelona, 1907.

Gaceta Farmacéutica Española. - Año 10, núms. 108 á 116. — Barcelona, 1907.

Bibliografía Española.—Año 7.°, núms. 13 á 20.—Madrid, 1907.

Boletín de la Institución libre de Enseñanza.—Año 31, núms. 566 á 569.—Madrid 1907.

Eco de Castilla.—Revista.—Año 1.°, núms. 1 y 2.—Madrid, 1907.

Observatorio de Nuestra Señora del Recuerdo.—Boletín Meteorológico.—Año 4.°, núms. 46 á 48, Octubre á Diciembre 1906.—Madrid, 1906.

España y América.—Revista.—Tomo 3.°, tomo 4.°, núms. 19 y 20.

España en Africa.—Revista.—Año 3.°, núms. 3 y 6 á 12. Barcelona, 1907.

Razón y Fe.—Revista.—Tomo 18, núms. 3 y 4.—Tomo 19, núms. 1 y 2.—Madrid, 1907.

Vida Marítima.—Revista de Navegación, Comercio.....—Año 6.°, números 198 á 209.—Madrid, 1907.

Revista Financiera.—Año 1.°, núms. 12, 14 á 16.—Zaragoza, 1907.

Revista de Estudios Franciscanos.—Año 1.° núms. 7 á 9.—Sarriá, 1907.

El Magisterio Español.—Periódico de Instrucción pública.—Año 41, números 3.113 á 147.—Madrid, 1907.

La Ilustración Española y Americana.—Revista de Bellas Artes. — Año 51 números 25 á 39.—Madrid, 1907.

Cámara Sindical Española de Automovilismo —España automóvil.—Revista técnica.—Tomo 1.°, núms. 1.° al 5.°—Madrid, 1907.

Sociedad Científica Argentina.— Anales.— Tomo 63, entregas 4.ª y 5.ª Buenos Aires, 1907.

El Libro (Organo de la Asociación Nacional del Profesorado). Revista.—Año 1.°, núms. 3 á 6.—Buenos Aires, 1907.

Sociedad Colombiana de Ingenieros —Anales de Ingeniería (Organo de la). Volumen XIV, núm. 171.—Bogotá, 1907.

Universidad Central de Venezuela —Anales.—Año 8.°—Tomo 8.° núm. 1. Caracas, 1907.

Observatorio Meteorológico Magnético y Sísmico del Colegio de Belén.—Reseña meteorológica.—Año de 1906.—Habana, 1907.

República de Cuba.—Boletín oficial de la Secretaría de Agricultura, Industria y Comercio.—Volumen II, núm. 6.—Idem III, núms. 1 á 3.—Habana, 1907.

Instituto de Segunda Enseñanza de la Habana.—Memoria anual correspondiente al curso académico de 1905 á 1906.—Habana, 1907.

Universidad de la Habana.—Revista de la Facultad de Letras y Ciencias.—Volumen IV, núm. 3.—Idem V, núm. 1.—Habana, 1907.

Sociedad Geográfica de Lima.— Boletín.— Año 15, tomo 18. — Memoria anual y anexos, 1905.—Lima, 1905.

Oficina Central Meteorológica del Estado de Yucatán —Boletín mensual. — Año meteorológico de 1905 á 1906, meses de Julio á Octubre.—Mérida de Yucatán, 1907.

Sociedad de Geografía y Estadística de la República mexicana.—Boletín.—5.ª época.—Tomo 1.º—Tomo 2.º, núms. 1 al 4.—México 1902 á 1907.

Observatorio Meteorológico Central de México.—Boletín mensual.—Diciembre de 1902.—Enero y Febrero 1903.—Julio y Agosto 1904.—México, 1903 y 1904.

Sociedad Científica «Antonio Alzate».— Memorias y Revista.— Tomo 22, números 7 á 12.—Tomo 24, núms. 1 á 5.—México, 1905 y 1906.

Observatorios de Tacubaya y Cuajimalpa. —Observaciones meteorológicas practicadas durante el año de 1904.—México, 1907.

República Oriental del Uruguay. — Anuario estadístico. — Tomo 1.º, años 1904 á 1906.—Montevideo, 1907.

Universidad de Montevideo.—Anales.—Tomo 18, entrega 1.ª, núm. 82.—Montevideo, 1907.

Centro Farmacéutico Uruguayo.—Revista.—Tomo 14, núms. 6 y 7.—Montevideo, 1907.

Gotschlich (Bernardo).—Biografía del Dr. Rodulfo Amando Philippi. —1808-1904).—Por.....—Santiago (Chile), 1904.

Hospital Rosales (Archivos del). —Año 2.º, núms. 15 y 16.—San Salvador, 1907.

República del Salvador.—Boletín del Consejo Superior de Salubridad.—Año 6.º, núms. 4 á 8.—San Salvador, 1907.

Academia Real das Sciencias de Lisboa.—Sessão publica da..... em 19 de Fevreiro de 1905.—Allocucão do Vice-Presidente Virgilio Machado e Relatoria dos trabalhos da Academia pelo Secretario geral Adriano Augusto de Pina Vidal.—Lisboa, 1905.

Academia Real das Sciencias.—Actas das Assembléas Geraes.— Fasciculo I.º—Lisboa, 1905.

Academia Real das Sciencias.—Boletim da Segunda Classe.—Volune I.º (1898-1902).—Lisboa, 1903.

Academia Real das Sciencias de Lisboa.—Jornal de Sciencias Mathematicas Physicas e Naturaes.—Segunda serie, tomo IV, Março 1897, número 16.—Tomo V, Julio de 1897, Diciembre de 1898, núms. 16 al 20. Tomo VI, Febrero de 1900, Mayo de 1902.—Tomo VII, Marzo de 1903, Abril de 1906.—Lisboa.

(Continuará).

X.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia duodécima.

SEÑORES:

Continuaremos en esta conferencia presentando ejemplos sobre el equilibrio elástico.

SEGUNDO EJEMPLO. *Extensión longitudinal de un prisma.*

Consideremos un sólido prismático, cuyas aristas sean paralelas al eje de las z, sometido á un esfuerzo de tracción F por unidad de superficie y actuando sobre cada una de las bases.

Sobre la superficie lateral del prisma no actúa fuerza alguna.

El método que hemos de seguir es el mismo que hemos seguido en el ejemplo anterior, que es, en suma, el método general expuesto en la última conferencia.

Tendremos que buscar para u, v, w tres funciones de x, y, z, que satisfagan á las tres ecuaciones en diferenciales parciales de segundo orden:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\Delta u &= 0,\\ (\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dy}+\mu\Delta v &= 0,\\ (\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dz}+\mu\Delta w &= 0,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

que expresan el equilibrio de cualquier punto interior del cuerpo.

Pero estas soluciones han de tener bastante generalidad, ya por contener funciones arbitrarias, ya constantes arbitrarias, para satisfacer también á las tres ecuaciones,

$$\left.\begin{aligned} P_x &= N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma, \\ P_y &= N_2\beta + T_1\gamma + T_3\alpha, \\ P_z &= N_3\gamma + T_2\alpha + T_1\beta, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

que expresan el equilibrio en un punto de la superficie, y en las que P_x, P_y, P_z, son las componentes de la fuerza P que actúa en dicho punto;

α, β, γ, los cosenos de los ángulos que forman la normal exterior á la superficie con los ejes coordenados;

y las N y las T tienen la significación que ya sabemos, y sus valores son:

$$\begin{aligned} N_1 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx}, & T_1 &= \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right), \\ N_2 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dy}, & T_2 &= \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right), \\ N_3 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz}, & T_3 &= \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right). \end{aligned} \qquad (3)$$

En rigor, debiéramos substituir estos valores de N y T en el grupo (2), el cual se convertiría en ecuaciones en diferenciales parciales de primer orden, al que deben satisfacer las integrales u, v, w, del grupo (1).

Pero en la mayor parte de los ejemplos que hemos de presentar, es más cómodo substituir en el grupo (3) los valores u, v, w, que representan las integrales del grupo (1), y los valores obtenidos para las N y T substituirlos en el grupo (2), que deberán reducirse á tres identidades.

Dos observaciones haremos antes de empezar la solución del problema.

Es la primera, que en el interior del cuerpo no actúa ninguna fuerza externa, ni siquiera la gravedad, de la cual prescindimos. No actúan más que las fuerzas moleculares, es decir, las atracciones ó repulsiones entre las moléculas.

Es la segunda, que las fuerzas que actúan sobre el prisma se hacen equilibrio, puesto que no hay más que fuerzas iguales y contrarias actuando sobre las bases.

***

Empecemos por integrar las ecuaciones del grupo (1).

Y en rigor no vamos á emplear ningún procedimiento regular, sino á tantear ó ensayar soluciones particulares que tengan, sin embargo, suficiente generalidad para satisfacer al grupo (2).

Dado lo sencillo del problema, ocurre emplear un procedimiento análogo al empleado en el ejemplo precedente, tomando para u, v, w, funciones de primer grado y las más sencillas.

$$u = ax, \quad v = by, \quad w = cz,$$

en que a, b, c, son constantes arbitrarias.

Desde luego, este sistema satisface al grupo (1) porque en estas ecuaciones no entran más que derivadas segundas, en cada término entra una, y no hay término independiente de dichas derivadas.

Por otra parte, todas las derivadas segundas de los valores supuestos para u, v y w son *cero*, luego todos los términos del grupo (1) se reducirán á *cero*. Las ecuaciones (1) quedan, pues, satisfechas.

Pasemos á las ecuaciones del grupo (2).

Pero éstas, como la superficie que limita el cuerpo no es única, se dividen á su vez en otros dos grupos: uno aplicable á las bases del prisma, otro, á la superficie lateral.

Y para uno y para otro tendremos que calcular los valores de N y T por medio del grupo (3).

Consideremos las bases.

En N_1, N_2, N_3, entran las derivadas primeras, que serán:

$$\frac{du}{dx} = a; \quad \frac{dv}{dy} = b; \quad \frac{dw}{dz} = c;$$

y substituyendo

$$N_1 = \lambda(a + b + c) + 2\mu a = (\lambda + 2\mu)a + \lambda b + \lambda c,$$
$$N_2 = \lambda(a + b + c) + 2\mu b = (\lambda + 2\mu)b + \lambda a + \lambda c,$$
$$N_3 = \lambda(a + b + c) + 2\mu c = (\lambda + 2\mu)c + \lambda a + \lambda b.$$

Respecto á las T, claro es que se reducen á cero, porque las derivadas primeras de u con relación á y y á z, las de v con relación á x y á z, y las de w con relación á x y á y, son todas nulas, de modo que tendremos:

$$T_1 = \mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) = 0,$$
$$T_2 = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right) = 0,$$
$$T_3 = \mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) = 0.$$

En cuanto á las bases, que son las que estamos considerando ahora, las normales son paralelas al eje de las z; luego para dichas bases

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1.$$

Y como la fuerza coincide con la normal, tendremos:

$$l = \alpha, \quad m = \beta, \quad n = \gamma.$$

Así es que el grupo (2), recordando que

$$P_x = Fl = 0, \quad P_y = Fm = 0, \quad P_z = Fn = F,$$

dará

$$\begin{aligned} F\alpha = 0 &= N_1 \,.\, 0 + T_3 \,.\, 0 + 0 \;.\, 1 = 0, \\ F\beta = 0 &= N_2 \,.\, 0 + 0 \;.\, 1 + T_3 \,.\, 0 = 0, \\ F\gamma = F &= N_3 \,.\, 1 + T_2 \,.\, 0 + T_1 \,.\, 0 = N_3 \end{aligned}$$

para la base superior.

Y lo mismo podemos decir de la base inferior, porque á la vez cambian de dirección la normal exterior y la F.

Las dos primeras ecuaciones quedan satisfechas por sí mismas, y en la última, poniendo por N_3 el valor que antes obtuvimos, resultará:

$$F = (\lambda + 2\mu)\, c + \lambda a + \lambda b.$$

Esta es una ecuación de condición y á ella queda reducida el grupo (2) para las dos bases.

Pasemos á la superficie lateral.

La normal será perpendicular al eje de las z; así que α y β tendrán distintos valores, según el punto que se considere, y γ será igual á cero.

Por otra parte, sobre la superficie lateral no actúa ninguna fuerza; de modo que

$$P_x = 0; \quad P_y = 0; \quad P_z = 0.$$

Además, hemos demostrado que $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ y $\gamma = 0$.

Luego el grupo (2) se convierte, substituyendo todos estos valores y los de N_1, N_2, N_3, en el siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= ((\lambda + 2\mu)\, a + \lambda b + \lambda c)\alpha, \\ 0 &= ((\lambda + 2\mu)\, b + \lambda a + \lambda c)\beta, \\ 0 &= ((\lambda + 2\mu)\, c + \lambda a + \lambda b) \times 0 = 0, \end{aligned}$$

ó bien

$$(\lambda + 2\mu)a + \lambda b + \lambda c = 0,$$
$$(\lambda + 2\mu)b + \lambda a + \lambda c = 0.$$

En suma, para satisfacer el equilibrio de las dos bases y de la superficie lateral, tenemos que determinar las constantes arbitrarias a, b y c, de modo que satisfagan á las tres ecuaciones de condición, que acabamos de obtener, que son:

$$F = (\lambda + 2\mu)c + \lambda a + \lambda b,$$
$$0 = (\lambda + 2\mu)a + \lambda b + \lambda c,$$
$$0 = (\lambda + 2\mu)b + \lambda a + \lambda c.$$

Todo queda reducido á despejar a, b, c, de estas tres ecuaciones.

Restando las dos últimas, una de otra, resulta:

$$(\lambda + 2\mu)(a - b) + \lambda(b - a) = 0,$$

ó bien,

$$2\mu(a - b) = 0,$$

y como suponemos que μ no es cero, porque esto correspondería al caso particuiar de los flúidos perfectos en que no hay deslizamiento, como se ve en los valores de T, y nosotros consideramos el caso general, resulta:

$$a - b = 0 \quad \text{ó bien} \quad a = b.$$

Tendremos, pues, que las expresiones de u, v, y w, se convertirán en

$$u = ax, \quad v = ay, \quad w = cz,$$

y las constantes a y b se determinarán resolviendo las dos ecuaciones

$$F = (\lambda + 2\mu)\, c + 2\lambda\, a,$$
$$0 = (\lambda + 2\mu)\, a + \lambda a + \lambda c = 2(\lambda + \mu)\, a + \lambda c,$$

á que se reducen las tres anteriores.

Despejando entre las dos a y c, tendremos:

$$c = \frac{1 + \frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu} F, \quad a = -\frac{1}{2} \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu} F.$$

Queda, pues, resuelto el problema. Los valores, mejor dicho, las expresiones

$$u = -\frac{1}{2} \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu} F.x; \quad v = -\frac{1}{2} \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu} F.y;$$
$$w = \frac{1 + \frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu} F.z,$$

que determinan u, v y w, en función de las coordenadas x, y, z del punto cuya deformación se desea calcular y en función de los datos del problema, que son la tensión F y las dos consonantes λ y μ, que dependen de la naturaleza del sistema, convierten los grupos (1) y (2) en identidades, y por lo tanto determinan el equilibrio elástico *en el interior del cuerpo y en la superficie.*

***

Podemos, á propósito de este ejemplo, hacer observaciones análogas á las que hicimos en el ejemplo anterior.

Claro es que á los valores de u, v y w, se les pueden agregar tres constantes, y aun tres funciones de primer grado en

$x, y, z;$ y los valores que resulten satisfarán á los grupos (1) y (2).

Pero estas nuevas soluciones son equivalentes á la primera, pues con ella no se hace otra cosa que comunicar movimientos de traslación y rotación al sólido ya formado y convertido en un sistema sólido.

De esta manera es dado hacer, por un movimiento de traslación, por ejemplo, que se pueda considerar como fijo un punto determinado en el prisma, y por eso ha sido lícito que consideremos el origen de coordenadas como inmóvil.

Observaremos también, que una sección cualquiera del prisma se deforma, quedando semejante á su forma primitiva, puesto que las deformaciones u y v son de la forma ax, ay.

Por último, el alargamiento del prisma por unidad de longitud está determinado por c, toda vez que si en $w = cz$ hacemos $z = 1$, resulta

$$w = c = \frac{1 + \frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu} F.$$

Esta cantidad es positiva; en cambio las deformaciones en la sección recta del prisma, vemos que llevan el signo menos.

Es decir, que el prisma se estira en sentido de su longitud y se estrecha en su espesor, lo cual está conforme con la experiencia.

***

Combinando los resultados de este ejemplo con los del ejemplo anterior, pueden obtenerse algunas consecuencias importantes.

En el primer ejemplo, es decir, en el de la compresión igual y uniforme de un cuerpo, hemos encontrado, que las

componentes de los desplazamientos en un punto cualquiera de coordenadas x, y, z, eran

$$u = ax, \quad v = ay, \quad w = az,$$

siendo

$$a = \frac{-P}{3\lambda + 2\mu}.$$

Pero la cantidad a se puede medir, en cada caso, experimentalmente, porque a es la compresión lineal por unidad de longitud; en efecto: u, por ejemplo, es igual á a cuando x es igual á 1.

Luego en la última fórmula tenemos dos cantidades, P y a, que para un cuerpo de una naturaleza dada, pueden *medirse experimentalmente*. Luego las dos constantes del cuerpo λ y μ estarán ligadas por dicha ecuación. Es decir, que tendremos

$$3\lambda + 2\mu = \frac{-P}{a},$$

en que el segundo miembro será una cantidad conocida, una cantidad numérica que la experiencia nos dará, y además positiva, puesto a es negativa.

En suma, esta ecuación enlaza λ y μ.

En el segundo ejemplo, los valores de los componentes del desplazamiento hemos visto que son

$$u = ax; \quad v = ay; \quad w = cz;$$

y además

$$c = \frac{1 + \frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu} F; \quad a = -\frac{1}{2} \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu} F.$$

Respecto á estas últimas fórmulas, podemos decir lo mismo que decíamos en el caso anterior.

Una experiencia cualquiera aplicada á este caso, es decir, á la extensión longitudinal de un prisma, nos dará a, c, y F, y por lo tanto, dos ecuaciones entre λ y μ, de las cuales se deduce,

$$\frac{c}{a} = 2\,\frac{1+\frac{\lambda}{\mu}}{\frac{\lambda}{\mu}} = 2\left(\frac{\mu}{\lambda}+1\right).$$

El primer miembro es una cantidad numérica que nos da el experimento realizado.

El segundo miembro es una función entre λ y μ, que si el material empleado en esta experiencia es idéntico al aplicado en la primera, deberán ser cantidades idénticas á las λ y μ del primer ejemplo.

Tendremos, pues, para determinar las constantes λ y μ propias del material que se ensaya, estas dos ecuaciones, cuyo segundo miembro representaremos por las constantes C, C_1, deducidas de la experiencia, ó, mejor dicho, de los dos experimentos:

$$3\lambda + 2\mu = C; \quad 2\left(\frac{\mu}{\lambda}+1\right) = C_1.$$

Entre ambas ecuaciones deduciremos los valores de λ y μ.

Y repitiendo estos experimentos muchas veces, á fin de compensar los errores, tendremos para el material de que se trata los valores medios de las constantes λ y μ.

Y si aún queremos multiplicar los ejemplos, podremos comparar y compensar unos valores con otros, variando las formas del cuerpo y la distribución de las fuerzas. Es decir, empleando la compresión normal y uniforme, ó la tensión de un prisma, ó la deformación de una capa esférica, como estudiaremos después, ó la de un cilindro hueco, ú otro caso cualquiera del equilibrio elástico.

Siempre para el mismo material, si la teoría es exacta y los ejemplares que se empleen son de la misma estructura, deberemos obtener los mismos valores para λ y μ ó valores muy aproximados.

Con lo cual nuestras fórmulas habrán perdido su carácter abstracto y estarán dispuestas para las aplicaciones, toda vez que ya λ y μ serán cantidades conocidas para cada clase de material.

Y con esto habremos resuelto el problema práctico y de comprobación de la Física matemática, á saber: la determinación de las constantes, que entran en sus fórmulas.

Empezamos el problema en la región teórica, buscamos en la experiencia su comprobación. La comprobación de todo: de las hipótesis, de la aplicación de la Mecánica y de la aplicación del cálculo.

Si las fórmulas abstractas aplicadas á numerosos casos particulares no dan resultados concordantes; si, para una misma clase de material, las constantes λ y μ son distintas, con diferencias grandes, que no puedan atribuirse ó á errores de observación ó á diferencias de estructura en los materiales ensayados, esto nos probará que las hipótesis eran inadmisibles, ó tal vez que en el cálculo hemos admitido simplificaciones que no eran legítimas.

En suma, como ya anunciábamos el año anterior, la Física matemática parte de hipótesis, sin contar, ó contando muy poco, con el método experimental; pero al fin de sus cálculos se encuentra con el método experimental, como piedra de toque, ó como juez que dicta sentencia, casi inapelable, sobre los métodos empleados.

***

Y en estos ejemplos podemos hacer todavía otra aplicación de las observaciones que preceden.

Aplicando el método de Cauchy para la determinación de esfuerzos de compresión, tensión y resbalamiento, las compresiones y las tensiones estando representadas por las N y las fuerzas de deslizamiento por T, hemos encontrado que las dos constantes λ y μ se reducían á una sola.

En el método de Lamé y de otros autores, λ y μ son distintas. ¿A quién da razón la experiencia?

Dice Mr. Lamé: «Álgunos experimentos de Mr. Wertheim le conducen á este resultado: $\lambda = 2\mu$. Pero puede suceder que la relación $\frac{\lambda}{\mu}$ no sea ni igual á la unidad, ni igual á 2, y aun más que varíe de un cuerpo á otro. Es un punto que no se puede esclarecer sino por numerosos experimentos.»

***

Dado el método de Cauchy, y aun suponiendo que λ y μ sean distintas, se comprende que la determinación de sus valores numéricos podría, aunque no se ha hecho, ilustrarnos sobre la estructura interior de los cuerpos.

Y esto sólo en el método de Cauchy, que es el que está más en el espíritu de la Física matemática clásica, aunque no sean éstas hoy las ideas dominantes.

Nos explicaremos con más claridad por medio de un ejemplo.

Supongamos que se conociera la fórmula de Saint-Venant y que ésta fuese,

$$\frac{A}{r^2} - \frac{B}{r^6},$$

representando A y B dos constantes y r la distancia entre dos moléculas del sistema elástico.

Las constantes λ y μ hemos visto que son integrales tri-

ples, en la cuales entra ó $f(r)$ ó $\frac{f'(r)}{r}$, que dependen de la función de Saint-Venant (conferencia séptima).

Y como los límites de las integrales, prescindiendo de π, son, en general, ε_1 y ε, es claro que obtendremos dos ecuaciones de esta forma:

$$L(A, B, \varepsilon_1 \varepsilon) = \lambda; \quad L_1(A, B, \varepsilon_1 \varepsilon) = \mu,$$

en las que A y B son dos constantes de la función de Saint-Venant, relativas á las fuerzas de atracción y repulsión; ε representa el límite superior de una de las integrales, ó sea el radio de actividad, y ε_1 (que en la conferencia á que nos referimos habíamos llamado λ) que representaba el límite inferior, ó sea la distancia molecular cuando substituíamos á cero este límite, para evitar un término infinito en la integral.

Por último, λ y μ representan dos constantes numéricas, determinadas por la experiencia.

Pues bien, si por experiencias directas pudiéramos determinar la constante A de las atracciones, como por otra parte, conocemos numéricamente ε con cierta aproximación, las dos ecuaciones anteriores nos determinarían B y ε_1, es decir, la constante de la repulsión, y una magnitud ε_1 del orden de las distancias moleculares.

Claro es que lo que precede es sólo una idea general, ó mejor dicho, un ejemplo para que se vea cómo la Física matemática puede acometer problemas al parecer imposibles y aspirar á medir magnitudes que jamás podrán percibir nuestros sentidos; salvo las esperanzas en el ultra-microscopio.

Verdad es que en la Física moderna, como veremos en su día, apoyada en la nueva Física matemática, se acometen problemas mucho más difíciles, que el problema hipotético que, como ejemplo, hemos presentado.

***

TERCER EJEMPLO. *Forma particular de* u, v *y* w.

En rigor, no es un ejemplo el que vamos á presentar, sino un caso particularísimo de las deformaciones elásticas, pero que se aplica á muchos ejemplos.

Supongamos que, por algún procedimiento especial, pueda demostrarse, que las tres componentes de cada desplazamiento, á saber, u, v, w, sean, para determinado caso, las derivadas parciales de primer orden de una función de x, y, z, aunque ignoremos cuál sea esta función, porque si no, claro es que el problema estaba resuelto: para conocer u, v y w, bastaba diferenciar, con relación á x, y, z, la función de que se trata.

Sea φ esta función desconocida.

Las componentes de los desplazamientos, tendrán la forma, por hipótesis y, en este ejemplo:

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz};$$

y en rigor, el problema se habrá simplificado, puesto que en vez de las tres incógnitas u, v y w, tendremos sólo una función desconocida, que será la función φ.

De las tres ecuaciones anteriores se deduce:

$$0 = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = \frac{d\frac{d\varphi}{dx}}{dx} + \frac{d\frac{d\varphi}{dy}}{dy} + \frac{d\frac{d\varphi}{dz}}{dz} =$$

$$= \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

Tal es la expresión, en este caso, de la dilatación cúbica.

Pero recordando la significación del símbolo

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2},$$

y aplicándolo á φ, resulta que la dilatación cúbica tendrá la siguiente forma:

$$\theta = \Delta\varphi.$$

Llevemos estas simplificaciones á las ecuaciones del equilibrio elástico para el interior del cuerpo, es decir, á lo que hemos llamado el grupo (1), admitiendo además que sobre el interior del cuerpo no actúan fuerzas exteriores, es decir, que X, Y, Z..... son todas iguales á cero.

En este caso, el grupo (1) se reduce al siguiente:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\Delta u = 0, \\ (\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dy} + \mu\Delta v = 0, \\ (\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dz} + \mu\Delta w = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Determinemos, para substituirlos en estas ecuaciones, Δu, Δv, Δw. Pongamos en vez de u, v, w, sus expresiones, y tendremos:

$$\Delta u = \Delta\left(\frac{d\varphi}{dx}\right);\ \Delta v = \Delta\left(\frac{d\varphi}{dy}\right);\ \Delta w = \Delta\left(\frac{d\varphi}{dz}\right).$$

Hay una propiedad del símbolo Δ de que no hemos hablado hasta aquí, pero que es elemental, á saber: que los símbolos d y Δ pueden invertirse.

Admitámosla ahora para no interrumpir la demostración, reservándonos para luego el demostrarla.

Invirtiendo, pues, estos dos símbolos en las ecuaciones anteriores, resultará

$$\Delta u = \Delta\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \frac{d\,.\,\Delta\varphi}{dx};\ \Delta v = \Delta\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = \frac{d\,.\,\Delta\varphi}{dy};$$

$$\Delta w = \Delta\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) = \frac{d\,.\,\Delta\varphi}{dz};$$

y recordando que $\theta = \Delta\varphi$,

$$\Delta u = \frac{d\theta}{dx};\ \Delta v = \frac{d\theta}{dy};\ \Delta w = \frac{d\theta}{dz}.$$

Poniendo estos valores en las ecuaciones (1), se convertirán éstas en

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\frac{d\theta}{dx} = 0,$$

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dy} + \mu\frac{d\theta}{dy} = 0;$$

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dz} + \mu\frac{d\theta}{dz} = 0;$$

ó bien:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{d\theta}{dx} = 0,$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{d\theta}{dy} = 0,$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{d\theta}{dz} = 0,$$

y suponiendo que $\lambda + 2\mu$ no es cero,

$$\frac{d\theta}{dx} = 0;\ \frac{d\theta}{dy} = 0;\ \frac{d\theta}{dz} = 0.$$

La primera ecuación nos dice que θ no contiene x, puesto que su derivada con relación á x es cero; la segunda, que no contiene y, y la tercera, que no contiene z.

Luego θ es una cantidad constante para toda la extensión del cuerpo, ya que no depende de x, y, z.

De aquí se deduce el siguiente:

Teorema.—En un sistema elástico limitado ó ilimitado, sobre el cual no actúan fuerzas exteriores y en que se demuestre *à priori*, que las componentes de los deplazamientos para cualquier punto son las derivadas parciales de primer orden de una función x, y, z, con relación á estas tres variables, *la dilatación cúbica* θ es constante para toda la extensión del sistema.

De modo, que si consideramos un volumen infinitamente pequeño del sistema, éste podrá deformarse, pero el valor numérico de su volumen no variará. El volumen primitivo y el deformado tendrán distinta forma: el primero será, por ejemplo, una esfera; el segundo, un elipsoide; pero ambas figuras tendrán el mismo volumen.

Si quisiéramos acabar de resolver el problema, es decir, determinar la función φ, tendríamos que integrar la ecuación

$$\theta = \text{constante},$$

ó bien

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = + \text{constante},$$

que poniendo por u, v, y w sus valores se convierte en

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = \text{constante},$$

Pero la integración de esta ecuación diferencial es muy difícil y se enlaza con otros problemas, que no son de este momento.

***

Dijimos antes, que los símbolos d y Δ podían invertirse, y vamos á demostrarlo.

Sea $\Delta\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$ por ejemplo.

Tendremos, según la definición del símbolo Δ,

$$\Delta\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=\frac{d^2\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx^2}+\frac{d^2\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dy^2}+\frac{d^2\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dz^2}.$$

Pero las definiciones pueden invertirse; luego

$$\Delta\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=\frac{d\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2}\right)}{dx}+\frac{d\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)}{dx}+\frac{d\left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)}{dx}=$$

$$=\frac{d\left[\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right]}{dx}=\frac{d\Delta\varphi}{dx},$$

que es precisamente lo que nos proponíamos demostrar.

***

CUARTO EJEMPLO. *Equilibrio de una capa esférica.*—Nos proponemos determinar los desplazamientos de equilibrio de una capa sólida homogénea é isótropa, limitada por dos esferas concéntricas.

Suponemos que en el interior del sólido no actúan fuerzas exteriores, ni siquiera la acción de la gravedad, y que sobre cada una de las superficies esféricas actúa una presión constante y uniforme, que para la esfera interior la designaremos por P_0 y para la esfera exterior, por P_1.

Tomaremos el origen de coordenadas en el centro de ambas esferas, E_1, E_0 (fig. 43).

Considerando un punto M, de la capa esférica, es evidente, por razón de la simetría del sistema y de las fuerzas,

que en su desplazamiento tomará dicho punto la dirección MM_1 del radio OM.

Además, también por razón de simetría, todos los puntos que estén á igual distancia $OM = r$ del centro, sufrirán el mismo desplazamiento MM_1. De modo que dicho desplazamiento sólo dependerá de la variable r. Tendremos, pues, representándolos por l,

$$\text{desplazamiento } MM_1 = l = l(r).$$

Llamando también l á la función de r.

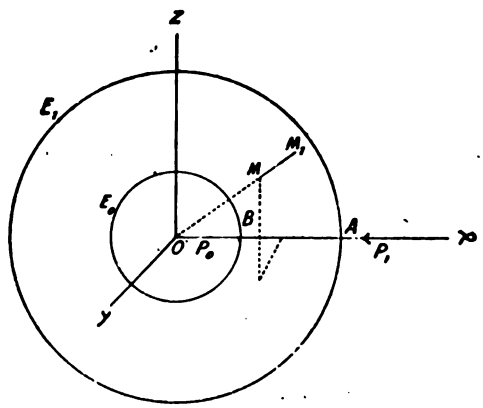


Figura 43.

Las tres componentes u, v, w, del desplazamiento de un punto cualquiera, se obtendrán multiplicando l por los cosenos de los ángulos que forma, ó que forma el radio OM, con los tres ejes, que serán evidentemente $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, de modo que tendremos:

$$u = l(r)\frac{x}{r};\ v = l(r)\frac{y}{r};\ w = l(r)\frac{z}{r},$$

ó, abreviadamente:

$$u = l\frac{x}{r}; \quad v = l\frac{y}{r}; \quad w = l\frac{z}{r}.$$

Pero se observa desde luego, que este caso está comprendido en el ejemplo anterior; es decir, que u, v, w, son las derivadas de una función de x, y, z, con relación á estas variables.

En efecto; la función

$$udx + vdy + zdz,$$

para estas expresiones de u, v, w, es una diferencial exacta, como se ve desde luego.

Pongamos en vez de u, v, w, sus valores y tendremos:

$$udx + vdy + zdz = \frac{l(r)}{r}\, xdx + \frac{l(r)}{r}\, ydy + \frac{l(r)}{r}\, zdz =$$

$$= \frac{l(r)}{r}\,(xdx + ydy + zdz).$$

Pero siendo la distancia de M al origen r, resulta:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

y diferenciando

$$xdx + ydy + zdz = rdr;$$

luego

$$udx + vdy + wdz = \frac{l(r)}{r}\, rdr = l(r)\, dr.$$

Ahora bien; el segundo miembro no contiene más que una variable; luego será la *diferencial exacta* de una función φ determinada por

$$\varphi = fl(r)dr;$$

función evidentemente de r, y, por lo tanto, de x, y, z.

Por otra parte, se sabe por cálculo, que cuando

$$udx + vdy + zdz,$$

es una diferencial exacta de una función, u, v, w son las derivadas parciales de dicha función; con lo cual queda demostrado lo que habíamos dicho.

Mas sabemos que en este caso, según el teorema que demostramos, la dilatación cúbica es constante: suponiendo que su valor sea $3c$, que todavía es desconocido, tendremos:

$$\theta = 3c;$$

y como

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz},$$

poniendo por u, v, w, sus valores, resultará:

$$\frac{d \cdot l(r) \frac{x}{r}}{dx} + \frac{d \cdot l(r) \frac{y}{r}}{dy} + \frac{d \cdot l(r) \frac{z}{r}}{dz} = 3c;$$

de donde

$$\frac{d \cdot l(r)}{dr} \frac{dr}{dx} \frac{x}{r} + l(r) \frac{d \frac{x}{r}}{dr} + \frac{d \cdot l(r)}{dr} \frac{dr}{dy} \frac{y}{r} +$$

$$+ l(r) \frac{d \frac{y}{r}}{dy} + \frac{dl(r)}{dr} \frac{dr}{dz} \frac{z}{r} + l(r) \frac{d \frac{z}{r}}{dz} = 3c.$$

Pero de $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$ se deduce,

$$\frac{dr}{dz} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}; \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}; \frac{dr}{dz} = \frac{z}{r};$$

luego el valor de θ se simplificará y tendremos:

$$\frac{dl(r)}{dr}\frac{x^2}{r^2}+\frac{dl(r)}{dr}\frac{y^2}{r^2}+\frac{dl(r)}{dr}\frac{z^2}{r^2}+$$

$$+\,l(r)\left(\frac{d\,\frac{x}{r}}{dx}+\frac{d\,\frac{y}{r}}{dy}+\frac{d\,\frac{z}{r}}{dz}\right)=3\,c,$$

y también,

$$\frac{dl(r)}{dr}+l(r)\left(\frac{d\,\frac{x}{r}}{dx}+\frac{d\,\frac{y}{r}}{dy}+\frac{d\,\frac{z}{r}}{dz}\right)=3\,c.$$

Desarrollando el paréntesis,

$$\frac{d\,.\,\frac{x}{r}}{dx}+\frac{d\,.\,\frac{y}{r}}{dy}+\frac{d\,.\,\frac{z}{r}}{dz}=$$

$$=\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}=$$

$$=\frac{3r^2-x^2-y^2-z^2}{r^3}=\frac{3r^2-r^2}{r^3}=\frac{2}{r};$$

por lo tanto,

$$\frac{d\,.\,l(r)}{dr}+2\,\frac{l(r)}{r}=3c.$$

Esta ecuación integrada nos dará la forma de $l(r)$.

No perdamos de vista la marcha que hemos seguido.

Hemos partido del teorema demostrado en el ejemplo anterior, y alli vimos que, en rigor, las tres ecuaciones se reducían á una, que era $\theta =$ constante, precisamente la que acabamos de obtener; así es que si determinamos el valor de $l(r)$ de manera que satisfaga á la última ecuación, las tres ecuaciones del grupo (1) quedarán satisfechas y se verificará el equilibrio elástico en el interior del cuerpo.

Pero nos queda todavia la segunda parte del problema:

ver si esta expresión de l, con sus constantes arbitrarias, satisface á las ecuaciones de los límites.

***

Integremos ahora la ecuación que ha de darnos la forma de l. Dicha ecuación

$$\frac{d \cdot l(r)}{dr} + 2\frac{l(r)}{r} = 3c,$$

en que la constante 0 se ha puesto para comodidad del cálculo bajo la forma $3c$, se integra sin dificultad, porque es una ecuación diferencial lineal de primer orden, en que la función es $l(r)$ y la variable independiente, r; por lo tanto, del tipo.

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y + f_1(x) = 0,$$

que se estudia en los elementos de Cálculo integral. Bastaría aplicar á nuestro caso la fórmula general para estas ecuaciones. Pero es tan sencilla, que se integra directamente por un cambio de variables. No hay más que poner

$$l(r) = l_1(r)\, r,$$

ó abreviadamente,

$$l = l_1 r,$$

en que l_1 es una nueva función de r.

Diferenciando con relación á r, tendremos:

$$\frac{dl}{dr} = \frac{dl_1}{dr} \cdot r + l_1,$$

y substituyendo en la propuesta

$$\frac{dl_1}{dr} \cdot r + l_1 + 2\frac{1}{r} l_1 r = 3c,$$

ó bien

$$\frac{dl_1}{dr} + \frac{3l_1 - 3c}{r} = 0.$$

Separando variables,

$$\frac{dl_1}{3l_1 - 3c} + \frac{dr}{r} = 0;$$

integrando,

$$\frac{1}{3} \log (l_1 - c) + \log r = \frac{1}{3} \log b,$$

en que b es una nueva constante; y pasando de los logaritmos á los números,

$$(l_1 - c)\, r^3 = b.$$

Despejando l_1, resultará:

$$l_1 = c + \frac{b}{r^3},$$

y, por tanto,

$$l = cr + \frac{b}{r^2}.$$

Resulta, pues, que la función l que buscábamos, tiene la forma precedente, satisface, como hemos visto, al grupo (1) ó sea á la condición equivalente.

$$\theta = \text{constante} = 3c,$$

y contiene dos constantes arbitrarias, b, c, que procuraremos determinar de modo que satisfagan al grupo (2), el cual, como recordarán mis oyentes, era éste:

$$\begin{aligned} P\, l &= N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma, \\ Pm &= N_2\beta + T_2\gamma + T_3\alpha, \\ P\, n &= N_3\gamma + T_2\alpha + T_1\beta, \end{aligned} \qquad (2)$$

advirtiendo, para evitar confusiones, que la l que entra en estas fórmulas es distinta de la que hemos considerado en todo este ejemplo como expresión del desplazamiento radial.

Estas últimas fórmulas (2) han de quedar satisfechas para la esfera exterior y para la interior, cuando en dichas fórmulas pongamos en vez de las N, P sus valores expresados en valores de u, v, w.

Como todo es igual para todos los puntos de cada esfera, basta que las ecuaciones (2) queden satisfechas para un punto de la esfera exterior y para otro de la esfera interior; y á fin de simplificar, consideraremos el punto A de la esfera exterior, que está sobre las x, y el punto B de la esfera interior que está sobre el mismo eje.

Vamos, pues, á tomar estos dos puntos A y B; á aplicar á ellos las fórmulas (2) y á ver si podemos determinar las constantes b, c, de modo que las ecuaciones expresadas queden satisfechas.

Veamos á lo que se reducen las ecuaciones (2) para el punto A.

l, m, n, son los cosenos de los ángulos que forma con los ejes la fuerza de compresión por unidad de superficie P_1, que actúa en A; luego tendremos evidentemente, puesto que P_1, coincide con el eje de las x, formando con las x positivas un ángulo igual á 180°, y que es perpendicular á los ejes de las y y de las z.

$$l = -1;\ m = 0;\ n = 0.$$

Por otra parte, α, β, γ representan los cosenos de los ángulos que forma con los tres ejes la normal exterior á la esfera en el punto A, de modo que:

$$\alpha = 1;\ \beta = 0;\ \gamma = 0.$$

Substituyendo unos y otros valores en las ecuaciones (2), resultará

$$\left.\begin{aligned} -P_1 &= N_1, \\ 0 &= T_3, \\ 0 &= T_2. \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

Esto para el punto A.

En cuanto al punto B, tendremos, por consideraciones análogas,

$$l = 1;\ m = 0;\ n = 0;$$
$$\alpha = -1;\ \beta = 0;\ \gamma = 0;$$

y por tanto:

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= -N_1, \\ 0 &= -T_3, \\ 0 &= -T_2. \end{aligned}\right\} \qquad (2'')$$

Las fórmulas (2′) y (2″) son las que substituyen al grupo (2), y sólo nos queda para terminar el problema, determinar T y N para los puntos expresados A y B y ver si pueden determinarse las constantes b, c, de modo que satisfagan á dichas ecuaciones.

***

Recordemos que los valores de las deformaciones eran,

$$u = l(r)\frac{x}{r}, \quad v = l(r)\frac{y}{r}, \quad w = l(r)\frac{z}{r},$$

y que para $l(r)$ hemos obtenido,

$$l(r) = cr + \frac{b}{r^2}.$$

Substituyendo esta expresión en u, x, w, y diferenciando con relación á x, y, z para substituir en las expresiones de N y T las derivadas que se obtengan, tendremos

$$u = l(r)\frac{x}{r} = \left(cr + \frac{b}{r^2}\right)\frac{x}{r}; \quad v = \left(cr + \frac{b}{r^2}\right)\frac{y}{r};$$

$$w = \left(cr + \frac{b}{r^2}\right)\frac{z}{r};$$

ó bien

$$u = \left(c + \frac{b}{r^3}\right)x; \quad v = \left(c + \frac{b}{r^3}\right)y; \quad w = \left(c + \frac{b}{r^3}\right)z,$$

y

$$\frac{du}{dx} = \left(c + \frac{b}{r^3}\right) - \frac{3b}{r^4}\frac{dr}{dx}x; \quad \frac{du}{dy} = -\frac{3b}{r^4}\frac{dr}{dy}x,$$

$$\frac{du}{dz} = -\frac{3b}{r^4}\frac{dr}{dz}x; \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{3b}{r^4}\frac{dr}{dx}y;$$

$$\frac{dv}{dy} = \left(c + \frac{b}{r^3}\right) - \frac{3b}{r^4}\frac{dr}{dy}y; \quad \frac{dv}{dz} = -\frac{3b}{r^4}\frac{dr}{dz}y;$$

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{3b}{r^4}\frac{dr}{dx}z; \quad \frac{dw}{dy} = -\frac{3b}{r^4}\frac{dr}{dy}z;$$

$$\frac{dw}{dz} = \left(c + \frac{b}{r^4}\right) - \frac{3b}{r^4}\frac{dr}{dz}z;$$

Además, como $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, resulta,

$$xdr = rdr; \quad ydy = rdr; \quad zdz = rdr;$$

y

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}; \quad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}; \quad \frac{dr}{dz} = \frac{z}{r}.$$

Y así las primeras derivadas de u, v, w, con relación á x, y, z, serán

$$\frac{du}{dx} = \left(c + \frac{b}{r^3}\right) - \frac{3b}{r^4}\frac{x^2}{r}; \quad \frac{du}{dy} = -\frac{3b}{r^4}\frac{yx}{r};$$

$$\frac{du}{dz} = -\frac{3b}{r^4}\frac{zx}{r}; \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{3b}{r^4}\frac{xy}{r};$$

$$\frac{dv}{dy}=\left(c+\frac{b}{r^3}\right)-\frac{3b}{r^4}\,\frac{y^2}{r};\quad \frac{dv}{dz}=-\frac{3b}{r^4}\,\frac{zy}{r};$$

$$\frac{dw}{dx}=-\frac{3b}{r^4}\,\frac{xz}{r};\quad \frac{dw}{dy}=-\frac{3b}{r^4}\,\frac{yz}{r};$$

$$\frac{dw}{dz}=\left(c+\frac{b}{r^3}\right)-\frac{3b}{r^4}\,\frac{z^2}{r}.$$

Según acabamos de indicar, tendremos que substituir es-

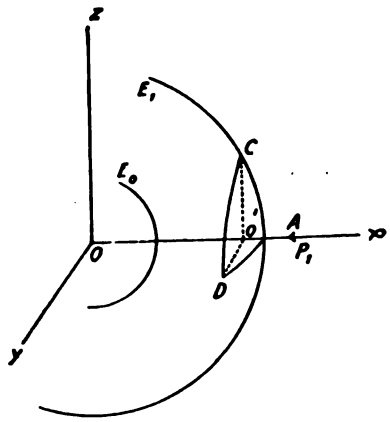


Figura 44.

tas derivadas en los valores de N y T; aplicar los valores que resulten á los puntos A y B (fig. 43), y substituirlos por último, en (2′) para el punto A y en (2″) para el punto B.

Mas es preferible, para abreviar los célculos, aplicar las derivadas anteriores á los dos puntos en cuestión, y hacer después las substituciones en N y T de los valores que resulten para dichas derivadas.

Empecemos por el punto A (fig. 43).

Para este punto, llamando r_1 al radio OA, y siendo ADO el tetraedro (fig. 44), resultará:

Coordenadas del punto A..... $x=r_1$, $y=0$, $z=0$;

y substituyendo,

$$\frac{du}{dx} = \left(c + \frac{b}{r^3_1}\right) - \frac{3b}{r^3_1} = c - \frac{2b}{r^3_1}, \quad \frac{du}{dy} = 0; \quad \frac{du}{dz} = 0;$$

$$\frac{dv}{dx} = 0; \quad \frac{dv}{dy} = c + \frac{b}{r^3_1}; \quad \frac{dv}{dz} = 0;$$

$$\frac{dw}{dx} = 0; \quad \frac{dv}{dy} = 0; \quad \frac{dw}{dz} = \left(c + \frac{b}{r^3_1}\right).$$

Apliquemos estos valores á las expresiones de N y T, recordando que $\theta = 3c$.

En general,

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu \frac{du}{dx},$$

y resultará en este caso

$$N_1 = 3\lambda c + 2\mu\left(c - \frac{2b}{r^3_1}\right) = (3\lambda + 2\mu)c - \frac{4\mu b}{r^3_1};$$

$$N_2 = \lambda\theta + 2\mu \frac{dv}{dy},$$

y, por lo tanto,

$$N_2 = 3\lambda c + 2\mu\left(c + \frac{b}{r^3_1}\right) = (3\lambda + 2\mu)c + \frac{2\mu b}{r^3_1};$$

$$N_3 + \lambda\theta + 2\mu \frac{dw}{dz},$$

por consiguiente,

$$N_3 = 3\lambda c + 2\mu\left(c + \frac{b}{r^3_1}\right) = (3\lambda + 2\mu)c + \frac{2\mu b}{r^3_1};$$

$$T_1 = \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right) \text{ se convierte en } T_1 = 0,$$

$$T_2 = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right) \qquad \text{en } T_2 = 0,$$

$$T_3 = \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right) \qquad \text{en } T_3 = 0.$$

Estos valores tendremos que substituirlos en el grupo (2'), de modo que

$$\left.\begin{aligned} -P_1 &= (3\lambda + 2\mu)c - \frac{4\mu b}{r^3_1} \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Otro tanto podremos repetir para el punto B de la esfera interior (fig. 45), en que el tetraedro será $CDEF$. Hemos

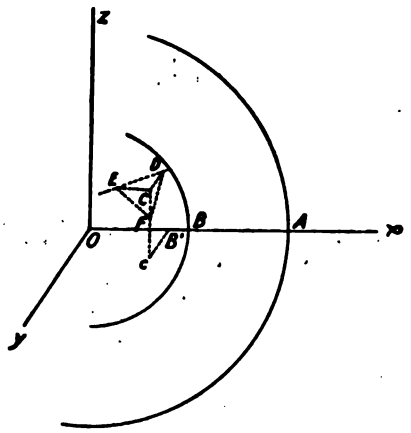


Figura 45.

tomado el punto C, entre las dos esferas, como vértice, y hemos trazado las rectas CE, CD y CF, paralelas á los ejes x, y, z. Claro es que el punto C esta escogido de modo que estas rectas corten á la esfera, lo cual siempre es posible.

Este tetraedro, sumamente pequeño, puede trazarse de modo que los puntos B y B' estén muy próximos: sus coordenadas serán casi las mismas, y podremos suponer que son r_0, o, o.

Así, pues, las coordenadas del punto B serán, llamando r_0 al radio OB de la esfera interior,

$$x = r_0, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

las derivadas para este punto tomarán los valores,

$$\frac{du}{dx}=\left(c+\frac{b}{r^3_0}\right)-\frac{3b}{r^3_0}=c-\frac{2b}{r^3_0},\ \frac{du}{dy}=0,\ \frac{du}{dz}=0,$$

$$\frac{dv}{dx}=0,\ \frac{dv}{dy}=\left(c+\frac{b}{r^3_0}\right),\ \frac{dv}{dz}=0,$$

$$\frac{dw}{dx}=0,\ \frac{dw}{dy}=0,\ \frac{dw}{dz}=\left(c+\frac{b}{r^3_0}\right),$$

y substituyendo como antes estas expresiones en las de N y T, tendremos que

$$N_1=\lambda\theta+2\mu\frac{du}{dx}$$

se convertirá en

$$N_1=3\lambda c+2\mu\left(c-\frac{2b}{r^3_0}\right)=(3\lambda+2\mu)c-\frac{4\mu b}{r^3_0},$$

$$N_2=\lambda\theta+2\mu\frac{dv}{dy}$$

en

$$N_2=3\lambda c+2\mu\left(c+\frac{b}{r^3_0}\right)=(3\lambda+2\mu)+\frac{2\mu b}{r^3_0};$$

$$N_3=\lambda\theta+2\mu\frac{dw}{dz}$$

en

$$N_3=3\lambda c+2\mu\left(c+\frac{b}{r^3_0}\right)=(3\lambda+2\mu)c+\frac{2\mu b}{r^3_0};$$

$$T_1=\mu\left(\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz}\right)\text{ en } T_1=0,$$

$$T_2=\mu\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)\text{ en } T_2=0,$$

$$T_3=\mu\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right)\text{ en } T_3=0,$$

Los precedentes valores, puestos en (2″) dan

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= -\left[(3\lambda + 2\mu)c - \frac{4\mu b}{r^3_0}\right] \\ 0 &= 0, \\ 0 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Del grupo (2) *todas las ecuaciones quedan satisfechas por sí mismas (es decir, reducidas á* 0=0), aplicadas que sean á los puntos A y B (figs. 43, 44 y 45), menos las dos ecuaciones

$$-P_1 = (3\lambda + 2\mu)c - \frac{4\mu b}{r^3_1},$$

$$-P_0 = (3\lambda + 2\mu)c - \frac{4\mu b}{r^3_0}.$$

Estas ecuaciones quedarán también satisfechas si se determinan las dos constantes arbitrarias b, c, de modo que las satisfagan.

Despejando entre ambas las expresadas constantes, tendremos:

$$c = \frac{r^3_0 P_0 - r^3_1 P_1}{(3\lambda + 2\mu)(r^3_1 - r^3_0)}; \quad b = \frac{(P_0 - P_1) r^3_0 r^3_1}{4\mu(r^3_1 - r^3_0)}.$$

De este modo quedarán satisfechos los dos grupos (1) y (2), reduciéndose á identidades.

Y u, v, w, substituyendo en las fórmulas que ya hemos obtenido, nos darán para las componentes del desplazamiento elástico de cualquier punto que diste del centro la magnitud r,

$$u = \frac{x}{r}\left[\frac{r^3_0 P_0 - r^3_1 P_1}{(3\lambda + 2\mu)(r^3_1 - r^3_0)} r + \frac{(P_0 - P_1) r^3_0 r^3_1}{4\mu(r^3_1 - r^3_0)} \frac{1}{r^2}\right],$$

$$v = \frac{y}{r}\left[\frac{r^3_0 P_0 - r^3_1 P_1}{(3\lambda + 2\mu)(r^3_1 - r^3_0)} r + \frac{(P_0 - P_1) r^3_0 r^3_1}{4\mu(r^3_1 - r^3_0)} \frac{1}{r^2}\right],$$

$$w = \frac{z}{r}\left[\frac{r^3_0 P_0 - r^3_1 P_1}{(3\lambda + 2\mu)(r^3_1 - r^3_0)} + \frac{(P_0 - P_1) r^3_0 r^3_1}{4\mu r^3_1 - r^3_0} \frac{1}{r^2}\right],$$

Vemos que u, v, w están expresadas en función de x, y, z, y también de r, pero $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. De suerte que tenemos los componentes de los desplazamientos para cualquier punto de la capa esférica, según decíamos.

En efecto, todas las demás cantidades P_0, P_1, r_0 y r_1, son cantidades conocidas, porque constituyen los datos del problema. Y λ, μ son también constantes conocidas, que dependen de la naturaleza del cuerpo, y que se conocerán por experiencias anteriores efectuadas para este material.

Respecto á los esfuerzos interiores, hemos obtenido ya los valores de N_1, N_2 y N_3 en función de r.

El problema queda, pues, completamente resuelto.

Dos palabras más para concluir.

Es evidente que en este caso todas las fuerzas exteriores se hacen equilibrio, porque la P_1 irradia uniformemente alrededor del centro de las esferas, luego su resultante es nula.

Y lo mismo puede decirse de las fuerzas P_0.

La capa esférica no tomará, pues, ningún movimiento total de traslación ni de rotación.

Mr. Lamé, en sus leccciones sobre la elasticidad de los cuerpos sólidos, hace aplicaciones interesantes de las fórmulas que hemos obtenido al equilibrio de una envolvente esférica, al de una costra planetaria y á la del globo terrestre; pero la falta de tiempo nos impide dar más latitud al ejemplo que hemos presentado, y, por lo demás, èstas nuevas aplicaciones no presentan ninguna dificultad teórica.

XI.— Estudio químico-geognóstico de algunos materiales volcánicos del Golfo de Nápoles (*).

POR RAMÓN LLORD Y GAMBOA.

XIV

Obsidiana de Posilipo.

Poco antes de visitar la antigua gruta (pasadizo) de Posilipo, apareció, en las nuevas excavaciones practicadas en este célebre camino subterráneo, un gran trozo de obsidiana de algunos kilogramos de peso. Destinado al Museo de Nápoles, logré sacar de él, á martillazos, un buen ejemplar.

Esta obsidiana, notable por su tamaño, no será quizá la única que ha de hallarse en las excavaciones de aquella colina, compuesta, como se sabe, de materiales tufáceos, en los que se pueden reconocer todos los productos volcánicos deseminados y mezclados á depósitos calizo-arcillosos.

La obsidiana es semitransparente en gruesos trozos y transparente en pequeños espesores; de color verde botella algo amarillento. En su masa se ven á simple vista pequeñas burbujas esféricas, testigos de su anterior estado de fusión. Su brillo es perfectamente vítreo; sus bordes, de fractura cortantes, raya ligeramente al vidrio ordinario.

Ensayos pirognósticos.—Fusible en los bordes á fuerte llama de *O*. En polvo puede fundirse totalmente sobre el carbón, en un vidrio verde-claro, análogo al trozo pulverizado. Un trocito fuertemente enrojecido, no pierde su color primitivo después de frío.

En el alambre de platino con sal de fósforo se obtuvo un

(*) Véase el núm. 3 del tomo IV y el núm. 4 del tomo VI de la REVISTA, Marzo de 1906 y Octubre de 1907, respectivamente.

bello esqueleto de SiO_2 (tridimita), y con el bórax sólo se reconoció el *hierro* en caliente y con mucha materia.

El resultado del análisis fué el siguiente:

$$SiO_2 = 70{,}20\ \%$$

Hierro = $(Fe + Fe_2)$.	Ausencia de Cl, P_2O_5 y Mn.
Aluminio.	
Magnesio (ínfima porción).	
Potasio.	
Sodio.	
Litio.	

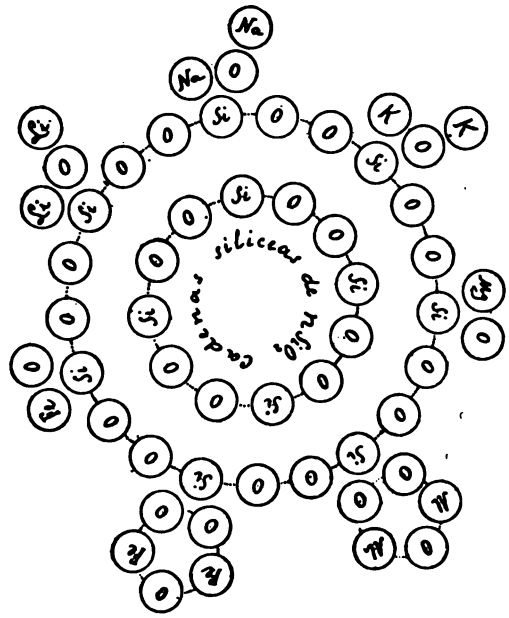
Este análisis difiere un poco de los publicados sobre obsidianas de distintas procedencias. No he visto, en efecto, consignado el *litio*, y en casi todos se inscribe la *cal*, que me ha sido imposible reconocer ni aun por medio del espectroscopio, costando trabajo determinar la *magnesia*.

Se trata, por consiguiente, de un vidrio natural, no de los más ácidos; es un silicato múltiple de los metales anotados, con exceso de sílice; este exceso ejerce el papel de diluente de las moléculas definidas de silicatos ácidos. Forma un sistema natural planetario-iónico, cuya expresión gráfica ideal en el espacio se ha dibujado á continuación:

En este sistema se ha formulado la obsidiana de Posilipo; cualquiera otra puede formularse de análoga manera, sin más que expresar la cal, por ejemplo, como lo está la magnesia, etc., añadiendo á la cadena silícea exterior una molécula correspondiente de SiO_2. Todas las obsidianas formadas por el volcanismo terrestre quedan comprendidas en esa expresión ideal. En ella vemos los sistemas parciales: alumínico, férrico, ferroso, magnésico, potásico, sódico, lítico, girando en una atmósfera silícea que domina en el sistema. Este dominio de las cadenas de anhídrido silícico da carácter geognóstico y analítico á la roca, caracteres variables en función de la cantidad de disolvente, acentuándose ó reba-

jándose sus propiedades ácidas con los diversos valores de SiO_2 en la masa vítrea.

Concíbese fácilmente que á temperatura muy elevada este sistema se destruya, persistiendo los torbellinos atómicos en el espacio como signos iónicos de grandes energías cinéticas, integrados por otros sistemas girostáticos elementales,



análogamente á una nebulosa cuando empieza á resolverse en estrellas.

Si sólo tenemos en cuenta los factores *temperatura* y *disolvente*, cabe la comparación, hasta cierto punto, de una masa en fusión con una disolución acuosa de sales disociables. En efecto, en una tal disolución, cuyo disolvente haga variar por su cantidad, á temperatura constante, las relaciones mutuas entre la materia disuelta y la misma disociada, aumentando el número *n* de moléculas acuosas indefinidamente, habrá un instante en que la ionización de la sal disuelta alcanzará un máximo para un determinado valor

de *n;* sucediendo lo inverso al ir sustrayendo disolvente, favoreciendo así las nuevas combinaciones químicas entre los iones del electrolitro y alcanzando la expresada ionización un mínimo para otro cierto valor de *n;* deduciéndose de lo anterior que, á temperatura constante y descartadas las demás circunstancias físicas del problema, la ionización habida en el seno de una disolución, acuosa en nuestro ejemplo, es función de la cantidad de disolvente (*). Pues en una masa en fusión, y suponiendo constantes las relaciones ponderales de las materias que la integran, la variable es la temperaratura *T*, y la ionización, que aquí se confunde con la tensión de disociación, aumentando con la cantidad de calor, alcanzará un máximo para un cierto valor de *T* y viceversa; disminuyendo la temperatura, la ionización disminuirá también hasta llegar á un mínimo para otro cierto valor de *T*. Luego deducimos igualmente que la disociación molecular de una masa por la acción progresiva é ilimitada del calor, es función de la temperatura, análogamente al ejemplo anterior y descartadas también las demás circunstancias físicas del fenómeno.

En el caso de la obsidiana, variando, por ejemplo, la cantidad de SiO_2 contenido en ella, varía la función anterior, porque el punto de fusión de la masa varía también; por eso es necesario tener presentes, como hemos dicho, las diversas condiciones físicas en que se realiza el fenómeno.

XV

Traquita de Monte Nuovo, cerca de Pozzuolo (Nápoles).

Cenicienta, ligera, microcristalina; está en explotación actualmente, extrayéndola de la falda del monte, destinada á

(*) «En todo electrolitro la disociación crece con la dilución hasta que esta disociación sea completa». (A. Hollard. La théorie des ions et l'électrolyse. París 1900.)

preparar magníficos cementos á estilo romano, indestructibles. Su aspecto es homogéneo, viéndose á la lente la masa traquítica, literalmente cuajada de microcristales; sobre ella destacan algún que otro cristal de mayor tamaño (fenocristales).

Se pulveriza fácilmente, por efecto de su estado físico de porosidad, en poros muy pequeños; tanto, que sin tocarla y mirándola á cierta distancia, parece una roca más densa y uniforme. El tacto áspero de su superficie y la lente dan á conocer en seguida su verdadera naturaleza.

Caracteres pirognósticos. —Fusible sobre el carbón, si está pulverizada, en un vidrio blanco-sucio. Se funde con dificultad. Con el bórax y sal de fósforo se reconocen el *hierro* y la *sílice*.

No contiene *fluor* ni *ácido sulfúrico*.

El *cloro* no manifestó su presencia en el polvo hervido con agua; en cambio apareció fuertemente en la disolución nítrica diluída y hervida (cloro en combinación insoluble: *cloro apatita*).

Contiene *ácido fosfórico*.—El resultado analítico fué el siguiente:

$$SiO_2 = 59{,}10\ \%$$

Hierro.	Cloro.
Manganeso.	Fósforo.
Aluminio.	(Oxígeno.)
Calcio.	
Magnesio.	
Potasio.	
Sodio.	
Litio.	

La sílice hallada corresponde á las traquitas propiamente dichas, pudiéndose apreciar en el terreno la corta corriente que originó, formando al propio tiempo una intumescencia (el Monte Nuovo), á causa de su viscosidad; intumescencia de rápida formación y muy reciente (el 28 de Septiembre de 1538.)

El monte tiene poco más de 100 metros de altura.

XVI

Traquita descompuesta de Monte Nuovo.

De la misma cantera donde recogí la anterior es ésta otra: blanca-cenicienta, ligera, pulverulenta en su superficie, impregnada por un ácido que corroe el papel y el cartón de la cajita donde se conserva. Soplando sobre ella, penetra en las fauces el polvillo finísimo, dando en ellas la sensación parecida á la del alumbre.

Un poquito del polvo colocado sobre una tira de papel azul de tornasol humedecido, da una mancha roja intensa. Hervido el polvo con agua y mojada una punta del mismo papel, se pone roja también. Filtrado el líquido acuoso y tratado con cloruro de bario, aparece abundante precipitado de sulfato barítico.

El *cloro* no existe en esta roca, siendo bien digna de anotarse esta ausencia del halógeno, tan constante en todas las estudiadas hasta ahora, y, especialmente, en la traquita anterior no descompuesta. El ácido sulfúrico parece haber ejercido aquí una acción eliminadora del *cloro* en los puntos ó zonas traquíticas impregnadas por los vapores ácidos. Es ésta una primera manifestación de la fase solfatariana del volcanismo que vamos á ver en grande escala en la célebre Solfatara de Pozzuolo, cercana á Monte Nuovo.

XVII

Traquita totalmente descompuesta del cráter de la Solfatara (Pozzuolo-Nápoles.)

Las formaciones traquíticas son extensas y numerosas en los Campos flégreos napolitanos, y parecen caracterizar la mancha eruptiva de esta interesantísima región volcánica, excepción hecha del notable volcán de *Rocca Monfina*, de época posterior á los demás cráteres de los Campos flégreos y contemporáneo del Somma.

Como éste, es Rocca Monfina eminentemente *leucítico*,

citándose los enormes cristales de leucita más ó menos descompuesta contenidos en sus lavas, como los más extraordinarios de los conocidos. La falta de tiempo disponible me impidió visitar éste volcán, algo alejado de Nápoles, proponiéndome hacerlo en otra excursión.

La traquita de la Solfatara ofrece todos los estados de descomposición por los vapores emanados del cráter-circo, el más notable de los actuales por su relativa actividad.

Todo el fondo del cráter está cubierto de arena traquítica, conteniendo cristalitos de azufre.

En los bordes del cráter, y en su parte inferior, tienen lugar los principales desprendimientos gaseosos. Allí se observan todos los grados de descomposición de la traquita. Uno de los varios trozos recogidos, blanco, pulverulento, ligero, deleznable, dió los siguientes caracteres:

Con el agua, después de hervir, abundante *ácido sulfúrico*:

(con $Ba\,Cl_2 + ClHaq$).

Al soplete, sobre el carbón, fundiendo el polvo con carbonato sódico á la llama de *R* de una lámpara de alcohol puro (*), se reconoce fácilmente el azufre hepático, procedente de los sulfatos, con la plata laminada y con el nitroprusiano sódico.

Se vieron ligerísimas señales de *hierro*. Nada de *manganeso*.

Cortas porciones de *sílice*. Nada de *cloro*.

El polvo de esta roca dió fuerte mancha roja sobre el papel azul de tornasol húmedo.

Los sulfatos dominantes son el *cálcico* y *alumínico* (alunita).

La roca es una mezcla de productos de desagregación, con frecuencia impregnada de *sulfuro de arsénico*, especialmente el rojo (*rejalgar*), juntamente con *azufre* en costras cristalinas.

En este cráter se manifiesta en todo su esplendor la fase solfatariana del volcanismo. Hermosa lección práctica se

(*) Este ensayo no debe hacerse con la llama del gas del alumbrado que pueda contener azufre.

aprende contemplando aquel circo y examinando los resultados del metamorfismo por la acción lenta y prolongadísima de los vapores desprendidos de su suelo á través de numerosas aberturas, cuyas dos principales llaman allí *bocas*: grande y pequeña. De todas ellas sale vapor de agua, anhídrido sulfuroso y sulfuros de arsénico, con algo de cloruro amónico, hidrógeno libre y vestigios de selenio, de fósforo, de cloruros de cobre; mucho nitrógeno, oxígeno y ácidos sulfhídrico y carbónico (*).

Parece lógico atribuir á la oxidación del hidrógeno sulfurado en una atmósfera muy húmeda y oxidante (**) la formación de ácido sulfúrico, que corroe todo lo que toca, que expulsa al cloro, que transforma en sulfatos los silicatos de las rocas traquíticas primordiales, con formación de *sílice hidratada* (fiorita) reconocida por M. Scachi. Sobre estos detritus se depositan los sublimados que impregna el agua caliente y tan sulfurantes que el martillo de brillante acero con el que removí algunos sitios para recoger ejemplares se cubrió en algunos minutos de una capa de sulfuro ferroso completamente negro y opaco.

Otras rocas se recogieron, entre ellas una escoria de la última erupción quizá, acaecida en época histórica en este volcán (***). No merecen estudio aparte, estando indicado lo más esencial de la Química geognóstica de este Centro en las consideraciones expuestas.

Doy por terminada esta sucinta reseña, ya demasiado larga, hasta tanto pueda reunir más documentos analíticos de laboratorio recogidos en otras regiones volcánicas, según se expresó al principio de este escrito.

(Laboratorio particular del autor).

(*) Según Deville.—Véase F. Miron, *Etude des phénomenes volcaniques*, París, 1903.

(**) Es grandísima la cantidad de vapor de agua desprendido de esta solfatara. Las rocas están empapadas en agua caliente.

(***) Se admite que la última erupción de la Solfatara tuvo lugar en 1198.

XII.—Nueva teoría para el desarrollo de las ecuaciones finales.

POR GUALTERIO M. SECO.

NÚMERO 5

Cálculo de la matriz de repetición de quinto grado por el método del desarrollo de las menores de segundo y tercer orden.

MATRIZ

$$\begin{vmatrix} -y & a & b & c & d \\ d & -y & a & b & c \\ c & d & -y & a & b \\ b & c & d & -y & a \\ a & b & c & d & -y \end{vmatrix}$$

ÍNDICE DE MENORES

$$\begin{vmatrix} \Delta^{12}_{12} + \Delta^{345}_{345} \\ \Delta^{12}_{13} - \Delta^{345}_{245} \\ \Delta^{12}_{14} + \Delta^{345}_{235} \\ \Delta^{12}_{15} - \Delta^{345}_{234} \\ \Delta^{12}_{23} + \Delta^{345}_{145} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \Delta^{12}_{24} - \Delta^{345}_{135} \\ \Delta^{12}_{25} + \Delta^{345}_{134} \\ \Delta^{12}_{34} + \Delta^{345}_{125} \\ \Delta^{12}_{35} - \Delta^{345}_{124} \\ \Delta^{12}_{45} + \Delta^{345}_{123} \end{vmatrix}$$

NOTA. Este cálculo se ha hecho para confrontarlo con el del capítulo primero, y ésta es la causa de que, como allí, aparezca y negativa.

$$\Delta_{12}^{12} = \begin{vmatrix} d & -y & a \\ c & d & -y \\ -y & a & b \end{vmatrix} = -y^3 + bd^2 + a^2c + bcy + ady + ady \begin{vmatrix} -y & a \\ d & -y \end{vmatrix} = \Delta_{345}^{345}$$

$$y^2 - ad =$$

$$\begin{array}{ccc} d & -y & a \end{array} \qquad -y^5 + bd^2y^2 + a^2cy^2 + bcy^3 + ady^3 + ady^3$$

$$+ ady^3 - abd^3 - a^3cd - abcdy - a^2d^2y - a^2d^2y$$

$$\begin{array}{l|l|l|l} -y^5 + bc & y^3 + bd^2 & y^2 - abcd & y - abd^3 \\ \quad + 3ad & \quad + a^2c & \quad - 2a^2d^2 & \quad - a^3cd \end{array}$$

NÚMERO 5 (continuación).

$$\Delta^{12}_{13} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & -y & a \\ c & d & -y \end{vmatrix} = + ay^2 + cd^2 + abc + c^2y - a^2d + bdy$$

$$dy + ac = - \begin{vmatrix} -y & a \\ e & d \end{vmatrix} = - \Delta^{345}_{245}$$

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & -y & a \end{array}$$

$$+ ady^3 + cd^3y + abcdy + c^2dy^2 - a^2d^2y + bd^2y^2$$

$$+ a^2cy^2 + ac^2d^2 + a^2bc^2 + ac^3y - a^3cd + abcdy$$

$$\begin{array}{l|l|l} + ady^3 + c^2d & y^2 + cd^3 & y + ac^2d^2 \\ \quad + bd^2 & \quad + 2abcd & \quad + a^2bc^2 \\ \quad + a^2c & \quad - a^2d^2 & \quad - a^3cd \end{array}$$

$$\Delta^{12}_{14} = \begin{vmatrix} -y & a & b \\ c & d & -y \\ a & b & c \end{vmatrix} = -a^2y - cdy + b^2c - ac^2 - abd - by^2 - cy - ab = \begin{vmatrix} -y & a \\ b & c \end{vmatrix} = \Delta^{345}_{235}$$

$$\begin{array}{l} -y \quad a \quad b \\ \\ \\ \end{array}$$

$$+a^2cy^2 + c^2dy^2 - b^2c^2y + ac^3y + abcdy + bcy^3$$

$$+a^3by + abcdy - ab^3c + a^2bc^2 + a^2b^2d + ab^2y^2$$

$$\begin{array}{r|r|r} +bcy^3 + a^2c & y^2 + ac^3 & y - ab^3c \\ + c^2d & +2abcd & + a^2bc^2 \\ + ab^2 & + a^3b & + a^2b^2d \\ & - b^2c^2 & \end{array}$$

NÚMERO 5 (continuación).

$$\Delta^{12}_{15} = \left|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ -y & a & b \\ d & -y & a \\ a & b & c \\ -y & a & b \end{array}\right| = + a^3 + cy^2 + b^2 d - acd + aby + aby + by + a^2 = - \begin{vmatrix} -y & a \\ a & b \end{vmatrix} = - \Delta^{345}_{234}$$

$$+ a^3 by + bcy^3 + b^3 dy - abcdy + 2ab^2 y^2$$

$$+ a^5 + a^2 cy^2 + a^2 b^2 d - a^3 cd + 2a^3 by$$

$$+ bcy^3 + 2ab^2 y^2 + 3a^3 b \;\Big|\; y + a^5$$

$$+ a^2 c + b^3 d \;\Big|\; + a^2 b^2 d$$

$$- abcd \;\Big|\; - a^3 cd$$

$$\Delta^{12}_{23} = \begin{vmatrix} d & -y & a \\ c & d & -y \\ b & c & d \\ d & -y & a \end{vmatrix} = + by^2 + d^3 + ac^2 + cdy - abd + cdy$$

$$d^2 + cy = \begin{vmatrix} d & -y \\ c & d \end{vmatrix} = \Delta^{345}_{145}$$

$$+ bd^2y^2 + d^5 + ac^2d^2 + cd^3y - abd^3 + cd^3y$$

$$+ bcy^3 + cd^3y + ac^3y + c^2dy^2 - abcdy + c^2dy^2$$

$$\begin{array}{r|l|l|} + bcy^3 + bd^2 & y^2 \quad + 3cd^3 & y \quad + d^5 \\ + 2c^2d & \quad\quad + ac^3 & \quad\quad + ac^2d^2 \\ & \quad\quad - abcd & \quad\quad - abd^3 \end{array}$$

NÚMERO 5 (continuación).

$$\Delta_{24}^{12} = \begin{vmatrix} b & c & d \\ -y & a & b \\ c & d & -y \\ b & c & d \\ -y & a & b \end{vmatrix} = -aby - d^2y + bc^2 - acd - b^2d - cy^2 - cd - by = -\begin{vmatrix} d & -y \\ b & c \end{vmatrix} = -\Delta_{135}^{345}$$

$$+ abcdy + cd^3y - bc^3d + ac^2d^2 + b^2cd^2 + c^2dy^2$$

$$+ ab^2y^2 + bd^2y^2 - b^2c^2y + abcdy + b^3dy + bcy^3$$

$$\begin{array}{r|r|r|} + bcy^3 + ab^2 & y^2 + cd^3 & y + bc^3d \\ + bd^2 & - b^2c^2 & + ac^2d^2 \\ + c^2d & + b^3d & + b^2cd^2 \end{array}$$

$$\Delta^{12}_{25} = \begin{vmatrix} b & c & d \\ -y & a & b \\ d & -y & a \end{vmatrix} = + a^2 b + dy^2 + bcd - ad^2 + b^2 y + acy + bd + ay = \begin{vmatrix} d & -y \\ a & b \end{vmatrix} \Delta^{345}_{234}$$

$$\begin{vmatrix} b & c & d \\ -y & a & b \end{vmatrix}$$

$$+ a^2 b^2 d + bd^2 y^2 + b^2 cd^2 - abd^3 + b^3 dy + abcdy$$

$$+ a^3 by + ady^3 + abcdy - a^2 d^2 y + ab^2 y^2 + ab^2 y^2 + a^2 cy^2$$

$$\begin{array}{l|l|l} + ady^3 + bd^2 & y^2 + b^3 d & y + a^2 b^2 d \\ \quad + ab^2 & \quad + 2abcd & \quad + b^2 cd^2 \\ \quad + a^2 c & \quad + a^3 b & \quad - abd^3 \\ & \quad - a^2 d^2 & \end{array}$$

NÚMERO 5 (continuación).

$$\Delta_{34}^{12} = \begin{vmatrix} b & c & d \\ a & b & c \\ c & d & -y \end{vmatrix} = -b^2 y + ad^2 + c^3 - bcd - bcd - acy + c^2 - bd = \begin{vmatrix} c & d \\ b & c \end{vmatrix} = \Delta_{125}^{345}$$

$$\begin{matrix} b & c & d \\ a & b & c \end{matrix}$$

$$-b^2 c^2 y + ac^2 d^2 + c^5 - bc^3 d - bc^3 d + ac^3 y$$

$$+ b^3 dy - abd^3 - bc^3 d + b^2 cd^2 + b^2 cd^2 - abcdy$$

$$\begin{array}{r|l|r|} -b^2 c^2 & y & +ac^2 d^2 \\ +ac^3 & & +c^5 \\ +b^3 d & & -3\,bc^3 d \\ -abcd & & -abd^3 \end{array}$$

$$\Delta_{35}^{12} = \begin{vmatrix} b & c & d \\ a & b & c \\ d & -y & a \end{vmatrix} = + ab^2 - ady + c^2 d - bd^2 + bcy - a^2 c - bc + ad = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = - \Delta_{124}^{345}$$

$$\begin{matrix} b & c & d \\ a & b & c \end{matrix}$$

$$- ab^3 c + abcdy - bc^3 d + b^2 cd^2 - b^2 c^2 y + a^2 bc^2$$

$$+ a^2 b^2 d - a^2 d^2 y + ac^2 d^2 - abd^3 + abcdy - a^3 cd$$

$$\begin{array}{l|l|l} & + 2abcd & y \\ & - b^2 c^2 & \\ & - a^2 d^2 & \end{array} \quad \begin{array}{l} - ab^3 c \\ - bc^3 d \\ + b^2 cd^2 \\ + a^2 bc^2 \\ + a^2 b^2 d \\ + ac^2 d^2 \\ - abd^3 \\ - a^3 cd \end{array}$$

NÚMERO 5 (continuación).

$$\Delta\,{}^{12}_{45} = \begin{vmatrix} b & c & d \\ a & b & c \\ -y & a & b \end{vmatrix} = +b^3 + a^2 d - c^2 y + bdy - abc - abc + b^2 - ac = \begin{vmatrix} b & c \\ a & b \end{vmatrix} = \Delta\,{}^{345}_{123}$$

$$\begin{vmatrix} b & c & d \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$+b^5 + a^2 b^2 d - b^2 c^2 y + b^3 dy - ab^3 c - ab^3 c$$
$$- ab^3 c - a^3 cd + ac^3 y - abcdy + 2\,a^2 bc^2$$

$$\begin{array}{l|l} + ac^3 & y + b^5 \\ - b^2 c^2 & \quad + a^2 b^2 d \\ + b^3 d & \quad - 3\,ab^3 c \\ - abcd & \quad - a^3 cd \end{array}$$

$-y^5 + 5ad$	$y^3 + 5a^2c$	$y^2 + 5a^3b$	$y + a^5$	$= 0$
$+ 5bc$	$+ 5ab^2$	$+ 5ac^3$	$+ 5a^2b^2d$	
	$+ 5c^2d$	$- 5a^2d^2$	$- 5a^3cd$	
	$+ 5bd^2$	$+ 5abcd$	$+ b^5$	
		$- 5b^2c^2$	$- 5ab^3c$	
		$+ 5b^3d$	$+ 5a^2bc^2$	
		$+ 5cd^3$	$+ 5b^2cd^2$	
			$- 5bc^3d$	
			$+ c^5$	
			$- 5abd^3$	
			$+ 5ac^2d^2$	
			$+ d^5$	

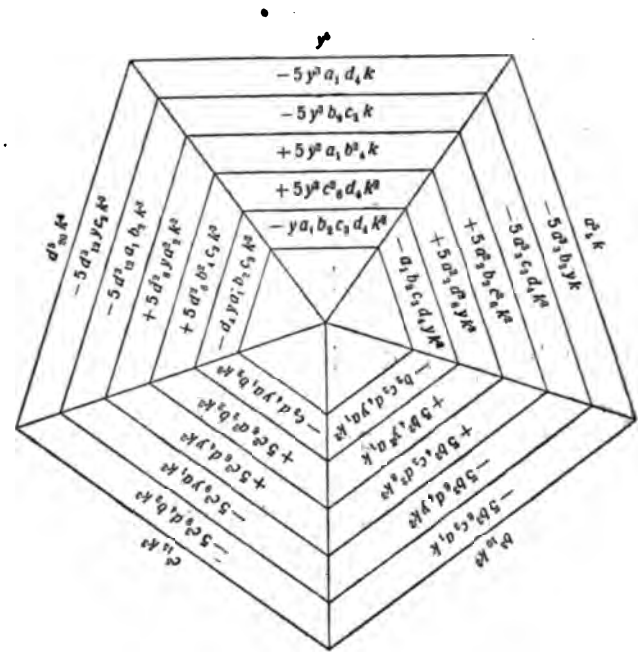

$-5y^3a_1d_4k$
$-5y^3b_4c_1k$
$+5y^3a_1b^3_4k$
$+5y^3c^2_8d_4k^3$
$-ya_1b_2c_3d_4k^3$
$-a_1b_2c_3d_4yk^3$
$+5a^2_3d^2_8yk^3$
$+5a^2_3b_5c^2_8k^3$
$-5a^2_3c_3d_4k^3$
$-5a^2_3b_3yk$
a^2_4k
$d^5_{20}k^3$
$-5d^3_{12}yc_3k^3$
$-5d^3_{12}a_1b_3k^3$
$+5d^3_8yd^2_3k^3$
$+5d^3_8b^2_4c_3k^3$
$-d_4ya_1b_2c_3k^3$
$-c_3d_4ya_1b_2k^2$
$+5c^2_8d^2_2b_2k^2$
$+5c^2_8d_4yk^2$
$-5c^2_8ya_1k^2$
$-5c^2_8d_4b_2k^2$
$c^3_{12}k^2$
$b^3_{20}k^2$
$-5b^3_8c_3d_4k$
$-5b^3_8d_4yk^2$
$+5b^3_4c_3d^2_8k^2$
$+5b^3_4y^2a_1k$
$-b_2c_3d_4ya_1k^2$
$b^4_{20}k$

Figura 1.ª

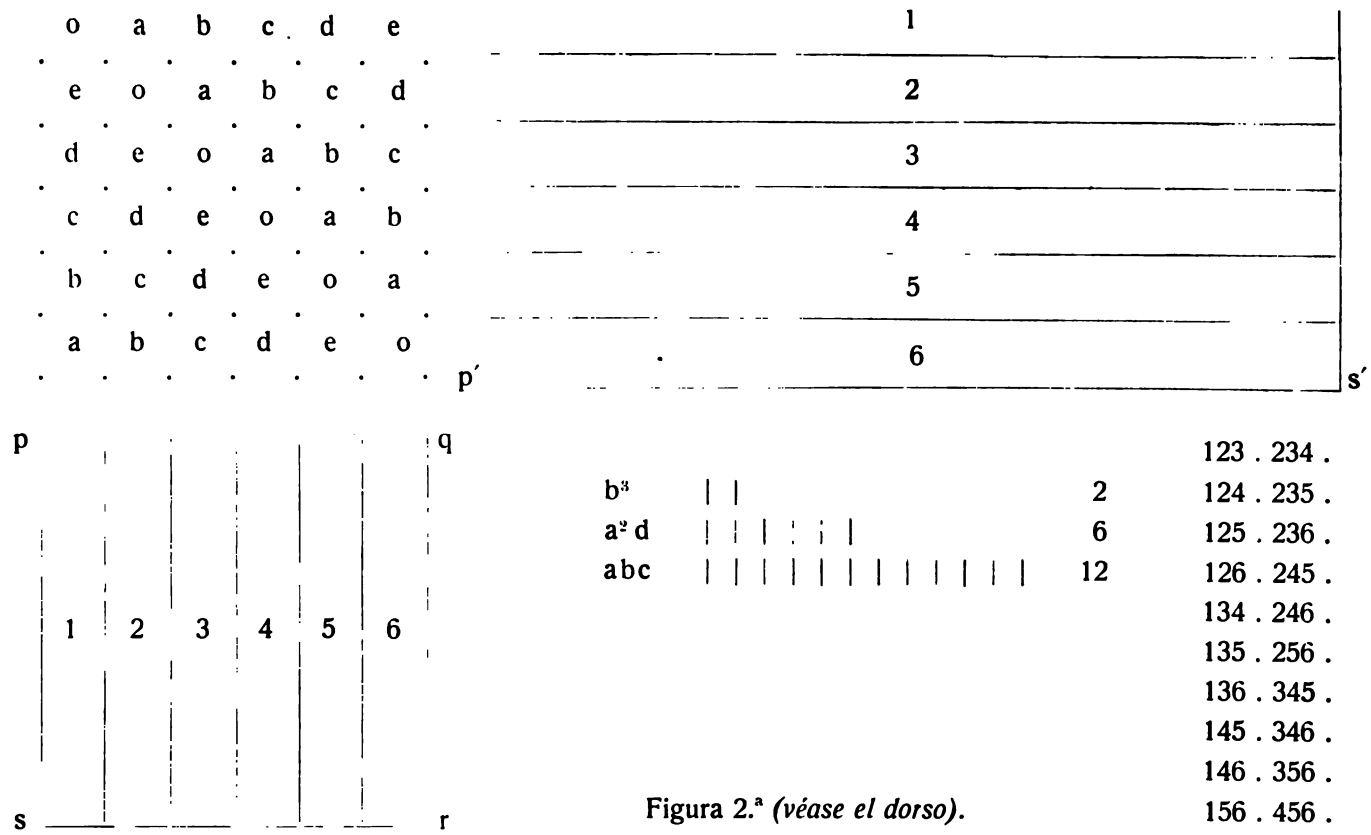


Figura 2.ª *(véase el dorso).*

1
2
3
4
5
6

1
2
3
4
5
6

XIII.—Fundamento teórico de la Fototopografía.

POR JOSÉ MARÍA TORROJA.

Como su nombre lo indica, es la Fototopografía una aplicación de la Fotografía al levantamiento de planos topográficos, y consiste en deducir la planimetría y altimetría de una extensión de terreno, de dos fotografías del mismo; ó dicho de otro modo: hallar una proyección ortogonal de un terreno, dadas dos proyecciones cónicas del mismo.

El problema así planteado entra de lleno en el dominio de la Geometría y constituye el objeto del presente trabajo, que hemos dividido en tres partes.

La primera trata de la determinación de una figura geométrica cualquiera por sus proyecciones desde dos puntos dados sobre dos planos, igualmente conocidos, y el modo de deducir de aquéllas, por construcciones efectuadas en un plano, una tercera proyección desde un nuevo centro y sobre un nuevo plano; lo que constituye el problema de cambio de planos en un sistema de representación que, por comprender como caso particular el propuesto por Monge, hemos denominado *sistema general diédrico.*

En la parte segunda nos ocupamos del estudio de las relaciones que ligan tres proyecciones de una misma figura, obtenidas como acabamos de indicar: este estudio, que hacemos por dos distintos métodos analíticos, es independiente de la posición que ocupen los planos de aquellas proyecciones. Finalmente, en la tercera y última parte resolvemos el problema de colocar éstas en una posición tal que puedan ser proyecciones de una misma figura del espacio y, como caso particular interesante, deducimos la serie de posiciones

orientadas cuyas figuras correspondientes del espacio son semejantes entre sí.

PRIMERA PARTE

Sistema general diédrico de representación.

I

Representación del punto, recta y plano.

La representación diédrica más general de una figura en el espacio, es la constituída por dos proyecciones de la misma, obtenidas desde dos puntos cualesquiera sobre dos planos también arbitrariamente elegidos. La figura que se representa viene dada como intersección de dos radiaciones, cada una de las cuales se determina por su vértice y una sección plana.

REPRESENTACIÓN DEL PUNTO.—Uniendo un punto M con los dos centros O y O', las trazas de cada uno de estos rayos con los planos correspondientes S y S', serán las dos proyecciones m y m' buscadas. Recíprocamente, si tenemos dos puntos m y m' sobre los planos S y S', sólo podrán ser proyecciones de un punto del espacio en el caso en que Om y $O'm'$ se corten, ó sea que los puntos O, O', m y m' estén en un plano; si tal sucede, las trazas de este plano OMO' con los S y S' (que son las rectas qm y $p'm'$ que unen cada uno de los puntos m y m' con la traza respectiva q y p' de OO' con el plano de proyección que lo contiene) habrán de cortarse en un punto de la recta de intersección de S y S', que llamaremos *eje* e''. Como casos particulares, pueden notarse los puntos del eje, cada uno de los cuales se confunde con sus dos proyecciones y cumple, por tanto, la condición

enunciada; y los de la recta que une los centros de proyección, pues confundiéndose para ellos m con q y m' con p', estas proyecciones q y p' corresponden á todos los puntos de dicha recta OO' y no determinan ninguno de ellos en particular.

REPRESENTACIÓN DE LA RECTA.—Uniendo una recta cualquiera R con los dos centros de proyección, obtendremos sobre S y S' dos rectas r y r', proyecciones de aquélla. Recíprocamente, dadas en los planos S y S' dos rectas cualesquiera r y r', y proyectándolas respectivamente desde O y O', tendremos dos planos, cuya intersección será la recta del espacio por aquéllas determinada. Podemos aquí observar que, al contrario de lo que sucedía en la representación del punto, podemos tomar completamente arbitrarias dos rectas en los planos S y S', y siempre serán proyecciones de una recta en el espacio.

Como casos particulares de excepción, examinemos el de una recta que corte á la OO', pues tiene por proyecciones las trazas del plano ROO' con los S y S', rectas que son á la vez proyecciones de todas las de aquel plano. También constituyen casos de excepción, entre las que acabamos de mencionar, las que pasan por uno de los centros O y O'; pues si bien una de las proyecciones (la efectuada desde el centro exterior á ella) es una recta determinada, la otra es la traza de la dada sobre el plano correspondiente.

REPRESENTACIÓN DEL PLANO.—Se hace, como en el sistema de Monge, por sus dos trazas con los planos coordenados, no habiendo lugar á considerar posiciones particulares del plano respecto de los centros de proyección, porque la representación de éste no depende sino de los planos S y S'. Sólo indicaremos el caso de un plano que pase por el eje, para el cual las dos trazas se confunden con éste y le dejan indeterminado; debiendo añadir la representación de uno cualquiera de sus puntos exterior á esta recta para completar la determinación de dicho plano.

II

Cambio de planos.

Consideremos ahora otro plano, S'', y otro centro de proyección, O''; hallemos las trazas del plano $OO'O''$ con los tres de proyección, y sobre cada una de éstas tendremos las proyecciones p y q, p' y q', p'' y q'' de cada par de centros desde el tercero sobre el plano correspondiente.

La condición que en el artículo anterior hemos visto existía entre las dos proyecciones de un punto, debe tener lugar ahora para cada par de proyecciones m-m', m'-m'' y m''-m. Para obtener, pues, un punto en el espacio, sólo podrá darse completamente arbitraria una de las proyecciones, la m, por ejemplo: la m' deberá estar en la recta que, pasando por p', corta á la mq en el punto en que ésta corta al eje e''. Haciendo uso de este tercer plano podremos ya representar todos los puntos del espacio, sin la excepción que antes mencionamos.

Observemos aquí la diferencia notable que existe entre la determinación del punto y la de la recta. Las tres proyecciones de un punto en el espacio tienen entre sí una relación trivalente ó de triple enlace, como puede verse observando que, dada arbitrariamente una proyección, la segunda viene ya sujeta á una condición (la de estar sobre una recta determinada), y la tercera queda ya completamente definida, lo cual exige otras dos condiciones. Las proyecciones de una recta, en cambio, están sujetas á dos condiciones solamente, y éstas determinan la tercera, dadas arbitrariamente las otras dos; la relación es aquí, pues, bivalente ó de doble enlace.

Puede también verse esto de otra manera: Entre las seis coordenadas de los puntos de los tres planos, se nos pueden dar dos ó tres ecuaciones que las liguen; en el primer caso, podremos determinar dos coordenadas x é y en función de

las otras cuatro, que podrán tomarse arbitrarias; en el segundo sólo podemos elegir arbitrarias tres coordenadas (ó dos y una ecuación nueva), y las demás serán conocidas. El primer caso se presenta, en coordenadas cartesianas del espacio, en la determinación de la recta, y el segundo en la del punto.

Considerando ahora las tres figuras planas S, S' y S'', pro-

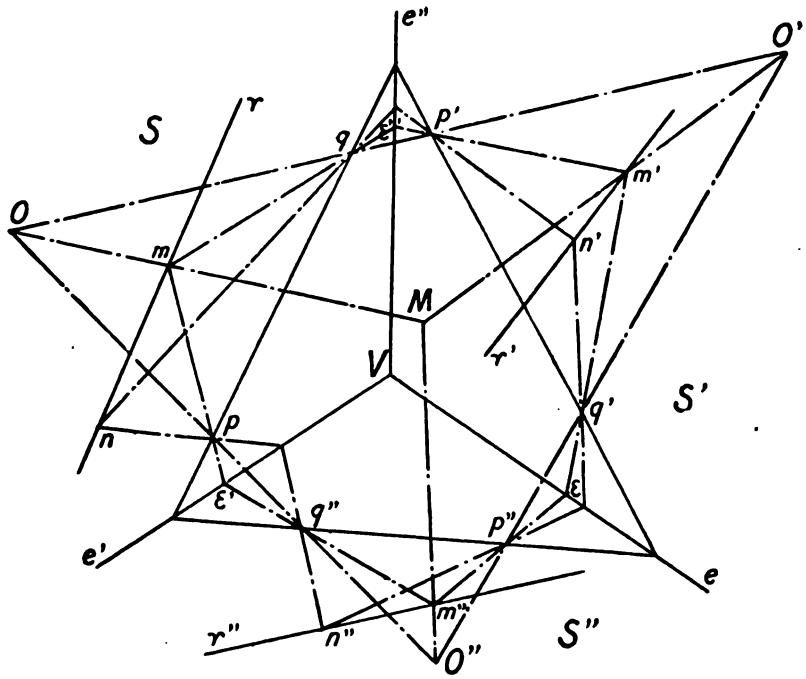


Figura 1.ª

yecciones de una misma en el espacio, observaremos que los pares de puntos q y p', q' y p'', q'' y p, que llamaremos pares de *puntos principales* contrarios, son vértices de pares de haces de rectas que proyectan las proyecciones de cada punto del espacio; es decir, que los haces $q.mnr...$ y $p'.m'n'r'...$, son perspectivos, siendo la recta e'' su eje perspectivo (figura 1.ª).

Estos haces nos dan un medio muy sencillo de resolver el problema de cambio de planos; es decir, nos permiten determinar la proyección de una figura cualquiera sobre un plano S'' desde un centro O'', cuyas posiciones se nos dan referidas á otros dos planos S y S', que contienen ya dos proyecciones del mismo sistema en el espacio. En efecto; si queremos hallar la tercera proyección m'' de un punto, conociendo las otras dos m y m', uniremos m' con q' y m con p; luego, los puntos de intersección de estas rectas con las e y e' unidos con los puntos principales respectivos p'' y q'', dan dos rectas que se cortan en el punto pedido m''. No hay que olvidar que los puntos dados m y m' han de cumplir la condición de que las rectas mq, $m'p'$ y e'' concurran en un punto.

Para hallar la tercera proyección r'' de una recta, dadas las otras dos arbitrarias r y r', empezaremos por tomar en la r un punto m; uniéndolo con q y trazando el rayo homólogo de éste en el haz p', tendremos en r' el punto m' conjugado con m; y podremos ya determinar el m'', que con los m y m' forma un terno de puntos conjugados; haciendo una construcción idéntica para otro punto cualquiera n de la recta r, tendremos el n'', que con m'' nos da la recta buscada r''.

Como caso particular notable estudiaremos el de los puntos del plano de los tres centros, cuyas tres proyecciones están sobre los *ejes singulares* pq, $p'q'$ y $p''q''$; recíprocamente, si una de las proyecciones, m'' por ejemplo, está sobre la recta $p''q''$, el punto estará en la recta que une O'' con un punto del plano $OO'O''$; es decir, estará en este plano; en él estarán igualmente las otras dos proyecciones m y m' y, como han de hallarse respectivamente en S y S', serán puntos de los ejes pq y $p'q'$. Como la construcción general no es aquí aplicable, puede efectuarse en el plano de los centros, ó determinar en los mismos planos de proyección el punto m'' como intersección de $p''q''$ con la recta homóloga de otras dos que corten á los ejes pq y $p'q'$, respectivamente, en los puntos dados m y m'. Como más sencillas,

pueden tomarse para esto las rectas Vm y Vm' que unen el punto común á los tres planos S, S' y S'' con las dos proyecciones dadas. Conviene emplear asimismo este método, como más exacto, para los puntos próximos á los ejes.

Otro caso particular, digno de estudio, es aquel en que los dos puntos que se nos dan son dos puntos principales; pues el punto buscado queda indeterminado, aunque con grados distintos de indeterminación, según que los dos puntos principales dados sean ó no contrarios. En el primer caso sean, por ejemplo, los q y p'; uniéndolos respectivamente con los p y q' observaremos que los rayos de los haces p'' y q'', homólogos de los así obtenidos, se confunden con el eje $p''q''$, y la tercera proyección es uno cualquiera de los puntos de esta recta; el punto en el espacio pertenece á la recta OO'. Si las proyecciones dadas son los puntos p y q', los rayos de los haces p'' y q'' quedan arbitrarios, la tercera proyección es un punto cualquiera del plano S'' y el punto en el espacio no puede ser otro que el centro O''. Finalmente, si los puntos dados son los q y q', proyectando q desde p y buscando el rayo homólogo del pq en el haz de vértice q'', obtenemos el eje $p''q''$; y proyectando, por otra parte, q' desde sí mismo, obtenemos todas las rectas del haz que lo tiene por vértice, á las cuales corresponden todas las del haz p'', y como tercera proyección tenemos el punto p'' que corresponde en el espacio al centro O'. Este caso, sin embargo, no es posible en la realidad, pues no pueden darnos en q' la proyección del punto O' desde sí mismo.

Hay que observar que siempre que una de las proyecciones de un punto es punto principal, lo es necesariamente una de las otras dos, pues aquella condición equivale á decir que el punto en el espacio pertenece á uno de los lados del triángulo $OO'O''$.

Con esto tenemos el medio de resolver el problema siguiente: Dados dos planos, S y S', dos puntos, O y O' fuera de ellos, y las proyecciones de una figura de tercera

categoría, desde éstos sobre aquéllos, hallar una tercera proyección de la misma figura desde un nuevo centro O'', y sobre un nuevo plano S'', dados por sus posiciones respecto de los anteriores; todo por medio de construcciones efectuadas sobre los mismos planos de proyección.

Como todas las construcciones que han de hacerse son de carácter proyectivo, pueden ejecutarse en otro plano cualquiera sobre el que se hayan proyectado, cilíndrica ó cónicamente, las dos figuras proyecciones dadas. En el artículo siguiente veremos el modo de operar sobre un solo plano, sin necesidad de efectuar estas proyecciones previas. El problema que acabamos de resolver, es el de cambio de planos en su mayor generalidad.

III

Construcciones gráficas para el cambio de planos.—Aplicación del teorema de Mac Laurin-Braikenridge.—Constructor mecánico.

Hemos conseguido en el artículo anterior resolver el problema de cambio de planos por construcciones efectuadas en los mismos planos de proyección; pero puede simplificarse aún más operando sobre un solo plano; basta, para ello, abatir los S y S', con las figuras que contienen, sobre el S'', girando alrededor de los ejes e y e', respectivamente (fig. 2.ª). El eje e'', considerado como de uno ú otro plano vendrá á ocupar las posiciones e_1'' y e_2'', y la serie que sobre él había, sección de los haces q y p' se desdoblará en dos sobre e_1'' y e_2'', que han de seguir siendo congruentes con sólo un giro alrededor del vértice V del triedro. Las construcciones necesarias para determinar el tercer punto de un terno son las mismas que ya conocemos, con la única diferencia de que al relacionar las proyecciones de un punto sobre los planos S y S', los rayos tales como qm y $p'\,m'$ han

de cortar, respectivamente, á los ejes abatidos e_1'' y e_2'' en puntos equidistantes del V. Hemos conseguido ya resolver el problema operando en un solo plano; vamos á ver que las construcciones efectuadas en los planos de proyección constituyen la aplicación de un caso particular del teorema de Mc. Laurin-Braikenridge (*).

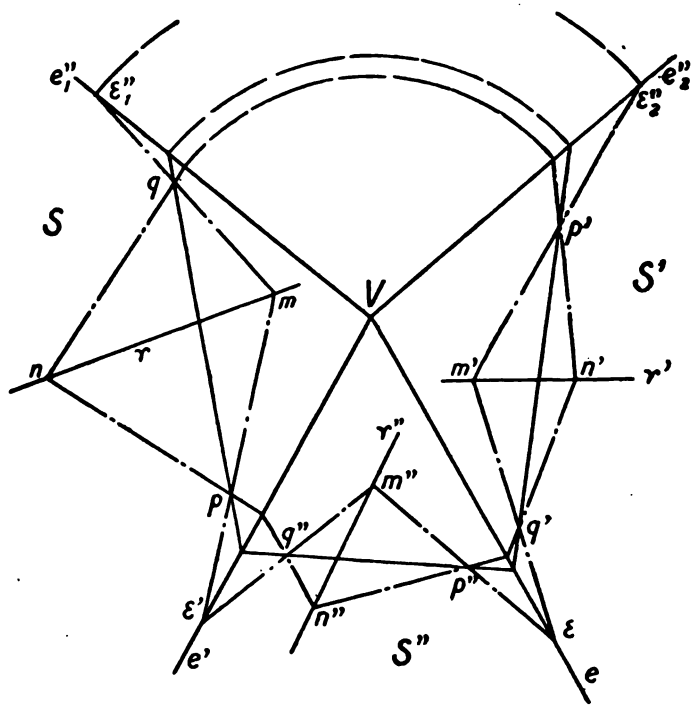


Figura 2.ª

Las construcciones efectuadas en los tres planos de proyección nos permiten enunciar con toda generalidad el teorema siguiente (fig. 1.ª): Si tenemos un exágono alabeado $m\varepsilon''m'\varepsilon m''\varepsilon'$, cuyos lados pasan por otros tantos puntos fijos q, p', q', p'', q'', p; y además tres vértices no consecutivos

(*) Véase: Braikenridge, *Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum.*—Londres, 1733.

dos á dos ε'', ε, ε', están constantemente en tres rectas e'', e, e', aristas del triedro formado por los planos de los pares de lados consecutivos $\varepsilon' m$ y $m\varepsilon''$, $\varepsilon'' m'$ y $m'\varepsilon$, $\varepsilon m''$ y $m''\varepsilon'$, y, finalmente, hacemos recorrer á dos de los vértices restantes, m y m', dos rectas de los planos S y S'; el último vértice m'' recorre igualmente una recta del plano S''.

Al desarrollar el triedro sobre el plano S'', el exágono queda abierto, y el vértice ε'', como de uno y otro de los lados que en él concurren ha de recorrer las dos rectas e_1'' y e_2'', ocupando en ellas puntos homólogos en dos series congruentes, es decir, puntos situados á distancias iguales del vértice V. Podemos, pues, completar el polígono con un séptimo lado, $\varepsilon_1''\varepsilon_2''$, que habrá de conservarse constantemente perpendicular á la bisectriz del ángulo que forman los abatimientos fijos e_1'' y e_2''. Entonces podremos enunciar un teorema análogo al anterior, que dirá (fig. 2.ª): Si tenemos un eptágono plano, $m'\varepsilon m''\varepsilon' m\varepsilon_1''\varepsilon_2''$, cuyos lados pasan por puntos fijos q', p'', q'', p, q, p', y el del infinito de la perpendicular á la bisectriz del ángulo formado por dos rectas, e_1'' y e_2'', sobre las cuales han de hallarse constantemente dos vértices ε_1'' y ε_2'' consecutivos, y por cuyo punto de intersección V pasan otras dos rectas, e y e', en las que han de moverse otros dos vértices, ε y ε', no adyacentes á los anteriores, y obligamos á dos de los restantes vértices, m y m', á recorrer dos rectas cualesquiera, el último vértice m'', que queda libre, recorrerá igualmente una recta.

Los dos teoremas anteriores, que no son otra cosa que la enunciación de las construcciones efectuadas para obtener ternos de puntos, pueden también demostrarse con gran sencillez. En efecto; todos los haces formados por las diferentes posiciones de cada lado alrededor de su punto fijo son proyectivos entre sí, por ser perspectivos cada dos consecutivos. Los dos últimos engendrarán, pues, una línea de segundo orden; pero, como el rayo $p''q''$ se corresponde do-

blemente en ellos, éstos son perspectivos, y el último vértice describe una recta, como queríamos demostrar.

El segundo de los teoremas estudiados puede considerarse como un caso particular del de Mac Laurin-Braikenridge, que Poncelet enuncia (*) de esta manera: «Si se hace mover un polígono plano cualquiera, obligando á sus diferentes lados á pasar constantemente por otros tantos puntos fijos, dados como polos, y cada uno de sus vértices, menos uno, á recorrer directrices curvas (**) cualesquiera, de grados m, n, p, q, ..., el vértice libre describirá, en todas sus posiciones, una curva que será, en general y á lo más, de grado $2\,mnpq$.....; y que se reducirá sencillamente al grado $mnpq$..... cuando todos los puntos fijos se hallen en línea recta.»

El teorema del eptágono es susceptible de una sencilla construcción mecánica, mediante un aparato constituído por once varillas ranuradas, cuatro de las cuales, las e, e', e''_1, y e''_2 pueden (fig. 3.ª) deslizar á lo largo de sí mismas, resbalando cada una de ellas por dos puntos fijos en el tablero sobre que se trabaja, representados por el signo •. Otras seis, articuladas dos á dos en m, m' y m'' donde llevan, respectivamente, dos estiletes y un lápiz, pasan cada una por uno de los puntos q, p, q'', p'', q', p', también fijos en el tablero, y por uno de los ε, ε', ε''_1 y ε''_2 que constituyen cuatro vértices y pueden deslizarse á lo largo de las tres varillas que por cada uno de ellos pasan, y distinguimos con el signo ⊙. El último lado l pasa siempre por los dos puntos ε''_1 y ε''_2 de intersección, respectivamente, de ε''_1 y ε''_2 con los lados adyacentes al que consideramos, el cual, por medio de la pieza g, puede moverse, conservándose siempre paralelo á sí mismo. Con este aparato vemos que, haciendo

---

(*) Poncelet, *Traité des propietés proyectives des figures.*—París, 1822, pág. 332.

(**) En el sentido de *líneas*, puesto que pueden, como caso particular, ser *rectas*.

recorrer á los estiletes m y m' los puntos correspondientes de dos proyecciones S y S' de una figura cualquiera de tercera categoría, puede obtenerse, por el trazado del lápiz colocado en m'', la tercera proyección S''.

De este aparato resultan casos particulares el *perspectó-*

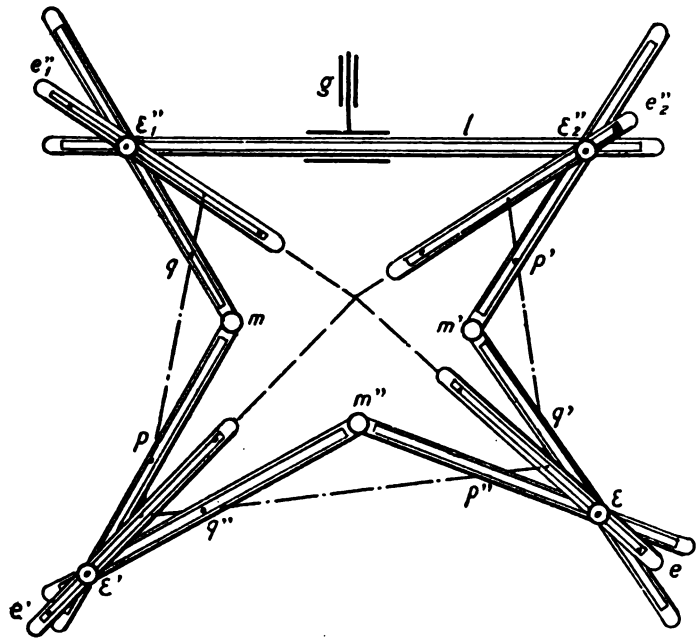


Figura 3.ª

grafo ideado por el Dr. Guido Hauck para resolver el problema de la Perspectiva (*), y el *trikológrafo* del mismo autor, modificado con arreglo á las indicaciones del Profesor Schiffner, para la construcción de un plano topográfico deducido de dos vistas obtenidas sobre placas verticales (**).

(*) Este aparato fué descrito por su autor en el *Festschrift der Technischen Hochschule zu Berlin sur Feier der Einweihung ihres neuen Gebaüdes am 2 Nov. 1884—Gedruckt in der Reichsdruckerei*, página 213.

(**) Puede verse una descripción de este aparato en la obra *Treas.*

IV

Casos particulares.

1. Dos proyecciones cónicas y una cilíndrica. — Un centro es punto del infinito; dos pares de puntos principales están sobre paralelas que pasan por este punto. Este es el caso de la *Fototopografía.*

2. Dos proyecciones cilíndricas y una cónica.— Dos centros son puntos impropios. Los dos puntos principales que proyectan cada uno de los centros del infinito desde el otro son también puntos impropios, los puntos del infinito de los ejes singulares correspondientes; y los haces correspondientes son de rectas paralelas. Los rayos homólogos de estos dos haces se cortan en puntos del eje correspondiente al centro propio. Este es el caso de la *Perspectiva.*

3. Tres proyecciones cilíndricas. — Los tres centros son puntos del infinito no situados los tres en ningún plano propio. El eje singular de cada plano es la intersección de éste con el de los tres centros, y como este plano es el del infinito, aquella recta es la del infinito de su plano; los puntos principales, situados sobre cada eje singular, son los puntos del infinito de cada una de las rectas de intersección del plano correspondiente con uno cualquiera paralelo á la orientación determinada por dos de los centros. Los haces de vértices p, q, p', q', p'', q'' son haces de rectas paralelas.

Todas las construcciones, tanto en este caso, como en los dos anteriores, se efectúan como en el general.

4. Tres centros en línea recta, propios ó del infinito.—En cada plano hay infinitos ejes singulares que pasan

---

Dept.—U. S. Coast and Geodetic Survey—Photo-topographic Methods and Instruments, by. J-A. Flemer, Assistant. – Appendix n.° 10—Report for 1897—Wassington-1898, pág. 732.

todos por un punto, el punto principal único correspondiente á este plano, y la solución del problema de cambio de planos operando en los tres de proyección es imposible, debiendo hacerse, para cada punto, en el plano determinado por éste y la recta de los centros.

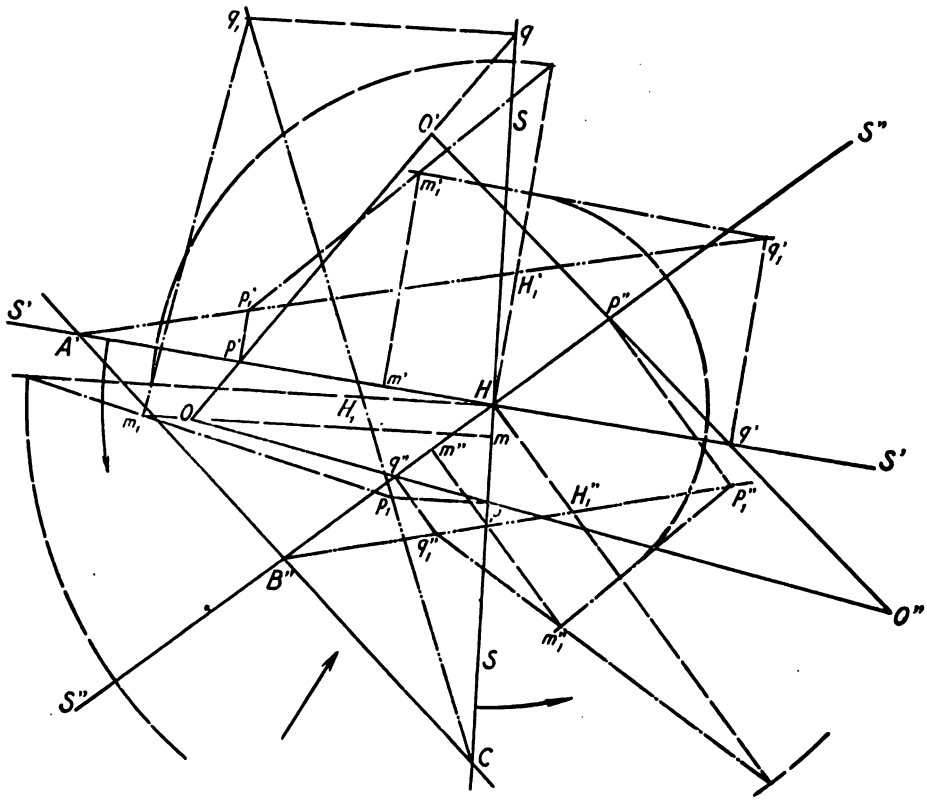


Figura 4.ª

5. El vértice *V* del triedro es un punto del infinito. — Los ejes son paralelos en el espacio y siguen siéndolo al desarrollar el triedro en un plano. Las construcciones en este caso, que estudiaremos detenidamente más adelante, son análogas á las del caso general.

6. Los tres planos de proyección pasan por una

RECTA.—Para formarnos idea de este interesante caso, proyectemos toda la figura sobre un plano perpendicular á la arista única $ee'e''$. El plano de los centros tiene por traza, con el eje, el punto H (fig. 4.ª), y con el plano auxiliar de proyección, la recta $A'B''C$; los ejes de cada plano son los HC, AH' y HB'' que hemos abatido con sus planos sobre el auxiliar, alrededor de sus trazas. Los puntos prin-

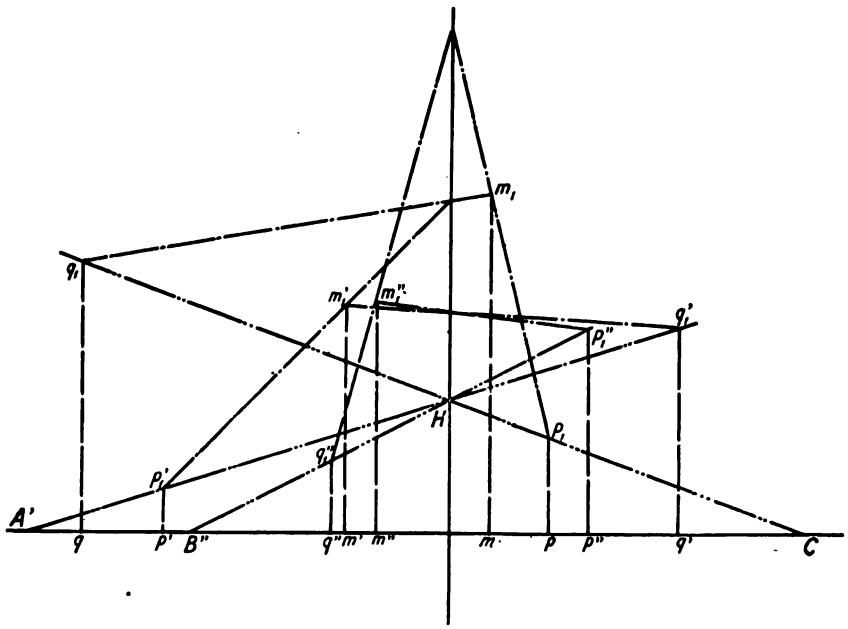


Figura 5.ª

cipales se determinan fácilmente, y tanto ellos como los demás elementos conservan las notaciones del caso general, con lo que basta la figura para formarse idea del modo de resolver el problema sin ulteriores explicaciones.

En la figura 5.ª se han representado los mismos elementos, pero abatiendo los planos S y S' sobre el S'' alrededor del eje común en el sentido marcado por las flechas. Como puede verse en estas figuras, el problema no ofrece mayor

complicación que en el caso general, aunque el procedimiento parece á primera vista algo diferente.

7. Caso en que uno de los centros, ó los dos, estén sobre otros tantos planos de proyección.—Supongamos, por ejemplo, que el punto *O* esté sobre el plano *S'* y *O'* sobre *S*. La figura 6.ª nos indica las modificaciones que hay que introducir en las construcciones. Si los puntos

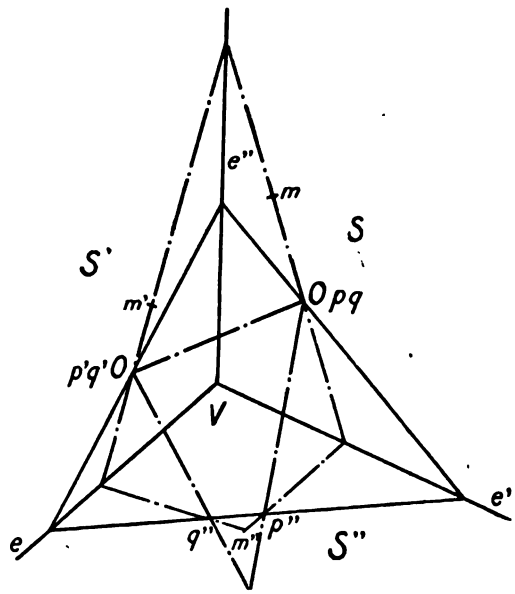


Figura 6.ª

O y *O'* son del infinito y además están en un plano perpendicular al eje *e''*, tenemos el sistema diédrico ordinario ó de Monge, en el que cada par de proyecciones de un mismo punto han de estar sobre una perpendicular al eje respectivo, que recibe el nombre particular de *línea de tierra*.

8. Los tres centros son puntos del infinito.— Este caso, cuyo estudio no ofrece dificultad alguna, puede considerarse como generalización del sistema diédrico ordinario.

9. Dos vértices confundidos. — Es un subcaso particular del caso 4.°, en que suponíamos los vértices en línea recta; como en él, hay infinitos triángulos εε'ε'', todos los cuales tienen sus vértices sobre tres rectas fijas *e*, *e'* y *e''*, y cuyos lados pasan constantemente por tres puntos fijos, que son las trazas de la recta de los centros con los tres planos de proyección. Como en aquél sucedía, es éste un caso en

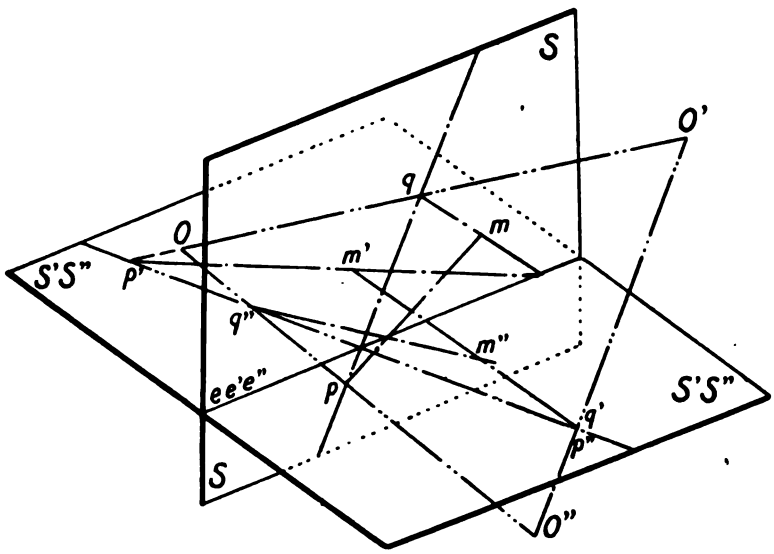


Figura 7.ª

que es imposible resolver el problema por construcciones hechas sólo en los planos de proyección.

10. Dos planos de proyección confundidos. — Es un subcaso del caso 6.°, en que los tres planos de proyección pasan por una recta.

Las dos figuras superpuestas *S'* y *S''* son secciones de dos radiaciones *O'* y *O''* que proyectan una misma figura en el espacio; luego ellas son perspectivas, siendo su centro perspectivo la traza *q'p''* sobre el plano *S'S''* de la recta

$O'O''$ que une los dos centros. En la figura 7.ª, representado en perspectiva axonométrica, y en la 8.ª, con el plano S

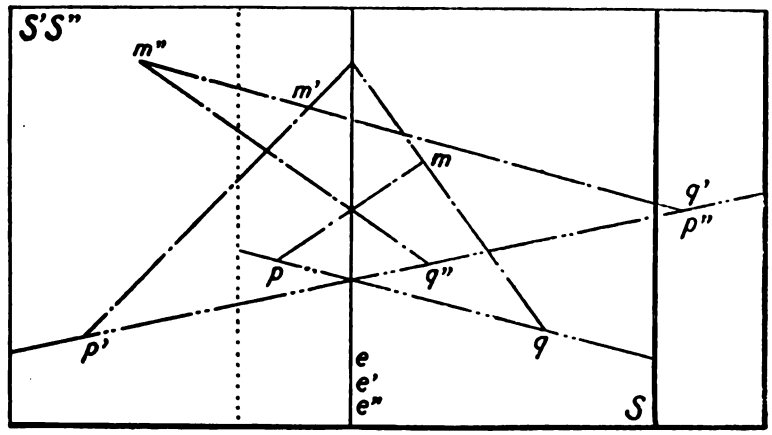


Figura 8.ª

abatido sobre el $S'S''$, se ha representado el caso que estudiamos, y que es el que se presenta en la *Estereofototopografía* ó *Fototopografía estereoscópica.*

PUBLICACIONES RECIBIDAS DESDE 1.º DE JULIO DE 1907

(Continuación.)

Academia Polytechnica do Porto. — Volumen 2.º, núms. 2 y 3.—Coimbra, 1907.

Commissao do Serviço Geologico.—Carta Hypsometrica de Portugal (Seguido a carta chorographica na escala de 1: 100.000).

Escala $\frac{1}{500.000}$.—1906.

Commissao do Serviço Geologico de Portugal. — Tomo 6.º, fasc. 2.º — Idem 7.º, fasc. 1.º

Revista de Chimica Pura e Applicada. — 3.º anno, núm. 7-10. — Julio á Octobre 1907.—Porto.

Braga (Theophilo).— Historia da Universidade de Coimbra nas suas relaçoes com a Instruccão publica Portugueza —Por...—Tomo 3.º, 1700 a 1800. Idem 4.º, 1801 a 1872.—Lisboa, 1898, 1902.

Burnay (Eduardo).— Elogio historico do Conde de Ficalho lido na sessão solemne da Academia Real das Sciencias de Lisboa em 25 de Março de 1906 pelo socio effectivo.....—Lisboa, 1906.

Cabreira (Antonio).—Demonstração mathematica do Seguro Portugal previdente.—Lisboa, 1907.

Cabreira (Antonio).—Sobre o Calculo das reservas Mathematicas.—Lisboa, 1907.

Cabreira (Antonio).—Sur les Corps Polygonaux.—Coimbre, 1907.

Carlos de Gonvea (José).—Alfonso d'Albuquerque.— Poema en diez cantos e prologo.—Porto, 1906.

Moraes de Almeida (Carlos Augusto).—Compendio de Trigonometria Rectilínea (5.ª edição). — Lisboa, 1906.

Motta Pegado (Luis Porfirio da).— Curso de Geometria Descriptiva da Escola Polytechnica. — Tomo 1.º, texto.—Tomo 2.º, atlas. — Lisboa, 1899.

Pina Vidal (Adriano A. de) y Moraes de Almeida (Carlos A. de).— Elementos de Geometría no espaço (5.ª edição). — Lisboa, 1905.

Pola Gray.—Portugalia. —Materiaes para o estudo do povo portuguez.— Tomo 2.º, fasiculo 3.º - Porto, Julho, 1907.

Senna Barcellos (Christiano José). - Subsidios para a Historia de Cabo Verde e Guiné.—Memoria apresentada á Academia Real das Sciencias de Lisboa.— Part 1.ª 2.ª y 3.ª - Lisboa, 1899-1905.

Souza Monteiro (José de).—Elogio Historico de José Maria Latino Coelho,

secretario geral da Academia Real das Sciencias de Lisboa, recitado na sessão publicá de 11 de Dezembro de 1898, pelo socio effectivo.....— Lisboa, 1898.

Observatorio do Rio de Janeiro.—Boletim mensal, Julho á Dezembro 1906. Rio de Janeiro, 1907.

Académie des Sciences. — Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'.....—Tome 154, núm. 1 (1 Juillet 1907) al 17 (21 Octobre 1907). París, 1907.

Académie des Sciences de l'Empereur François Joseph I.—Bulletin International. Résumés des travaux présentés, classe des Sciences math., nat. et de la médecine.— IX année, 1904, 1.º—X année, 1905, 1.º y 2.º — Prague, 4904-1905.

Académie Royale des Sciences et des Lettras de Danemark, Copenhague.— Oversight over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1907, núm. 2.—Kjobenhavn, 1907.

Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, Copenhague.— Mémoires de l'..... – Tomo 3.º, núm. 2.— Idem 4.º, núms. I y 2.— Idem 5.º, núm. 1.— Idem 6.º, núm. 4.—Kjobenhavn, 1907.

Académie Impériale des Sciences de St. Petersbourg — Bulletin de l'.....— V ser. t. 17, núm. 5. — Tomo 18 al 23. — Tomo 24, núms. 1-3.— VI ser. 1907, núms. 11 al 13.—St. Petersbourg, 1902-1907.

Academiæ Scientiarum Sueciœ (Regiæ).—Emanuel Swedenborg opera quaedam aut inedita aut obsoleta de rebus naturalibus nume edita sub auspiciis.....—I. Geologica et Epistolæ. — Holmiæ.— Ex officina Aftonbladet, 1907.

Académie Royale des Sciences de Suéde.— Observations Meteorologiques Suédoises publiées par l'..... executées et redigées sous la direction de l'Institut Central de Meteorologie.—Vol. 48, 1906.—Upsala et Stockholm.

Université Impériale de Kharkow.—Annales de l'.....—1907.

Observatoire Central Nicolas.—Publications de l'..... sous la direction de O, Backhmel. – Ser. II.—Vol. III —Idem XIV.—St. Petersbourg, 1905.

Société Impériale des Naturalistes de Moscou.—Nouveaux Mémoires de la ... Tome 16, livraisons 3 et 4. – Idem 17, liv. 1.— Moscou, 1901, 1905 et 1907.

Institut International de Bibliographie.—Bulletin de l'.....— Année 1907.— Fasc 4.—Bruxelles.

Bureux française du Catalogue International. - Bibliographie Scientifique Française.— Tomo 5.º, 1 section, numéro. 3, 4.—Idem, id., 2 section, numeros 3, 5.—París.

Société Belgue d'Astronomie.—Bulletin de la.....— Deuxiéme année, n.º 6. Bruxelles.

Société Scientifique de Bruxelles.—Revue des Questions Scientifiques.— Publiee par la.....— Troisième série. — Tome XII. – 20 Juillet, 1907 20 Octobre, 1907.—Louvain, 1907.

Société Belge de Geologie.— Bulletin de la..... de Paléontologie et d'Hidro-

logie.— Bruxelles.— Mémoires.— Tome 21, 1907.— Fasc. 1.— Procès-Verbaux, 1907.—Bruxelles, 1907.

Société Hollandaise des Sciences á Harlem.—Archives Neerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles.— Serie II, tomo 12.—Idem 3 et 4 livraisons.—La Haye, 1907.

Societatis Entomologicæ Bohemie.—Acta ....—Ronick 4.°, 1907. Cislo 2.—Praze.

Missions Scientifiques pour la mesure d'un arc de méridiem au Spitzberg.—Entreprises en 1899-1901 sous les auspices des Gouvernements Ruse et Suedois.—Mission Russe.—Tomo 1 °, Geodésie.—III section Ab. B. C. IV sec. B. —V sec. Int. de la pesanteur. —St. Petersbourg, 1904-1905.

Societé Portugaise des Scienes Naturelles.—Bulletin de la.....—Lisbonne Juillet, 1907.—Vol. I.— Fasc. 1.

Institut International de Statistique. — 11.ª session a Copenhague, 26-31, Août, 1907.

Musée Teyler.-(Archîves du).—Serie II, vol XI, première partie. Haarlem, 1907.

Baborovsky a Dr Fr. Pizak (Dr. J.).— Elecktrochemie.—V. Praze.—Nakladem Ceske Akademie Cisare Frantiska Josefa, etc., 1904.

Gobat (M. Albert).—Les Prix Nobel en 1902.—Supplement.—Le Developpement des conventions de la Haye du 29 Juillet 1899.— Conférense faite a l'Institut Nobel a Kristiania le 18 Juillet 1906.—Stockholm, 1907.

Wildeman (Em. de).—Etat Independant du Congo.- Annales du Musée du Congo, publiés par ordre du Secrétaire d'Etat. — Botanique. — Serie V.— Etudes de Systématique et de Géographie Botaniques sur la Flore du Bas et du Moyen-Congo, par.....—Vol. II, Fas 2.°.— Bruxelles, Septembre 1907.

Van Acker (R. P. Auguste).—Etat Indépendant du Congo.—Annales du Musee du Congo, publiées por ordre du Secrétaire d'Etat —Etnographie.— Serie V.—Linguistique. — Dictionnaire Kitabwa-français et français-kitabwa, par le..... Bruxelles-Août 1907.

Lucio Arnaiz (Ricardo) — Le Triomphe de la Science.— Nouvelle loi mecanique que regule l'Univers dans toutes ses manifestations. — Madrid, 1905.

Ramón Cajal (S). —Note sur la dégénérescence traumatique des fibres nerveuses du cervelet et du cerveau —(Travaux du Lab. de Recherches Biologiques de l'Université de Madrid.—Tome 5.°, fasc. 3.°, Juillet, 1907). Madrid, 1907.

Molk (Jules).—Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées.— Edition française.— Tome 1.°, volume I, fasc. 2.°— Paris-Leipzig, 1907.

Oliver (Louis).—Revue générale des Sciences pures et appliquées.—18e anné, números 12 (30 Juni 1907) al 19 (15 Octobre 1907).—Paris.

Resal (H).—Journal de Mathématiques pures et appliquées.—Sixième série. Tome troisième.—Année 1907.—Fascicule núm. 3. - Paris, 1907.

Annales de Chimie et de Physique.—Huitième série. - Tome XI.—Juillet 1907, Paris.

Bibliothéque Universelle.—Archives des Sciences Physiques et Naturelles. Quatrième période.—Tome 23, núm. 6, 15 Juin 1907, y 7, 15 Juillet 1907. Tome 24, núm. 8, 15 Août 1907, y 9, 15 Septembre 1907. - Genéve.

Bulletin Astronomique.—Tome XXIV.—Juillet á Octobre 1907. - Paris.

Bulletin des Sciences Mathématiques.— Deuxième ser.—Tome XXXI, Août 1907.—Paris, 1907.

Ciel et Terre.— Revue populaire d'Astronomie et Metéorologie.—Vingt huitième année, núm.— 9 (16 Juillet Octobre 1907).—Bruxelles.

Cosmos.—Revue des Sciences et de leurs applications.—56 année.—Nouvelle ser.—Núm. 1170 (29 Juin 1907) al 1187 (20 Octobre 1907).—Paris.

La Feuille des Jeunes Naturalistes.— Revue mensuelle d'Histoire Naturelle.—1er Juillet 1907, IV ser. 37 année, núm. 441.—1er Août 1907, número 442.—1er Septembre 1907, núm. 443.—1er Octobre 1907, número 444.—Rennes.

L'Intermediaire des Mathématiciens. - Tome XIV, 1907, núms. 7-9 (Juillet-Septembre).—Paris.

Nouvelles Annales de Mathématiques.—Quatrième série.—Tome VII.—Mai-Septembre 1907.—Paris.

Revue d'Electrochimie et d'Electrometalurgie.—Tome 1.°, núms. 6-9 (Juin-Septembre 1907).—Paris.

Revue de l'Internationalisme.—1er année, 2ieme livr , Junio 1907.—Leipsich.

Reale Accademia dei Lincei.—Atti della...—Anno CCCIV, 1907, serie V. Rendiconti.—Classe di Science fisiche, matematiche e naturali.—Volume XVI, fascicolo 12° e indice dei volume 1.° semestre.—Idem XVI, fascicolos 1-6, 2.° semestre.—Rendiconto de la adunanza solenne del 2 Giugno 1907, onorata dalla presenza di Sua Maestá il Re.—Volume II.—Roma, 1907.

R. Accademia dei Lincei.— Memorie della...— Classe de Science Fisiche Matematiche e Naturali.—Anno CCCIV, serie 5.ª, volume VI, fascicolos 11 y 12.—Roma, 1907.

Reale Accademia dei Lincei. — Rendiconti della... — Classe de Science Morali, Storiche e Filologiche.— Serie V, vol. XVI, fasc. 4.°-5.°—Roma, 1907.

Accademia Gioenia di Science Naturali in Catania.—Bolletino delle Sedute della...—Giugno 1907, fascicolo XCIV (nuova serie).—Catania.

Biblioteca Nacionale Centrale di Firenze.—Bolletino delle publicazioni Italiane.—Núms. 79, 80, 81.—(Luglio Settembre.)—Firenze.

Institut Océanographique.—Bulletin de l'...—N.° 102 (30 Mai), 103 (27 Juni) et 104 (30 Septembre 1907.)—Monaco.

Societá Cattolica Italiana per gli studi scientifici.— Rivista di Fisica Matematica e Scienze Naturali.—Núms. 90 al 93 (Giugno a Settembre 1907. Pisa-Pavia, 1907.

Albanese di Boterno (Vicenzo).—Nota sui simboli delle Genti. — Modica, 1907.

Robredon (Capitano G.). -- Realtá dell'essere. — L'Essere é il non Essere Tempo e spazio.—1907.

Koniglich Preussischen.—Akademie der Wissenschaften. — Sitzungsberichte der..... —1907.—23 al 38. Berlin 1907.

Riedlinger. (Reinhold). — Nova Acta Abh. der Kaiserl Leop.—Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher. — Band. 81, N.° 1. — Mutersuchungen über deu Ban von Styelopsis grossularia der Osse. — Von..... — Halle, 1902.

Verhoeff (Dr. Karl W.).—Nova Acta Abh. der Kaiserl Leop. Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher.—Band 81, N.° 2.—Beitrage zur vergleicheriden Morphologie des Thorax, der Insecten mif Berüeksichtigung der Chilopoden.—Von.....—Halle, 1902.

Buchhola (Dr. Hugo).—Nova Acta Abh. der Kaiserl Leopold. Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher.—Band, 81, N.° 3. - Die Gylden'sche horistische Integrationsmethode des Problems der drai Korper nuelihre convergenz.—Halle, 1903.

Verhoeff (Dr. Karl W.).— Nova Acta Abh. der Kaiserl. Leop. Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher.—Band. 81, N ° 4.— Ueber Tracheaten Beine Vieser und fünfter Aufsatz: Chilopoda und Hexapoda. Von..... Halle, 1903.

Verhoeff (Dr. Karl. W.)— Nova Acta Abh. der Kaiserl Leopol. Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher. — Band. 81, N.° 5. - Ueber die Eudsegmente des Korpers der Chilopoden, Dermapteren und Japygiden und zur Systematik von Japyx. Von..... — Halle, 1903.

Pietzmann (Gustav).—Nova Acta Abh. der Kaiserl Leop. Carol. Akademie der Naturforscher.—Band. 81, N.° 6.—Die Beobachtungen der Lufttemperatur der totalem Sonnenfinsterniss. Von 22 Januar 1898 in Indien.—Von.....—Halle, 1903.

Flecker (O). — Beobachtungen an Horizontalpendeln über die Deformation des Erdkorpers unter dem linfluss von sonne und Monel. — Von..... — Veröffenthichmy des Konigl. Preuszischen Geodätischen Institutes. — Neue folge, N.° 32. — Berlin, 1907.

Konig ichen Gesellschaft der Wissenschaftes zu Gottingen. — Nachrichten von der..... Mathematisch-physikalische klasse — 1907. Heft 3. — Berlin, 1907.

Mahrischen Museumsgesellschaft. — Zeitschrit des Mahrischen Landesmuseums Herausgegeben von der..... — VII Band Zweites Heft. - Brüms, 1907.

Biochemisches Centralblatt.— Band VI. N.° 1 al 17 (Feb. á Octobre 1907). Leipzig.

Zeitschrift für Mathematik und Physik.— 54 Band, 4 Heft. - Leipzig, 1907.

Enestrom (Gustaf).—Bibliotheca Mathematica.—3 folge, 8 band, 1 heft.— Leipzig, 1907.

Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.—Verhandelingen der Konin

klijke.....—(Eerste sectie). Deel IX. N.° 4. (Twede seche). Deel XIII. N.° 1, 2, 3. - Amsterdam: J. Müller, Octobre, 1906. Abril, Junio 1907.

Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.—Verhandelingen der Koninklijke Afdeeling Letterkunde. -Nierabeeks.—Deel VII. Deel VIII. N.° 3. Amsterdam: J. Müller, 1906-1907.

Akademie van Wetenschappen te Amsterdam (Koninklijke). - Verslag van de Gewone Vergaderingen der Wis en Naturekundige Afdeeling. — Van 26 Mei 1906. Lot 26 April 1907. Deel XV.—J. Müller, 1906-1907.

Akademie van Wetenschappen te Amsterdam (Koninklijke).—Proseedings of the Section of Sciences.—Vol IX (1ra y 2da part.)—J. Müller, 1906-1907.

Akademie van Wetenschappen Gevestigd te Amsterdam.— Haarbock, 1906. J. Müller, 1907.

Akademie van Wetenschappen (Koninklijke).—Verslagen en Mededeeling en der...—Afdeling Letterkunde.—Vierde Reeks Deel VIII.— Amsterdam: J. Müller, 1907.

Pascoli (Johannis).—Rufius Crispinus Carmen... ex Castro Sancti Mauri in Certamine Poetico Hocufftiano Praemio aureo omatum.— Amsteloda-mi: J. Mullercum, MCMVII.

Akademie Cisare Frantiska Josefa pro vedi, Sloveshost a Umeni (Ceske).— Rozpravy... — Trida II (Mathematicho Prirodnicha.) — Rocnik XIV (1905) XV (1906).—V Praze, 1905-1906.

Moraisska Musejni Spolecnost. — Casopis Moravského Musea Zemskeho Vydava...— Rocnik VII, cis 2.—V Brue: Tiskem Moravske Akciove knihtiskarny, 1907.

Reyehler (Dr. A.).—Chemie Fysikalna Napsal...—V Praze: Nakladem Ceske Akademie Cisare Frantiska Josefa, etc., 1902.

Pocta (Dr. Filip).—Rukovet Palaeozoologie Napsal.—I Cast-invertebrata, II Cast-vertebrata.—V Praze: Nakladem Ceske Akademie Cisare Frantiska Josefa, etc , 1904.

Bayer (Dr. Frantisck).—Katalog Ceskych Forsilnich Obratlovcu (Fossilia vertebrata Bohemiœ) Sestavil...—V Praze: Nakladem Ceske Akademie Cisare Franstika Josefa, etc., 1905.

Chodounsky (Prof. Dr. Kasel).—Nastuzeni a Choroby Z. Nastuzeni.— Napsal...—V Praze 1906: Nakladem Fondu Ilra J. Sichy Pri Ceske Akademie Cisare Frantiska Josefa, etc

Weinek (Prof. Dr. L.) —Maquetische und Meteorologische Beobachtungen au der K K Sternwarte zu Prag im jahre 1906. Auf offentliche Kosten herausgegeben von...—67 Jahrgang.—Prag, 1907.

Nathorst (A. G.). — Uber Thaumatopteris Schenki Nath. — Von...— Kungl, Svenska, Vetenskapsakademiens Handlingar, Bd. 42, n ° 3.— Upsala et Stockholm, etc.

Nathorst (A. G.).—Uber Thaumotopteris Schenki Nath.—Von...—Krngl. Svenska.—Vetenskapsakademiens.—Handlingar Band 42, N.° 3.—Upsala & Stockholm...

(Continuara).

XIV.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimaterceia.

SEÑORES:

Otro ejemplo más vamos á presentar sobre el equilibrio elástico, tomado también de la obra de Mr. Sarrau, que adoptamos como guía en esta última parte del presente curso.

Dicho ejemplo será el último que estudiaremos, por ahora, como aplicación de las fórmulas del equilibrio en este primer estudio elemental relativo á la teoría de la Elasticidad.

EJEMPLO 5.°.—*Equilibrio de una capa cilíndrica.*

Consideraremos un sólido homogéneo é isótropo limitado por dos cilindros de revolución concéntricos y por dos planos perpendiculares á las generatrices.

Supondremos, que dicho sólido está sometido para cada una de las superficies cilíndricas á presiones normales y uniformes, y para cada una de las bases á una tracción uniforme paralela al eje.

Y nos proponemos resolver el problema del equilibro: es decir, nos proponemos determinar las componentes de la deformación para un punto cualquiera cuyas coordenadas sean x, y, z.

A modo de complemento del problema, determinaremos también para cualquier punto, en función de sus coordenadas, los valores de N y T.

Tomemos por origen el centro de figura; como eje de las z la paralela á las generatrices, que pasa por dicho centro,

y sea M (fig. 46) un punto cualquiera del sólido situado en el plano meridiano $OzHH'$.

La distancia Ma del punto M al eje la representaremos por r.

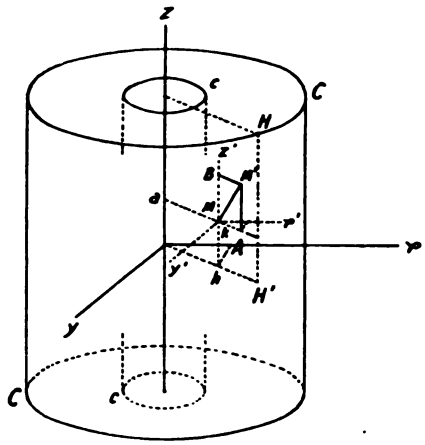


Figura 46.

El punto M está definido por sus tres coordenadas

$$Ok = x; \quad kh = y; \quad Mh = z,$$

y tendremos:

$$aM = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Como el conjunto de los dos cilindros de revolución CC, cc, que tienen el mismo eje Oz es simétrico respecto al plano meridiano $OzHH'$, y el sistema de fuerzas, á saber, las presiones normales sobre las dos superficies cilíndricas y las tracciones sobre las bases constituyen un sistema también simétrico con relación al plano meridiano expresado, es evidente que la deformación del punto M se efectuará en este mismo plano: sea su desplazamiento MM', que podremos descomponerlo en dos desplazamientos: el uno, MA, situado en el plano normal á las generatrices del cilindro, $x'My'$,

que llamaremos s; y el otro, MB, que será w, según la notación general.

Así, pues, $MA = s$; $MB = w$.

Por fin, descomponiendo s en las direcciones Mx' y My', tendremos para las tres componentes del desplazamiento MM':

$$u = s\frac{x}{r}; \quad v = s\frac{y}{r}; \; w,$$

puesto que los cosenos de los ángulos $x'MA$ é $y'MA$, son $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}$.

En rigor no conocemos ni la forma de s ni la de w; precisamente hay que determinarlas de modo que los valores precedentes de u, v, w, satisfagan los dos grupos (1) y (2), que expresan el equilibrio elástico. (Conferencia XII.)

Volvemos á repetir aquí lo que hemos dicho ya varias veces: que no sabemos integrar en términos generales las ecuaciones diferenciales (1) y (2), y que tenemos que proceder por tanteos, por ensayos, y casi por adivinaciones.

Ocurre que tal vez s no dependa de z, sino de la distancia r al eje, y que w sea proporcional á z, como en el caso de un prisma sometido á fuerzas longitudinales y uniformes; y por estos motivos de pura intuición estableceremos los tres valores *provisionales* de u, v, w, siguientes:

$$u = s(r)\frac{x}{r}; \quad v = s(r)\frac{y}{r}; \quad w = cz.$$

Veamos si con ellos es posible satisfacer á las condiciones de equilibrio del sistema elástico.

Pero en este momento no lo sabemes: es una prueba que intentamos; un verdadero experimento, que también en las Matemáticas existe el método experimental.

Lo que desde luego se prevé, es que estos valores de

u, v, w pueden estar comprendidos en el segundo ejemplo: aquel en el que dichos valores eran las derivadas con relación á x, y, z, de una función de tres variables φ, ó lo que es lo mismo, que

$$u\,dx + v\,dy + z\,dz,$$

sea una diferencial exacta para estas expresiones de u, v, w.

En efecto, substituyendo por u, v, w las expresiones anteriores, tendremos,

$$s\frac{x}{r}dx + s\frac{y}{r}dy + czdz;$$

ó bien

$$s\frac{xdx + ydy}{r} + czdz;$$

y como de $x^2 + y^2 = r^2$ se deduce $xdx + ydy = rdr$, la expresión anterior se convierte en

$$sdr + czdz,$$

que podrá integrarse y que representaremos por φ:

$$\varphi = \int sdr + \int czdz = \int sdr + \frac{1}{2}cz^2.$$

Y que puede integrarse es evidente, porque hemos supuesto que s es una función de r, y, por lo tanto, $\int sdr$ será integrable.

Pero hemos demostrado que, en este caso, las ecuaciones del grupo (1) quedan satisfechas con tal que la dilatación cúbica θ sea una constante; luego sólo nos queda, para esta primera parte del problema, expresar la dilatación θ é igualarla á una constante arbitraria.

Sabemos que $\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$; por lo tanto, no hay más que determinar estas tres derivadas, deduciéndolas de los valores hipotéticos de u, v, w.

Tendremos, pues, diferenciando dichas expresiones,

$$\frac{du}{dx} = \frac{ds}{dr} \cdot \frac{dr}{dx} \cdot \frac{x}{r} + s \frac{d\frac{x}{r}}{dx};$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{ds}{dr} \cdot \frac{dr}{dy} \cdot \frac{y}{r} + s \frac{d\frac{y}{r}}{dy}; \quad \frac{dw}{dz} = c.$$

Pero de $x^2 + y^2 = r^2$ se deduce $xdx = rdr, ydy = rdr$; ó bien $\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}$, $\frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}$; y además,

$$\frac{d\frac{x}{r}}{dx} = \frac{r - x \cdot \frac{x}{r}}{r^2} = \frac{y^2}{r^3}; \quad \frac{d\frac{y}{r}}{dy} = \frac{x^2}{r^3}.$$

Y substituyendo:

$$\frac{du}{dx} = \frac{ds}{dr}\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^3}s; \quad \frac{dv}{dy} = \frac{ds}{dr}\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^3}s; \quad \frac{dw}{dz} = c.$$

Estas tres expresiones dan para θ el valor,

$$\theta = \frac{ds}{dr}\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^3}s + \frac{ds}{dr}\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^3}s + c =$$

$$= \frac{ds}{dr}\frac{x^2 + y^2}{r^2} + s\frac{x^2 + y^2}{r^3} + c;$$

ó bien

$$\theta = \frac{ds}{dr} + \frac{s}{r} + c,$$

de donde

$$\theta - c = \frac{ds}{dr} + \frac{s}{r}.$$

Pero θ es una constante; luego el primer miembro podremos representarlo por una constante arbitraria $2a$, y tendremos para determinar s, la ecuación

$$\frac{ds}{dr} + \frac{s}{r} = 2a,$$

siendo

$$\theta - c = 2a \quad \text{ó} \quad \theta = 2a + c.$$

La ecuación precedente se integra, desde luego, porque puede ponerse bajo esta forma:

$$rds + sdr = 2a.r.dr, \text{ ó bien } d(sr) = a.2rdr,$$

en que todos los términos son integrables; y tendremos

$$sr = ar^2 + b,$$

siendo b una constante arbitraria.

Así, pues,

$$s = ar + \frac{b}{r}.$$

Este valor de s, substituído en los de u y r, en unión con w, satisfacen evidentemente al grupo (1), según se ha visto en el segundo ejemplo; pero no sabemos si satisfarán al grupo (2) disponiendo de sus dos constantes arbitrarias a y b.

Tal es la segunda parte del problema.

Tenemos que substituir los valores de u, v, w en los de N y T.

Estos, á su vez, habrá que substituirlos en el grupo (2), para las dos superficies cilíndricas, la exterior y la interior, y para las dos bases de la capa cilíndrica; y habrá que ver si á las tres constantes a, b, y c podemos darles valores tales, que satisfagan las condiciones que resulten.

***

Determinemos, pues, ante todo, las N y T.

Tenemos

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx},$$

$$N_2 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dv}{dy},$$

$$N_3 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz};$$

y substituyendo

$$\theta = 2a + c; \quad \frac{du}{dx} = \frac{x^2}{r^2}\frac{ds}{dr} + \frac{y^2}{r^3}s;$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{y^2}{r^2}\frac{ds}{dr} + \frac{x^2}{r^3}s; \quad \frac{dw}{dz} = c;$$

resultará:

$$N_1 = \lambda(2a + c) + 2\mu\left(\frac{x^2}{r^2}\frac{ds}{dr} + \frac{y^2}{r^3}s\right),$$

$$N_2 = \lambda(2a + c) + 2\mu\left(\frac{y^2}{r^2}\frac{ds}{dr} + \frac{x^2}{r^3}s\right),$$

$$N_3 = \lambda(2a + c) + 2\mu c.$$

Asimismo, substituyendo en los valores de T,

$$T_1 = \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right); \quad T_2 = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right);$$

$$T_3 = \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right),$$

las derivadas que contienen, y que se deduce diferenciando

$$u = s\frac{x}{r}, \quad v = s\frac{y}{r}, \quad w = cz,$$

las cuales dan:

$$\frac{du}{dy} = x\frac{d\left(\frac{s}{r}\right)}{dr}\frac{dr}{dy} = \frac{xy}{r}\frac{r\frac{ds}{dr} - s}{r^2} = \frac{xy}{r^2}\left(\frac{ds}{dr} - \frac{s}{r}\right),$$

$$\frac{du}{dz} = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = y\frac{d\left(\frac{s}{r}\right)}{dr}\frac{dr}{dx} = \frac{xy}{r}\frac{r\frac{ds}{dr} - s}{r^2} = \frac{xy}{r^2}\left(\frac{ds}{dr} - \frac{s}{r}\right),$$

$$\frac{dv}{dz} = 0,$$

$$\frac{dw}{dx} = 0,$$

$$\frac{dw}{dy} = 0,$$

tendremos:

$$T_1 = 0; \quad T_2 = 0; \quad T_3 = 2\mu\frac{xy}{r^2}\left(\frac{ds}{dr} - \frac{s}{r}\right).$$

Según hemos dicho antes, habrá que substituir estos valores de N y T en las ecuaciones del grupo (2), que expresan el equilibrio de la superficie del cuerpo, ó sea el del

tetraedro infinitamente pequeño, que corresponde á cada punto de esta superficie, que en rigor, en este caso, se descompone en tres: 1.° El cilindro exterior. 2.° El cilindro interior. 3.° Las dos bases de la capa cilíndrica.

Como el sistema es de revolución alrededor del eje de la z, bastará que las ecuaciones del grupo (2) queden satisfechas para un punto cualquiera de la superficie cilíndrica exterior, que podremos escoger, por lo tanto, en el plano de las x z. Lo mismo podemos decir para la superficie interior, escogiendo un punto en dicho plano coordenado. Y, por último, escogeremos un punto cualquiera de una de las bases, porque, lo que digamos de la una, podremos repetir para la otra.

Pero aquí se presenta una pequeña dificultad, que ya se presentó en dos de los problemas anteriores, y es que el *tetraedro* infinitamente pequeño, á que se refiere el grupo (2), no existe realmente para ningún punto de las superficies cilíndricas ni de las bases; porque tomando un punto como vértice, muy próximo á las superficies, y trazando tres rectas paralelas á los ejes coordenados, las tres rectas no cortarán á la superficie. Por ejemplo: en las superficies cilíndricas, la paralela al eje de las z será paralela á las generatrices y no cortará al cilindro. Y las dos paralelas á x, y tampoco cortarán á dichas bases.

Realmente, se salva esta dificultad formando un tetraedro infinitamente pequeño por rectas, que no sean exactamente paralelas á los ejes, pero que tiendan á serlo á medida que el vértice del tetraedro se aproxime á la superficie del cuerpo.

Pero tampoco esto es necesario, porque han de fijarse mis oyentes en que el empleo del tetraedro ni es único, ni es absolutamente indispensable; es cómodo y sencillo nada más, y por eso lo empleó Cauchy, que, según parece, fué el primero que tuvo esta idea.

En rigor, *para establecer el equilibrio de un punto de la*

superficie, basta considerar un poliedro cualquiera, infinitamente pequeño, contiguo á la superficie, que penetre en el interior del cuerpo, y que tenga una cara que se apoye en dicha superficie, y bastará que en ella esté el punto que se considere.

El equilibrio de este poliedro traerá consigo el equilibrio del punto de la superficie que estemos considerando. Ahora bien, se establecerá el equilibrio del poliedro teniendo en cuenta las fuerzas exteriores que actúan en su cara exterior y las fuerzas N, T que actuán en las caras interiores.

Esto será tan largo, tan pesado como se quiera; pero es tan rigoroso como el empleo del tetraedro.

Así es, que para el caso que estamos considerando, abandonaremos el tetraedro y consideraremos, para el cilindro

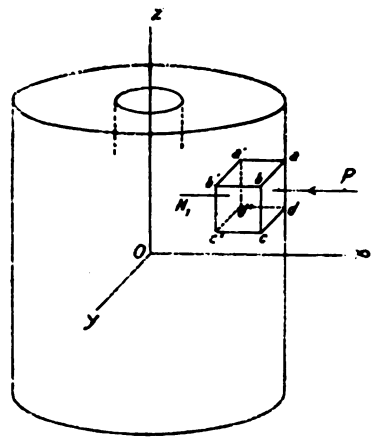


Figura 47.

exterior y para un punto cualquiera A del mismo (fig. 47), situado en el plano de las xz, el paralelepípedo infinitamente pequeño $a\ b\ c\ d\ a'\ b'\ c'\ d'$, y estableceremos su equilibrio. Estas ecuaciones suplirán á las del grupo (2).

Veamos cuáles son las fuerzas exteriores y las fuerzas N, T para todo el paralelepípedo expresado.

Por el pronto, calcularemos todas ellas para el punto A, cuyas coordenadas serán, llamando r_1 al rayo del cilindro exterior,

$$x = r_1; \quad y = 0; \quad z.$$

Recordando que $s = ar + \frac{b}{r}$, y que por lo tanto,

$$\frac{ds}{dr} = a - \frac{b}{r^2},$$

tendremos,

$$N_1 = \lambda(2a + c) + 2\mu\left(a - \frac{b}{r^2_1}\right) = 2(\lambda + \mu)a + \lambda c - \frac{2\mu b}{r^2_1},$$

$$N_2 = \lambda(2a + c) + 2\mu\left(a + \frac{b}{r^2_1}\right) = 2(\lambda + \mu)a + \lambda c + \frac{2\mu b}{r^2_1},$$

$$N_3 = \lambda(2a + c) + 2\mu c = 2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c,$$

$$T_1 = 0,$$

$$T_2 = 0,$$

$$T_3 = 0.$$

A estos valores hay que agregar la presión exterior por la mitad de la superficie P_1.

Como en el paralelepípedo de la figura 47, las T son todas iguales á cero, y las N y P son perpendiculares á las caras, bastará, puesto que además las caras tienen la misma superficie, que las fuerzas sobre las caras $a\ b\ c\ d$, y $a'\ b'\ c'\ d'$, por unidad de superficie sean iguales, es decir,

$$N_1 = -P_1,$$

ó poniendo por N_1 su valor,

$$2(\lambda + \mu)a + \lambda c - \frac{2\mu b}{r^2_1} = -P_1, \qquad (a)$$

ecuación á que puede satisfacerse, puesto que entran las constantes a, b, c.

Las presiones sobre las caras aa' dd' y bb' $c'c$ son las dos iguales y contrarias, y su valor es N_2: esta ecuación se satisface por sí misma. Puesto que N_2 es constante, equivale esta condición de equilibrio á

$$2(\lambda + \mu)a + \lambda c + \frac{2\mu b}{r^2_1} = 2(\lambda + \mu)a + \lambda c + \frac{2\mu b}{r^2_1}.$$

Por último, otro tanto podemos decir de las caras $ab\,b'a'$, $dcc'd'$, sobre las cuales actúan por unidad de superficie la misma fuerza N_3 que es constante, toda vez que no contiene ninguna de las variables x, y, z. Dicha condición queda satisfecha evidentemente:

$$2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c = 2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c.$$

El equilibrio del paralelepípedo resulta, pues, establecido, y, por lo tanto, el de toda la superficie exterior, sólo con la ecuación (a): las demás condiciones se satisfacen por sí mismas.

Todo esto podemos repetirlo para un punto cualquiera del cilindro interior, pues bastará considerar la generatriz contenida en el plano de las xz, construyendo para un punto cualquiera de dicha generatriz un paralelepípedo infinitamente pequeño, análogo al de la figura 47.

Y tendremos, que para el equilibrio de esta superficie cilíndrica interior, es suficiente satisfacer á esta condición única:

$$2(\lambda + \mu)a + \lambda c - \frac{2\mu b}{r^2_0} = -P_0. \qquad (b)$$

Por último, establezcamos el equilibrio de las bases. Consideremos un punto cualquiera, B (fig. 48), y construyamos

el paralelepípedo infinitamente pequeño contenido en el interior del cuerpo, cuya cara superior *abcd* coincida con la cara superior de la base cilíndrica, que abarque al punto *B*, y cuyas aristas sean paralelas á los ejes coordenados.

Para el equilibrio de este paralelepípedo bastará repetir lo que ya hemos dicho.

Con las *T* no hay que contar, porque se reducen á cero: la T_1 y la T_2, porque lo son en general; la T_3, porque toda-

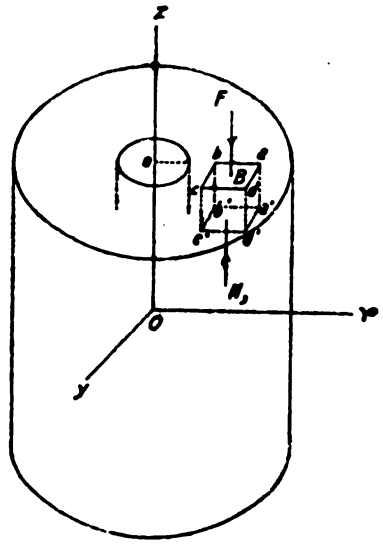


Figura 48.

vía consideramos que el punto *B* está en el plano de las *xz* y para este plano $y = 0$.

Nos quedan sólo los valores de las *N*.

Estos valores los hemos determinado antes para el punto *A* (fig. 47) del plano *xz*. Para el punto *B* (fig. 48) del mismo plano resultarán las mismas expresiones, sólo que en vez de tener *r* el valor r_1, tendrá un valor cualquiera, $oB = r$; porque ya el punto que consideramos no dista del eje r_1, sino *r*.

Por lo demás, los centros de las dos caras *abb' a'* y *dcc' d'*

(fig. 48), distarán lo mismo del eje $0z$, es decir, el radio r.

Tendremos, pues,

$$N_1 = 2(\lambda + \mu)a + \lambda c - \frac{2\mu b}{r_3},$$

$$N^2 = 2(\lambda + \mu)a + \lambda c + \frac{2\mu b}{r^2},$$

$$N_3 = 2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c.$$

Sobre la cara superior é inferioı actuarán N_3 y F por unidad de superficie, y como las caras tienen la misma superficie, la condición de equilibrio sera

$$N_3 = F,$$

ó bien

$$2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c = F,$$
$$N_1 = N_1,$$
$$N_2 = N_2.$$

La primera quedará satisfecha determinando convenientemente las constantes a, b, c.

La tercera queda satisfecha por ser una identidad, puesto que, aunque contienen sus términos la variable r, su forma es la misma, á saber: $2(\lambda + \mu)a + \lambda c + \frac{2\mu b}{r^2}$ y r tiene el mismo valor. En cuanto á las fuerzas que actúan sobre las caras $a\,d\,d'\,a'$ y $b\,c\,c'\,b'$, aunque la forma es la misma, á saber: $2(\lambda + \mu) + \lambda c - \frac{2\mu b}{r^2}$, la r es distinta, toda vez que las caras están á desigual distancia del eje, y ambas presiones no se equilibran de una manera rigurosa.

Pero de las cuatro caras que hemos considerado, en rigor no había necesidad de preocuparse, porque se refieren al equilibrio del paralelepípedo en el interior del sólido y son

ecuaciones de equilibrio del grupo (1) que ya hemos estudiado y que sabemos que quedan reducidas á identidades por los valores u, v, w que hemos supuesto.

Por lo demás, la comprobación es bien fácil, como se ve en la figura 48 bis, que representa un corte de la capa cilíndrica, infinitamente próximo á la base superior, y en que, para mayor exactitud, hemos considerado un sector de án-

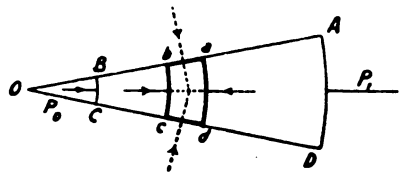


Figura 48 bis.

gulo infinitamente pequeño, α, y en vez de un paralelepípedo, un prisma proyectado en $abcd$.

Calculando las presiones sobre las cuatro caras, se determinan inmediatamente las condiciones de equilibrio; ejercicio elemental en que no necesitamos insistir.

Del mismo modo se comprueba el equilibrio del sector entero $ABCD$.

***

En resumen, las tres ecuaciones de condición que quedan, se refieren al equilibrio de un punto de la superficie cilíndrica exterior, al de otro punto cualquiera de la superficie cilíndrica interior y al de uno de cualquiera de las dos bases, toda vez que ambas se encuentran en el mismo caso.

Estas ecuaciones de condición son (a) (b) (c):

$$2(\lambda + \mu)a + \lambda c - \frac{2\mu b}{r^2_1} = -P_1,$$

$$2(\lambda + \mu)a + \lambda c - \frac{2\mu b}{r^2_0} = -P_0,$$

$$2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c = F.$$

Son, pues, tres ecuaciones de condición, pero hay tres constantes arbitrarias a, b, c, para satisfacerlas.

El problema queda reducido á despejar a, b, c, entre estas tres ecuaciones, y á substituir sus valores en s y u, v, w.

Tendremos, pues,

$$u = s\frac{x}{r}; \quad v = s\frac{y}{r}; \quad w = cz,$$

$$s = ar + \frac{b}{r},$$

$$a = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{r^2_0 P_0 - r^2_1 P_1}{r^2_1 - r^2_0} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} F$$

$$b = \frac{1}{2\mu} \frac{(P_0 - P_1) r^2_0 r^2_1}{r^2_1 - r^2_0}$$

$$c = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} F - \frac{\lambda}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{r^2_0 P_0 - r^2_1 P_1}{r^2_1 - r^2_0}.$$

No insistimos en estos cálculos, que son elementales.

Por lo demás, es claro:

1.° Que todas las fuerzas exteriores se hacen equilibrio.

2.° Que los valores N y T, para todos los puntos del interior de la capa cilíndrica, están determinados por las fórmulas que hemos obtenido anteriormente.

EJEMPLO SEXTO. *Movimientos interiores de un sistema elástico.*

Hasta aquí, todos los ejemplos que hemos presentado se han referido al equilibrio de sistemas elásticos, generalmente limitados por superficies.

Para terminar este curso, vamos á presentar un ejemplo, de lo que pudiéramos llamar, el movimiento elástico de un sistema indefinido, es decir, que ocupe todo el espacio.

En rigor, es el problema elemental de la Luz.

El cuerpo elástico supondremos que es el éter, y admitiremos, siguiendo el método de Cauchy, que está compuesto

de pequeñas masas sujetas á atracciones y repulsiones recíprocas y que, además, constituyen un conjunto isótropo.

No actuarán fuerzas exteriores, y el sistema, como hemos dicho, no estará limitado por ninguna superficie, sino que se extenderá hasta el infinito.

Más aún; ni fijaremos los desplazamientos iniciales, ni las velocidades iniciales tampoco de los diferentes puntos.

De modo que el ejemplo será el más sencillo entre todos los que pudiéramos escoger.

Las ecuaciones, en este caso, no son más que tres, de coeficientes constantes, por ser el sistema isótropo y sin términos independientes de las derivadas, por no actuar fuerzas exteriores.

Las tres ecuaciones del problema son, por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\,\Delta u&=\rho\frac{d^2u}{dt^2},\\
(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dy}+\mu\,\Delta v&=\rho\frac{d^2v}{dt^2},\\
(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dz}+\mu\,\Delta w&=\rho\frac{d^2w}{dt^2}.
\end{aligned}
\qquad (L)
$$

En que recordaremos que ρ representa la densidad.

Necesitamos buscar los valores, ó mejor dicho, las expresiones de u, v, w en función de x, y, z, t, que satisfagan á las tres ecuaciones anteriores, convirtiéndolas en tres identidades.

Se sabe que las tres ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden que hemos establecido tienen infinitas soluciones, es decir, infinitas integrales; nosotros vamos á tomar ciertas integrales particulares, las que en la teoría de la Luz corresponden á lo que se llama movimientos simples, ó movimientos por *ondas planas.*

En rigor, para el caso de un sistema lineal de puntos ma-

teriales, ya hemos resuelto este problema en el curso anterior.

***

Buscar integrales particulares para el sistema (L), es bien fácil.

Los coeficientes son constantes; cada término no tiene más que una derivada de segundo orden con relación á x, y, z, ó t, y no hay ningún término de otra clase; luego si nosotros escogemos para u, v, w, *un coseno*, en la segunda diferenciación se reproducirá, salvo el signo; y si ponemos dentro del coseno una función lineal de las variables independientes, en cada diferenciación desaparecerán éstas y no quedará más que sus coeficientes, que pueden ser constantes arbitrarias.

Y, en fin, como *el coseno* es factor común para todos los términos, en las tres ecuaciones podremos suprimirlo, y no quedarán más que tres relaciones entre las cantidades conocidas λ, μ, ρ y las constantes arbitrarias que hemos introducido: así, determinando estas constantes de modo que satisfagan á las ecuaciones en que entran, y que son el resultado de substituir u, v, w en el sistema (L), este sistema quedará satisfecho. Por lo tanto, los valores u, v, w, serán integrales particulares de dicho sistema.

Todo esto, con un poco de práctica, se prevé aun antes de hacer los cálculos; es una intuición inmediata de los resultados, y no debe causar extrañeza á los principiantes que desde luego se establezcan como integrales particulares las tres siguientes, para las que tomamos las mismas notaciones de Mr. Sarrau, que son naturales y sencillas.

Estableceremos, pues,

$$\left.\begin{aligned} u &= p\cos(ax+by+cz-st+\varphi) \\ v &= q\cos(ax+by+cz-st+\varphi) \\ w &= r\cos(ax+by+cz-st+\varphi) \end{aligned}\right\} (L').$$

Son, como decíamos antes, un coseno para las tres expresiones u, v, w, y dentro del coseno una función lineal de x, y, z, t.

Claro es que en estos tres valores de u, v, w, son constantes arbitrarias, que determinaremos como más nos convenga, las cantidades $p, q, r; a, b, c; s, \varphi$.

Comprobemos ahora materialmente lo que antes expresamos en términos generales, y veamos que, en efecto, estas expresiones de u, v, w satisfacen á las tres ecuaciones fundamentales.

Diferenciando una vez con relación á x, y, z, tendremos

$$\frac{du}{dx} = -pa \operatorname{sen}(ax + by + cz - st + \varphi),$$
$$\frac{dv}{dy} = -qb \operatorname{sen}(ax + by + cz - st + \varphi),$$
$$\frac{dw}{dz} = -rc \operatorname{sen}(ax + by + cz - st + \varphi).$$

y, por lo tanto,

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} =$$
$$= -(ap + bq + cr) \operatorname{sen}(ax + by + cz - st + \varphi).$$

Diferenciando dos veces con relación á x, y, z el valor de u, obtendremos las derivadas que entran en Δu:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -pa^2 \cos(ax + by + cz - st + \varphi),$$
$$\frac{d^2u}{dy^2} = -pb^2 \cos(ax + by + cz - st + \varphi),$$
$$\frac{d^2u}{dz^2} = -pc^2 \cos(ax + by + cz - st + \varphi),$$
$$\Delta u = -p(a^2 + b^2 + c^2) \cos(ax + by + cz - st + \varphi);$$

y diferenciando el valor de θ, con relación á x,

$$\frac{d\theta}{dx} = -(ap + bq + cr)\, a \cos(ax + by + cz - st + \varphi).$$

Por último, diferenciando dos veces u con relación á t, tendremos:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -ps^2 \cos(ax + by + cz - st + \varphi).$$

Substituyendo $\frac{d\theta}{dx}$, Δu y $\frac{d^2u}{dt^2}$ en la primera ecuación (L), resultará:

$$-(\lambda + \mu)(ap + bqcr).a.\cos(ax + by + cz - st + \varphi) -$$
$$- \mu p(a^2 + b^2 + c^2) \cos(ax + by + cz - st + \varphi) =$$
$$= -ps^2 \rho \cos(ax + by + cz - st + \varphi),$$

y dividiendo por el *coseno*, cambiando signos y poniendo todos los términos en el primer miembro:

$$(\lambda + \mu)(ap + bq + cr)a + \mu p(a^2 + b^2 + c^2) - ps^2 \rho = 0,$$

ó bien

$$(\lambda + \mu)\ (ap + bq + cr)\, a + p\,[\mu(a^2 + b^2 + c^2) - \rho s^2] = 0.$$

Del mismo modo y por substituciones análogas efectuadas en las otras dos ecuaciones fundamentales, quedarán reducidas las tres ecuaciones (L) á las siguientes, que formarán el grupo.

$$(\lambda + \mu)a(ap + bq + cr) + p[\mu(a^2 + b^2 + c^2) - \rho s^2] = 0,$$
$$(\lambda + \mu)b(ap + bq + cr) + q[\mu(a^2 + b^2 + c^2) - \rho s^2] = 0, (L'')$$
$$(\lambda + \mu)c(ap + bq + cr) + r[\mu(a^2 + b^2 + c^2) - \rho s^2] = 0.$$

De suerte que el sistema (L') satisfará al sistema fundamental (L), si este último grupo (L'') se reduce á tres identidades.

Mas para ello, basta determinar las constantes arbitrarias $a, b, c, p, q, r, s, \varphi$, de modo que satisfagan á las expresadas ecuaciones (L''), y esto, en general, será posible.

De aquí resulta que el sistema de valores u, v, w determinado para las ecuaciones (L') constituirá un sistema de integrales particulares, ó varios sistemas, según los valores que demos á las constantes arbitrarias.

Pero no corresponderán ni á desplazamientos ni á velocidades iniciales fijadas de antemano, sino á los desplazamientos y á las velocidades que se obtengan en el sistema (L') haciendo $t = 0$.

Es decir, que fijados los valores de las constantes arbitrarias, los desplazamientos iniciales serán, llamándolos u_0, v_0, w_0,

$$u_0 = p \cos (ax + bq + cz + \varphi),$$

$$v_0 = q \cos (ax + bq + cz + \varphi),$$

$$w_0 = r \cos (ax + bq + cz + \varphi);$$

y las velocidades iniciales;

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_0 = ps \operatorname{sen} (ax + by + cz + \varphi),$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_0 = qs \operatorname{sen} (ax + by + cz + \varphi),$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_0 = rs \operatorname{sen} (ax + by + cz + \varphi).$$

Estos serán, y no pueden ser otros, dada la solución u, v, w que marca el sistema (L').

En rigor, el problema ya está resuelto; pero como el ejem-

plo tiene mucho interés, porque en cierto modo es la teoría elemental de la Luz, debemos insistir en él, marcando una serie de propiedades importantes de la solución que hemos escogido; y que, volvemos á repetirlo, no es única, sino la más elemental y la más sencilla del problema de las vibraciones luminosas.

Indiquemos algunas de estas propiedades.

*
* *

1.ª Supongamos determinadas las constantes arbitrarias y satisfechas las ecuaciones de condición *(L'')*.

De las ecuaciones *L'* se deduce.

$$\frac{u}{p} = \frac{v}{q} = \frac{w}{r}.$$

De donde se deduce también que todos los desplazamientos son paralelos y que sus componentes serán distintas, pero que son proporcionales á las constantes p, q, r.

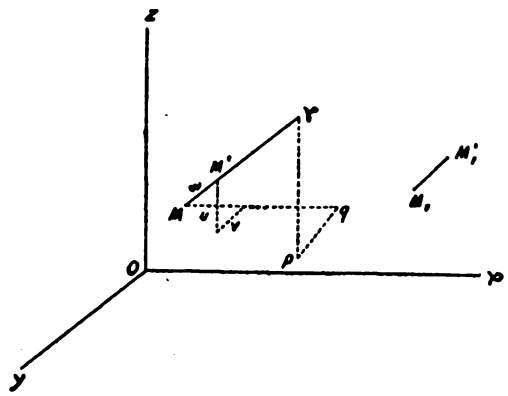


Figura 49.

Esto lo hemos rapresentado en la figura 49.

En el punto M el desplazamiento es $M\,M'$, y sus compo-

nentes son u, v, w; y tomando p, q, r á partir del punto M, los puntos M, M' y r estarán en línea recta.

Para otro punto cualqúiera M_1 del éter, el desplazamiento será $M_1 M_1'$ paralelo á $M M'$.

En suma, para todos los puntos del éter los desplazamientos son paralelos y las tres componentes de cada uno son proporcionales á las constantes p, q, r, en cualquier instante.

2.ª Estudiemos la vibración de cada uno de estos puntos; por ejemplo el movimiento vibratorio de la extremidad de la componente u para un punto cualquiera.

La ecuación de este movimiento será

$$u = p \cos (a x + b y + c z - s t + \varphi),$$

y puesto que se trata de un punto determinado, x, y, z serán conocidas y constantes. Representando la suma de los terminos constantes contenidos en el coseno por ψ, es decir, haciendo

$$a x + b y + c z + \varphi = \varphi_1,$$

tendremos,

$$u = p \cos (\varphi_1 - s t);$$

ecuación que determinará el movimiento vibratorio del punto M (fig. 50); movimiento que ya estudiamos en las conferencias del curso anterior.

El mayor valor de u será p, y el menor valor, $-p$.

Si desde el punto M, con un radio $MA = p$, trazamos una circunferencia $ABA'B'$, claro es que M oscilará en la recta AA' y al llegar á cada uno de sus extremos retrocederá.

Demostramos en el curso precedente, y se ve, desde luego, que el movimiento del punto M en la recta AA' es el movimiento de la proyección sobre esta recta de un punto que girase en la circunferencia $ABA'B'$ con un movimiento uniforme cuya velocidad de rotación fuese s.

En el instante $t = 0$ el punto M estará en M_0, proyección del punto φ_1 y suponiendo s positiva, girará, en el sentido que marcan las flechas de la figura, el punto que se mueve sobre la circunferencia expresada.

Es lo que llamábamos en el curso anterior movimiento pendular.

Esto mismo podríamos repetir para las otras dos compo-

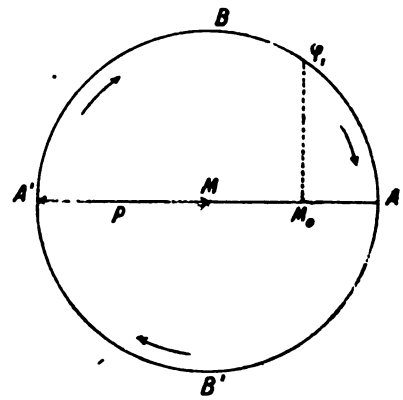


Figura 50.

nentes v y w, y por lo tanto, para el movimiento del punto sobre la recta de su desplazamiento MM' (fig. 49).

Sólo que la amplitud del desplazamiento paralelo al eje de las y sería q, y la del desplazamiento w sería r.

Sobre la recta del desplazamiento, el movimiento sería de la misma clase, porque elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones (L') resulta, extrayendo después la raíz cuadrada,

$$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \cos(\varphi_1 - st);$$

pero la amplitud tendría el valor $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$.

En suma, todos los puntos del sistema vibran del mismo modo á lo largo de rectas paralelas y con vibraciones de la

misma amplitud, $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$; y todos estos movimientos vibratorios son movimientos pendulares simples.

3.ª Veamos ahora cómo se ordenan todos estos movimientos vibratorios, ó cómo podemos considerarlos ordenados.

Tracemos por el origen de coordenados un plano PQ

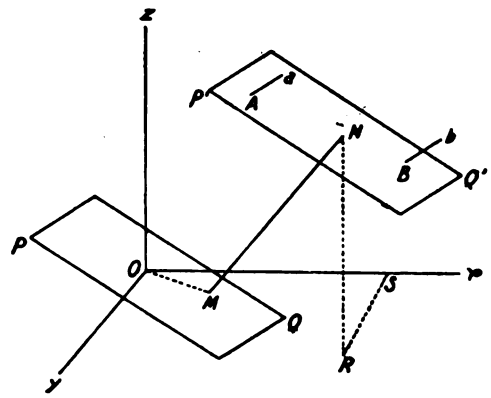


Figura 51.

(fig. 51), cuyas coordenadas designaremos por X, Y, Z y cuyos coeficientes sean a, b, c.

La ecuación de dicho plano será,

$$aX + bY + cZ = 0.$$

Si desde un punto cualquiera, N, del sistema, bajamos (fig. 51) una perpendicular NM á dicho plano, representando por x, y, z las tres coordenadas OS, SR, RN, y proyectamos sobre la normal NM el polígono $OMNRSO$, claro es que la proyección de este contorno será precisamente la normal NM que representaremos por ρ.

Esto es evidente, porque los dos extremos del polígono están en dos puntos N, M de la normal, y además OM está en el plano PQ y se proyecta sobre MN en el punto M.

Designando, para abreviar, por N su dirección, tendremos

$$\rho = x \cos (N, x) + y \cos (N, y) + z \cos (N, z).$$

Pero se sabe, por Geometría analítica, que siendo N normal al plano PQ, se tiene

$$\cos (N, x) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}};$$

$$\cos (N, y) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}};$$

$$\cos (N, z) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}};$$

y, por lo tanto,

$$\rho = x \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + y \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + z \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ó haciendo, para abreviar,

$$h = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

resulta

$$h\rho = ax + by + cz.$$

De modo que este trinomio lineal $ax + by + cz$ contenido en el coseno, se expresa por una sola variable, ρ, que es la distancia del punto N al plano PQ.

Si x, y, z varían de cualquier modo pero permaneciendo constante ρ, determinarán los puntos de un plano $P'\ Q'$, que pasará por N y que será paralelo al PQ. El valor de ρ basta para determinar dicho plano y todos los puntos que en él están contenidos.

Substituyendo dicho trinomio $ax + by + cz$ en los valores

de u, v, w, que es como substituir á las tres variables x, y, z una sola variable ρ, tendremos:

$$u = p \cos (h\rho - st + \varphi),$$
$$v = q \cos (h\rho - st + \varphi),$$
$$w = r \cos (h\rho - st + \varphi).$$

Estas ecuaciones nos dicen que en cualquier momento, es decir, para cualquier valor de t, con tal que ρ tenga un valor constante, también las componentes de la deformación para cualquier punto del plano que este valor de ρ determina, serán las mismas, y, por consiguiente, el desplazamiento será también el mismo.

Más claro: si para un valor de t y para un valor de ρ, ó sea para un plano $P' Q'$ el desplazamiento del punto A es Aa, el desplazamiento para otro punto B, del mismo plano, será Bb, igual y paralelo á Aa.

En suma, todos los puntos del plano $P' Q'$ cambian de posición del mismo modo.

Y lo mismo pudiéramos decir de otro plano cualquiera $P'' Q''$ paralelo al PQ: los desplazamientos de todos sus puntos en un momento dado serán iguales y paralelos; aunque, en general, no serán iguales en ese instante á los de otro plano $P' Q'$: no tendrán el mismo valor, pero sí serán paralelos como antes demostramos.

Y la máxima excursión para todos los puntos de todos los planos hemos demostrado también que es la misma

$$\sqrt{p^2 + q^2 + q^2}.$$

Lo que hay es, que en cada momento, sólo en un mismo plano ó en varios equidistantes, son iguales los desplazamientos como explicaremos bien pronto.

Por todo esto, que acabamos de explicar, se dice que en

este caso el movimiento debe considerarse como un movimiento *simple* ó *por planos paralelos.*

4.ª Conviene explicar ahora tres conceptos, de que ya hablamos en el curso anterior, al tratar este mismo problema para el sistema constituído por una serie lineal de puntos.

Y estos conceptos son los siguientes: 1.° *longitud de la ondulación;* 2.°, *duración de las vibraciones,* y 3.°, *velocidad de la propagación.*

Si aplicamos los valores de u, v, w á los puntos de un plano cualquiera, caracterizado por un valor particular de ρ, en un momento determinado t, las componentes de los desplazamientos serán, como hemos visto:

$$u = p \cos (h\rho - st + \varphi),$$
$$v = q \cos (h\rho - st + \varphi),$$
$$w = r \cos (h\rho - st + \varphi),$$

que admitimos que se refieren al plano PQ (fig. 52).

Supongamos que se determinan los desplazamientos de otro plano, $P' Q'$, que diste del primero una longitud l.

Los valores de $u\,v\,w$, en general, serán distintos, y se determinarán poniendo en vez de ρ la distancia $\rho + l$, que es la del plano $P' Q'$ al plano fundamental $P_0 Q_0$ que pasa por el origen; y tendremos

$$u_1 = p \cos (h(\rho + l) - st + \varphi) = p \cos (h\rho + hl - st + \varphi),$$
$$v_1 = q \cos (h(\rho + l) - st + \varphi) = q \cos (h\rho + hl - st + \varphi),$$
$$w_1 = r \cos (h(\rho + l) - st + \varphi) = r \cos (h\rho + hl - st + \varphi).$$

Pero si l es tal que se tiene

$$hl = 2\pi,$$

en este caso, las expresiones anteriores se reducen á las si-

guientes, porque aumentar 2π el arco es dejar las líneas trigonométricas invariables.

$$u_1 = p \cos (h\rho - st + \varphi),$$
$$v_1 = q \cos (h\rho - st + \varphi),$$
$$w_1 = r \cos (h\rho - st + \varphi).$$

u_1, v_1, w_1 son, pues, iguales á u, v, w, y podemos decir, refiriéndonos á la (fig. 52), *que dos planos que disten entre sí una longitud* 1 *determinada por la relación*

$$h\,l = 2\pi, \text{ de donde } l = \frac{2\pi}{h},$$

se encuentran en el mismo estado elástico; es decir, las deformaciones son las mismas en ese instante.

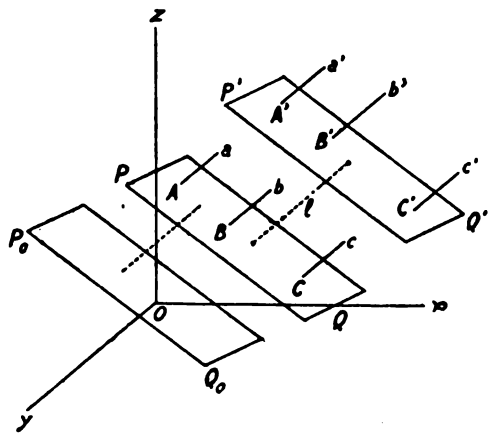


Figura 52.

Las deformaciones Aa, Bb, Cc..... son iguales y paralelas entre sí, como ya habíamos demostrado, y además, iguales y paralelas á todas las deformaciones $A'\,a'$, $B'\,b'$, $C'\,c'$..... del plano $P'\,Q'$.

Es como si el plano PQ, con todos sus puntos y todas las

deformaciones de sus puntos se hubiera trasladado á P' Q' por una traslación $l = \frac{2\pi}{h}$.

Claro es que á la misma consecuencia hubiéramos llegado igualando hl á un múltiplo cualquiera de 2π.

Pero la menor distancia, que goza de esta propiedad de reproducir los desplazamientos de un plano, es la primera que determinamos, $\frac{2\pi}{h}$; porque no hay menor múltiplo de 2π que el mismo.

También se reproducen estas consecuencias dando á 2π valores negativos.

A esta longitud $l = \frac{2\pi}{h}$ es á lo que se llama *longitud de la ondulación.*

Es lo mismo que en el mar ó en un estanque: la distancia entre las crestas de dos olas iguales y consecutivas, ó entre sus puntos más bajos ó entre dos puntos homólogos, pudiéramos decir que es *la longitud del período ondulatorio.*

Porque en rigor, el movimiento que estamos estudiando es como un oleaje del éter, sólo que no es un oleaje superficial, sino, para expresarnos de este modo, un oleaje de tres dimensiones y que procede por planos paralelos.

Pasemos al segundo concepto, ó sea al de la *duración de las vibraciones.*

Si en las fórmulas que dan u, v, w, fijamos el valor de ρ, ó sea la posición del plano que vamos á considerar, y en ese plano tomamos un punto cualquiera y determinamos su desplazamiento para un instante t, las fórmulas de las componentes de este desplazamiento, serán como siempre:

$$u = p \cos (h\rho - st + \varphi),$$

$$v = q \cos (h\rho - st + \varphi),$$

$$w = r \cos (h\rho - st + \varphi).$$

Pero si le damos un incremento al tiempo, incremento que designaremos por τ, variarán estas componentes, y tendremos:

$$u_1 = p \cos (h\rho - s(t + \tau) + \varphi) = p \cos (h\rho - st - s\tau + \varphi)$$
$$v_1 = q \cos (h\rho - s(t + \tau) + \varphi) = q \cos (h\rho - st - s\tau + \varphi)$$
$$w_1 = r \cos (h\rho - s(t + \tau) + \varphi) = r \cos (h\rho - st - s\tau + \varphi),$$

valores distintos de los anteriores en general, porque el desplazamiento varía con el tiempo para todos los puntos de cada plano, aunque del mismo modo para todos ellos.

Ahora bien: si el incremento del tiempo, τ, está determinado de modo que se tenga $s\tau = 2\pi$, es decir,

$$\tau = \frac{2\pi}{s}$$

las fórmulas se reducen, suprimiendo 2π, á

$$u_1 = p \cos (h\rho - st + \varphi),$$
$$v_1 = q \cos (h\rho - st + \varphi),$$
$$w_1 = r \cos (h\rho - st + \varphi),$$

de modo que

$$u_1 = u; \quad v_1 = v; \quad w_1 = w;$$

y el punto vuelve á tener los mismos desplazamientos. O dicho de otra manera: termina su vibración volviendo á la posición de partida. Es como si en la figura 50, partiendo de M_0, hubiera llegado á A, hubiera retrocedido hasta A', y, al fin, hubiera vuelto á M_0.

A este valor del tiempo

$$\tau = \frac{2\pi}{s};$$

es á lo que se llama *duración de la vibración,* y como 2π es constante y s es constante también, la duración de la vibración será la misma para todos los puntos. Podemos decir que todos darán la misma nota; y tratándose del éter, en vez de decir que dan *la misma nota,* podemos afirmar que engendran *el mismo color;* pues los colores, como veremos en otro curso, dependen de la duración de estas vibraciones, ó si se quiere expresar la misma idea de otro modo, dependen del número de vibraciones en un segundo.

Pasemos al tercer concepto, *el de la velocidad de propagación.*

Si en la figura 52 la distancia entre los dos planos $P\,Q$, $P'\,Q'$ es

$$l = \frac{2\pi}{h},$$

y suponemos que en el plano PQ todos los puntos A, B, C..... están en una posición determinada, por ejemplo en el mismo plano, de modo que los desplazamientos son nulos en el plano $P'\,Q'$, según antes se dijo, sucederá lo mismo: los puntos A', B', C'..... estarán también en el plano $P'\,Q'$.

Pero el tiempo transcurre, los puntos A, B, C..... salen de su plano, así como también los A', B', C'.....

Aparentemente es como si la figura geométrica, que representa el plano PQ y los desplazamientos de sus puntos, caminaran hacia el plano $P'\,Q'$ (suponemos, para fijar las ideas, que éste es el sentido del movimiento aparente).

Pues bien: al cabo del tiempo,

$$\tau = \frac{2\pi}{s},$$

las puntos A, B, C..... habrán vuelto á su plano, y en el mismo instante habrán vuelto al suyo los A', B', C'.....

En la apariencia, es como si el plano PQ hubiera tardado

en recorrer la distancia $l = \frac{2\pi}{h}$ el tiempo $\tau = \frac{2\pi}{s}$. Luego la velocidad de este movimiento aparente es el espacio l dividido por el tiempo τ, á saber: $\frac{l}{\tau} = \frac{\frac{2\pi}{h}}{\frac{2\pi}{s}} = \frac{s}{h}$; y llamando esta velocidad ω, resultará:

$$\textit{velocidad de propagación} = \omega = \frac{s}{h}.$$

Pero no lo olvidemos; se trata de una velocidad aparente expresa la velocidad con que marcha la forma, pero no la materia; cada punto se separa muy poco de su posición.

Estos tres conceptos representan un papel importantísimo en la teoría matemática de la Luz; pero como aquí sólo se trata de dar un ejemplo de la Elasticidad, debemos contentarnos con lo dicho.

5.ª Substituyendo los valores de u, v, w en las tres ecuaciones fundamentales, hemos obtenido estas otras tres ecuaciones:

$$(\lambda + \mu)\, a\,(ap + bq + cr) + (\mu h^2 - \rho s^2)\, p = 0,$$
$$(\lambda + \mu)\, b\,(ap + bq + cr) + (\mu h^2 - \rho s^2)\, q = 0,$$
$$(\lambda + \mu)\, c\,(ap + bq + cr) + (\mu h^2 - \rho s^2)\, r = 0,$$

en que $h^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Advirtamos para evitar confusiones, que por otra parte son imposibles, que esta ρ no es la que empleábamos hace un momento: esta ρ es la *densidad*.

Dichas ecuaciones deben reducirse á identidades, para que los valores supuestos de u, v y w sean integrales de las ecuaciones diferenciales propuestas. Y para ello, basta que las constantes arbitrarias a, b, c, p, q, r, s, ρ satisfagan á las tres ecuaciones anteriores.

Combinando estas ecuaciones de cierto modo, resulta una relación importante, que nos permitirá clasificar en dos grupos todos los *movimientos vibratorios por ondas planas* del sistema elástico.

En efecto, multiplicando la primera ecuación por a, la segunda por b, la tercera por c, y sumando, tendremos

$$(\lambda + \mu)(ap + bq + cr)(a^2 + b^2 + c^2) + \\ + (\mu h^2 - \rho s^2)(ap + bq + cr) = 0,$$

ó bien

$$(ap + bq + cr)((\lambda + \mu) h^2 + \mu h^2 - \rho s^2) = 0,$$

que se reduce á

$$(ap + bq + cr)((\lambda + 2\mu) h^2 - \rho s^2) = 0.$$

Como las constantes han de satisfacer á las tres ecuaciones referidas, también habrán de satisfacer á esta última; luego uno de los dos factores debe ser igual á cero, y tendremos que considerar uno de estos dos casos:

1.° Que se tenga

$$(\lambda + 2\mu) h^2 - \rho s^2 = 0;$$

2.° O bien,

$$ap + bq + cr = 0.$$

Veamos lo que resulta para cada uno de ellos:

1.° De

$$(\lambda + 2\mu) h^2 - \rho s^2 = 0$$

se deduce

$$\frac{s^2}{h^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

y

$$\frac{s}{h} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

Pero hemos demostrado que $\frac{s}{h}$ es la velocidad de propagación; es decir, la velocidad aparente con que camina la onda plana, que es siempre paralela al plano $P\,Q$ (fig. 51).

Siendo ω esta velocidad, tenemos, pues, en este caso.

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

Pero de la relación

$$(\lambda + 2\mu)\,h^2 - \rho s^2 = 0,$$

se deduce

$$\mu h^2 - \rho s^2 = -(\lambda + \mu)\,h^2,$$

y substituyendo el valor del primer miembro en las tres ecuaciones de condición, toman éstas la siguiente forma:

$$(\lambda + \mu)\,a\,(ap + bq + cr) - (\lambda + \mu)\,h^2.p = 0.$$
$$(\lambda + \mu)\,b\,(ap + bq + cr) - (\lambda + \mu)\,h^2.q = 0,$$
$$(\lambda + \mu)\,c\,(ap + bq + cr) - (\lambda + \mu)\,h^2.r = 0;$$

ó también

$$(\lambda + \mu)\,(ap + bq + cr)\,a = (\lambda + \mu)\,h^2.p,$$
$$(\lambda + \mu)\,(ap + bq + cr)\,b = (\lambda + \mu)\,h^2.q,$$
$$(\lambda + \mu)\,(ap + bq + cr)\,c = (\lambda + \mu)\,h^2.r.$$

De donde

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}.$$

luego a, b, c son proporcionales á p, q, r.

Las primeras, se sabe por Geometría analítica, que son proporcionales á los cosenos de los ángulos que la normal al plano PQ forma con los ejes coordenados.

Las segundas, p, q, r, son las componentes del desplazamiento en cualquier instante, puesto que hemos visto que

$$\frac{u}{p} = \frac{v}{q} = \frac{w}{r}.$$

De aquí se deduce que este desplazamiento, ó, si se quiere, la vibración, es constantemente normal al plano $P\ Q$.

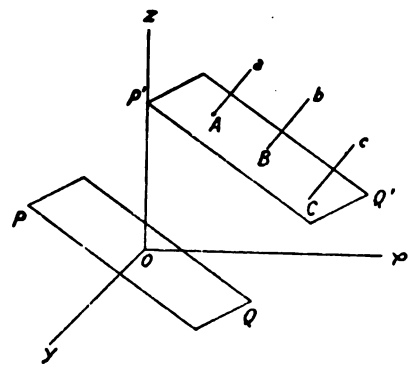


Figura 53.

Hemos representado esto en la figura 53.

$P'\ Q'$ es un plano cualquiera de vibraciones, y Aa, Bb, Cc..... son estas vibraciones, normales todas á dicho plano $P'\ Q'$.

La dirección, pues, de las vibraciones en este primer caso está perfectamente determinada desde el momento que se fijen los valores a, b, c. Y como tienen una dirección deter-

minada y fija, pudiera decirse que son vibraciones polarizadas; pero no les daremos este nombre, que se reserva para otro caso.

Diremos que en esta primera hipótesis, el movimiento se verifica por *vibraciones longitudinales*, á saber: vibraciones que se efectúan en el mismo sentido que el movimiento aparente del plano fundamental PQ, ó sea en el sentido de la propagación.

Es una cosa análoga á lo que sucede en el sonido, que es otro caso de movimiento vibratorio que estudiaremos más adelante.

2.° Supongamos que se verifica la segunda hipótesis: $ap + bq + cr = 0$.

Esta ecuación tiene una interpretación inmediata; se sabe por Analítica que expresa la condición necesaria y suficiente para que una recta definida por sus tres componentes p, q, r, que son las de la vibración, esté en el plano definido de este modo:

$$aX + bY + cZ = 0.$$

En suma, la vibración en este caso, y para cada plano vi-

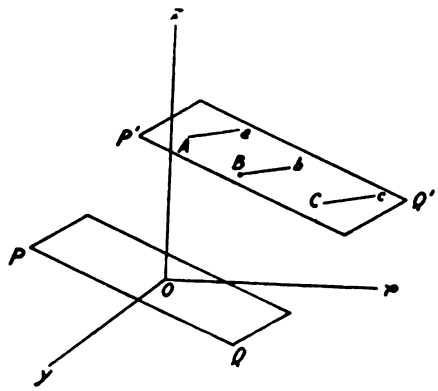


Figura 54.

brante, se verifica *en él mismo*, es decir, en el plano de la onda; esto hemos representado en la fig. 54.

$P'Q'$ es un plano cualquiera; y Aa, Bb, Cc..... son las vibraciones de los puntos de este plano que se efectúan en él.

Claro es que combinando muchos movimientos de esta clase en el mismo plano, el punto vibrante podrá trazar una curva cualquiera.

Si todas las vibraciones son paralelas, como hemos marcado en la figura, un plano perpendicular á todas ellas y al plano de la onda, es el que Fresnell llama *plano de polarización.*

Por último, las tres ecuaciones de condiciones, haciendo en ellas $ap + bq + cr = 0$, se reducen á una sola:

$$\mu h^2 - \rho s^2 = 0;$$

de donde

$$\frac{s}{h} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Luego la velocidad de propagación en esta clase de movimiento será

$$\omega = \frac{s}{h} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

A esta clase de movimiento que se efectúan en los planos de las ondas, se les da el nombre de movimientos transversales. No olvidemos que φ es la densidad.

Una observación todavía; calculemos la dilatación cúbica para un punto cualquiera M; recordando que las componentes del desplazamiento son,

$$u = p\cos(h\rho - st + \varphi) = p\cos(ax + by + cz - st + \varphi),$$

$$v = q\cos(h\rho - st + \varphi) = q\cos(ax + by + cz - st + \varphi),$$

$$w = r\cos(h\rho - st + \varphi) = r\cos(ax + by + cz - st + \varphi);$$

que sus derivadas con relación á x, y, z, serán:

$$\frac{du}{dx} = -pa\,\text{sen}(ax + by + cz - st + \varphi) = -pa\,\text{sen}(h\rho - st + \varphi),$$

$$\frac{dv}{dy} = -qb\,\text{sen}\,(h\rho - st + \varphi),$$

$$\frac{dw}{dz} = -rc\,\text{sen}\,(h\rho + st + \varphi);$$

y que

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz},$$

tendremos

$$\theta = -(ap + bq + cr)\,\text{sen}\,(h\rho - st + \varphi).$$

Pero en las vibraciones transversales hemos visto que $ap + bq + cr = 0$; luego

$$\theta = 0.$$

Es decir, la dilatación cúbica es nula, y, por lo tanto, en este movimiento vibratorio transversal, no hay cambio de densidad; el movimiento se propaga sin que la densidad varíe.

Dijérase que los planos oscilan en sí mismos como si fueran de una pieza.

Pero esto ya lo estudiaremos más detenidamente en otra ocasión.

***

En resumen: en el movimiento vibratorio de un sistema elástico por ondas planas, hay generalmente dos clases de

vibraciones posibles: *vibraciones longitudinales*, cuya velocidad hemos visto que es,

$$\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}};$$

y vibraciones transversales, para las que la velocidad de propagación tiene el valor

$$\frac{\mu}{\rho}.$$

Se supone en la teoría clásica de la Luz, que el fenómeno luminoso está producido por las vibraciones transversales, que son las únicas que la retina humana percibe bajo forma de luz.

Se admite, por último, que en los cuerpos no cristalinos, el éter puede considerarse como un cuerpo isótropo, y que además, en él, se verifica

$$\lambda + 2\mu = 0,$$

con lo cual, la vibración de los movimientos longitudinales, es nula.

Este último ejemplo puede considerarse como un primer avance de la teoría matemática de la Luz, que en otro curso estudiaremos con toda la extensión que nos sea posible.

XV.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimacuarta.

SEÑORES:

En la conferencia anterior terminamos el estudio de la elasticidad de los cuerpos sólidos en su parte más elemental y exclusivamente por el método de Cauchy; y con dicho estudio dimos por concluída la *primera parte* del presente curso de 1906 á 1907.

En esta conferencia haremos algunas ligeras consideraciones sobre el conjunto de dicha teoría y sobre el método que en su exposición hemos seguido.

Después de la *Introducción á la Física matemática*, que constituyó el objeto del curso anterior, principiamos la materia propia de esta ciencia por el estudio de la *Elasticidad.*

Y no fué un principio arbitrario: es que, en nuestro concepto, y sobre todo en la exposición, en cierto modo histórica, de la Física matemática durante el siglo pasado, la teoría de la Elasticidad es principalísima y fundamental.

Y esto se comprende.

La Física matemática, según hemos manifestado muchas veces, reduce todos los problemas á problemas de Mecánica, y, en rigor, á este problema único: dado un sistema de puntos materiales sometidos á fuerzas internas y recíprocas y á fuerzas externas, determinar: 1.°, las condiciones de su equilibrio; 2.°, las de los diversos movimientos de tal sistema.

Problemas ambos que exigen la determinación en cada momento, ó en un momento único, si se trata del equilibrio, de la posición de todos los puntos del sistema, y, por consi-

guiente, de las deformaciones de este último con relación al estado inicial, sean estas deformaciones finitas ó infinitamente pequeñas.

Y planteado el problema de este modo, y dada la hipótesis mecánica, no hay problema que no pueda considerarse, en grande ó en pequeño, como un problema de Elasticidad.

Los problemas de Astronomía son, si se quiere, problemas de Elasticidad, en que *se cuentan los puntos.*

Los problemas de elasticidad de un cuerpo sólido son, en cambio, problemas astronómicos, en que los astros son muy pequeños y su número es enorme.

Y esto es exacto, aunque las aperiencias de ambos problemas sean bien distintas.

En el fondo íntimo de las cosas, ¿qué más da decir que un astro describe una elipse planetaria, que decir que un átomo del éter describe una elipse muy pequeña, en la luz polarizada elípticamente?

Pero, aun prescindiendo de que estas generalizaciones podrán considerarse como algo forzadas; prescindiendo de que en los problemas de Física molecular se someten al cálculo, por reglas y ordenamientos de conjunto, millones y millones de puntos materiales, y á veces se resuelven dichos problemas; cuando en Astronomía sólo *el problema de los tres cuerpos* exige esfuerzos supremos de genio para resolverlo de una manera incompleta; prescindiendo, repetimos, de estas diferencias, que más se refieren al orden de las aproximaciones y á impotencias de la razón humana y del cálculo en su estado actual, que no á diferencias radicales en el fondo de las cosas; prescindiendo de todo esto, repetimos, y viniendo á terreno más concreto, es evidente que la teoría de la Elasticidad abarca en sí, ó por lo menos se aplica, á muchas ramas de la Física matemática.

Problema de la Elasticidad es la teoría del sonido, ya en el aire, ya en los cuerpos vibrantes.

Teoría de la Elasticidad es la de la luz, y lo ha sido hasta que ha venido á hacerle, en cierto modo, competencia, la teoría electromagnética.

Problema de la Elasticidad principió á ser y fué hasta que esta ciencia tomó otros rumbos, la Termodinámica.

Casi me atreveré á decir que es un problema de Elasticidad el problema general de la Química. Y para no prolongar inútilmente esta enumeración, diré que problema de la Elasticidad es la teoría electroestática de Maxwel, aunque me apresuro á añadir que de una elasticidad especialísima: una elasticidad, y anticipo esta idea, en que las masas del sistema elástico dependen de la acción de las fuerzas externas. Una elasticidad, repito, en que m, m'..... fueran función de X, Y, Z.....; en que las fuerzas externas *creasen por sí*, y valga la palabra, las masas sobre las cuales habían de actuar.

Idea que parecerá extraña á mis oyentes, pero que yo creo exacta, y que desarrollaré en momento oportuno.

Estas razones, y el carácter elemental de la teoría que hemos expuesto, y la consideración de que conviene empezar toda ciencia por lo más sencillo, me obligaron á empezar estos cursos después de una introducción general, destinada á marcar el carácter de la Física matemática, con el estudio de la teoría de la Elasticidad, y me obligarán, tal es al menos mi propósito, á seguirla estudiando en el curso inmediato.

He dado en éste un pequeño tratado de la teoría de la Elasticidad por el método de Cauchy.

En el año próximo me propongo dar otro por el método de Lamé.

En el siguiente, otro nuevo tratado por el método de Poincaré, que difiere totalmente de los anteriores, y que responde á nuevos rumbos de la Física matemática.

Por último, y como ya he anunciado varias veces, deduciremos las fórmulas de la Elasticidad de la Termodinámica, terminando esta primera parte de mis tareas universitarias,

cuando pueda y como pueda, si puedo, por la teoría de la Elasticidad para las deformaciones finitas.

Ya tracé este programa en otra conferencia; pero he creído oportuno repetirlo para que se vea que, al menos, no lo pierdo de vista, y lo tengo en la memoria.

***

El carácter del método de Cauchy, que hemos expuesto en lo que va de curso, lo hemos definido varias veces diciendo que es, en cierto modo, un método *de discontinuidad.*

Expliquémoslo una vez más.

En todos estos problemas de Física matemática, reducidos por los sabios del siglo último á problemas de Mecánica, entran, como es natural, dos elementos: las masas ponderables y las fuerzas que actúan sobre ellas.

Pues bien: hay dos puntos de vista que conviene distinguir, y que se marcaron desde los orígenes de esta ciencia.

Verdaderamente son dos hipótesis, que se pueden aplicar á un mismo problema, ó que se aplican de preferencia cada una de ellas á problemas distintos.

Y estas dos hipótesis son:

1.ª La hipótesis de la continuidad de la materia.

2.ª La hipótesis de la discontinuidad.

Claro es, apresurémonos á confesarlo, que los problemas tienen en sí algo, que los hace propios para ser tratados más fácilmente en una ó en otra forma.

Por ejemplo: el problema de la Astronomía, considerándolo, como lo hemos considerado al principio de esta conferencia, violentando acaso un tanto ú un mucho la naturaleza de las cosas, cual si fuera un problema de Física matemática; el problema de la Astronomía, repetimos, se estudia, como es natural, y á nadie se le ocurriría, al menos por hoy, estudiarlo de otro modo, por la hipótesis de la discontinuidad,

porque las masas en este caso están distribuídas de una manera discontinua, son masas distintas y separadas, y como separadas y distintas las vemos: el Sol, la Tierra, los demás planetas, sus satélites y las diferentes estrellas, y hasta las mismas nebulosas, son masas generalmente, que no forman una continuidad; al menos, esto creemos.

Podemos numerarlas, entran en la teoría moderna de los *conjuntos* (ensembles) y más aún de los *conjuntos numerables.*

Las masas, en suma, en la Astronomía, corresponden á la hipótesis de lo discontinuo y de la discontinuidad sujeta á numeración.

En cambio, en muchos problemas de la Física matemática, ha dominado por algún tiempo, en forma más ó menos transitoria, la hipótesis de la *continuidad;* por ejemplo, en los gases y en el flúido eléctrico, en el éter y hasta en el calórico, toda vez que estos últimos eran ó se suponía que eran flúidos, es decir, materia continua.

Después hubo un cambio de ideas, y la hipótesis mecánica ha contribuído poderosamente á este cambio.

Así, en la teoría de la Elasticidad, según el método de Cauchy, el sistema se supone discontinuo y de puntos separados por distancias enormes con relación á la magnitud de dichos puntos, según hemos visto en las conferencias de este curso.

En rigor, la teoría de la Luz, por el mismo método de Cauchy, obedece á idéntico principio.

En la Termodinámica, según la primitiva tendencia, se consideran masas aisladas y vibrantes.

Y, por último, para no apurar los ejemplos, á la discontinuidad se acude también en la teoría de los Gases, que expusimos en el curso anterior como ejemplo.

En cambio, en la teoría del Movimiento del calor en el interior de los cuerpos conductores, en la Electricidad estática, según el método clásico, y sobre todo en la teoría de los Torbellinos, domina el principio de continuidad.

Así y todo, á veces, en una teoría, se mezclan ambos principios; en ocasiones sólo por exigencias y facilidades del cálculo. Pues ya hemos visto en las conferencias anteriores que, aun adoptando el principio de la discontinuidad, con frecuencia, casi siempre se substituían las sumas por integrales, que es substituir á la discontinuidad la continuidad.

Y, por el contrario, en diversos problemas de Electricidad estática, para facilitar el planteamiento de las ecuaciones y de algunas fórmulas, se divide la continuidad de la masa en puntos materiales, que en rigor en este caso, deben considerarse como diferenciales de la masa.

El tipo de la continuidad en esta serie de problemas que hemos enumerado, es la teoría de los Torbellinos, como veremos en su día.

***

Por lo demás, hay una gran fluctuación entre estas dos tendencias, y hasta podríamos decir, que existen en el puro análisis matemático, como se ve en estos últimos tiempos, por estas dos teorías:

La de las *funciones continuas* y la de los *conjuntos* (ensembles).

Pero aun en la Física experimental, observamos esto mismo.

Así como la materia, en la Química, había obedecido en sus grandes teorías al principio de la discontinuidad, dividiendo toda substancia química en moléculas y en átomos; así en la Electricidad el principio de la continuidad dominaba.

Pero en estos últimos tiempos, con la teoría de la Electrólisis y de los rayos catódicos, parece que de nuevo prevalece el principio de lo discontinuo, según resulta de los nuevos conceptos de iones y electrones, que algunos físicos consideran como la última división del antiguo flúido eléctri-

co, como el átomo de electricidad, pudiéramos decir, haciendo juego con el átomo químico.

En rigor, todas éstas no son más que evoluciones de las hipótesis, que sin cesar se modifican bajo influencias del método experimental, y que en rigor constituyen una especie de vibración constante, si se nos permite expresarnos de este modo, entre lo continuo y lo discontinuo.

***

En la Física matemática esta oscilación entre las dos hipótesis es natural, y obedece á la oposición entre dos tipos físicos bien opuestos, que podemos por lo menos simbolizar de este modo.

Por una parte, los fenómenos de la Astronomía, que da masas limitadas y distantes; y como otro tipo, el movimiento de las masas líquidas, formando sistemas continuos, ó que al menos así se supone para el cálculo, dando origen, según antes indicábamos, á la interesantísima y acaso fecunda teoría de los Torbellinos; y de aquí resultan, como decimos, dos tipos de problemas mecánicos, que ambos están dentro del problema general de la Mecánica, pero cuyas ecuaciones de equilibrio y movimiento se plantean de modo bien distinto.

De todas maneras, en la mayor parte de las cuestiones y en todas las hipótesis que se admitan; y más aún, no sólo en la Física matemática, sino en la Física experimental, en la mayor parte de los casos, ó en muchos de ellos, se obtiene este resultado: que las ecuaciones por medio de las que se plantean los problemas son, ó bien ecuaciones diferenciales simultáneas, ó bien ecuaciones diferenciales parciales, y esto choca á casi todos los principiantes.

¿Por qué ecuaciones diferenciales?

¿Qué virtud especial tiene este género de ecuaciones?

¿Cómo la ciencia toda, al buscar las leyes de la Naturaleza, ya por el método experimental, ya por el método teórico, ha de dar siempre, por decirlo de este modo, con ecuaciones de esta clase?

¿Es esto casual? ¿O bien obedece á algún principio, á alguna razón superior?

¿Tienen alguna significación en la Naturaleza las ecuaciones diferenciales y los coeficientes diferenciales también?

Séannos permitidas algunas consideraciones generales, dirigidas á los principiantes sobre todo, ó, mejor dicho, sólo á los principiantes, que para los hombres de ciencia cuanto vamos á exponer es tan elemental, que á ellos no podría dirigirse en manera alguna.

No se olvide que todos estos trabajos y estas conferencias, á la enseñanza, y casi á la enseñanza elemental, van dirigidos.

No; esto de obtener siempre, ó casi siempre, ecuaciones diferenciales para los problemas de la Física matemática, ni es un capricho de la casualidad, ni obedece á recónditos misterios de la Naturaleza.

Es el resultado de los métodos de cálculo, tales como los matemáticos los han inventado, y de las leyes de variación de las magnitudes físicas.

Expliquémonos con más claridad.

Decíamos en el curso anterior, que cada problema se representaba por un conjunto de variables referentes á magnitudes, á que dábamos el nombre de *parámetros de la Física*, y de los que dependía principalmente el fenómeno en cuestión.

Resolver el problema era buscar relaciones analíticas entre estos parámetros, de tal suerte que determinados algunos de ellos, por la resolución de unas cuantas ecuaciones, pudieran encontrarse los demás.

Vulgarmente se diría: que es buscar las relaciones numéricas entre las causas y los efectos.

Cuando las causas *valen tanto,* es decir, están expresadas por tal número, ¿cuánto valdrán los efectos, qué número los expresará?

Sólo que las palabras *causa* y *efecto* tienen una significación más limitada en el orden natural; y por el contrario en el orden matemático, cuando muchas variables están enlazadas por ecuaciones, cualquier cantidad puede ser, ó variable independiente ó función, según el sentido en que el problema se considere.

Así, en el problema típico de los gases, las variables serán tres: *el volumen, la presión* y *la temperatura;* y dos de estas tres cantidades podían considerarse como variables independientes, ó dicho en términos vulgares, como *causas,* en cierto modo; y en cierto modo, la tercera resultaba como efecto.

De todas maneras, el problema que se planteaba, era éste: buscar una relación analítica entre dichas cantidades.

Verdaderamente, si en el problema de la Física lo que se buscan son cantidades finitas, no se ve en el primer momento, por qué han de aparecer las diferenciales, ni por qué las ecuaciones diferenciales han de dominar toda la Física matemática.

Lo que en la Naturaleza encontramos, volveremos á repetirlo, no son diferenciales, sino cantidades finitas: verdad es, que las diferenciales palpitan en la ley de variación de dichas cantidades.

Una temperatura tiene un valor determinado; un valor determinado tiene una fuerza, y lo mismo un volumen, y lo mismo una corriente eléctrica; y un campo magnético, y una velocidad, y todos los parámetros inmediatos ó derivados de la Naturaleza.

¿Por qué no se buscan directamente estas relaciones entre magnitudes finitas y se cree preferible pasar por las ecuaciones diferenciales, que tan difíciles son de manejar?

Precisamente para lo contrario, para simplificar la solución de los problemas.

En Física experimental, algunas veces aquello es lo que se hace: resolver directamente el problema; buscar por método inmediato y directo relaciones entre valores finitos de las variables; pero aun en la misma Física experimental se acude con frecuencia al método indirecto, al de las ecuaciones diferenciales.

En Física matemática sería casi imposible, y decimos casi por no extremar las afirmaciones ó las negaciones, acudir á otro método que al de las ecuaciones que expresan, no los *valores formados*, sino en camino de formación.

Lo que á nosotros nos interesa por regla general, y aun sobre esto haremos luego una observación, son las cantidades finitas; pero en la Física matemática no se puede llegar á ellas inmediatamente.

***

Todo estriba en este problema, que realmente es de análisis.

¿Qué relaciones son más sencillas, las que expresan las relaciones entre magnitudes finitas, ó las que expresan relaciones entre sus incrementos, suponiendo que sean infinitamente pequeños?

Concretemos más el problema: ¿qué es más sencilla, una ecuación en términos finitos entre dos variables, ó la ecuación que expresa la relación entre dx y dy, dado que x é y sean las variables en cuestión?

Aun en este caso la respuesta es imposible, y demostrémoslo por algunos ejemplos.

En la ecuación

$$y = ax + b$$

la derivada es $\frac{dy}{dx} = a;$

de modo que la relación entre los incrementos se expresa de este modo:

$$dy = adx.$$

La *derivada* es más sencilla que la *función*, porque ésta es de primer grado, y la derivada es una constante; por otra parte, la ecuación entre los incrementos también es de primer grado, pero sin término independiente, de suerte que algo hemos simplificado la ecuación primitiva.

Otro ejemplo:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

La primera derivada es

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b,$$

y la segunda,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a,$$

de suerte que, no refiriéndonos ahora al enlace analítico de los incrementos, sino á sus relaciones, es decir, á las derivadas, hemos simplificado notablemente el problema; porque, en vez de una función de segundo grado, tenemos una constante $2a$; y aun para los incrementos

$$d^2y = 2\,adx^2,$$

aunque contiene uno de ellos elevado al cuadrado, es una ecuación más sencilla que la primitiva.

***

Mas esto sucede en los ejemplos sencillísimos que acabamos de presentar; en otros ejemplos no sucede así.

Si la función es

$$y = \text{sen}\, x,$$

las derivadas serán:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x; \frac{d^2y}{dx^2} = -\operatorname{sen} x; \frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x; \frac{d^4y}{dx^4} = \operatorname{sen} x;$$

de modo que las derivadas tienen el mismo grado de complicación analítica que la función primitiva.

Si en un problema de Física que contuviese dos variables, x é y, quisiéramos buscar una relación entre ellas, y esta relación fuese, ignorándolo nosotros,

$$y = \operatorname{sen} x,$$

tan difícil sería buscar esta función, como determinar cualquiera de sus derivadas, y por integración llegar á la primitiva; y esto, en Física experimental, sería inútil y absurdo.

De todas maneras, en Física matemática podría haber otras razones, que nos obligaran al segundo método, siendo imposible de todo punto el primero.

Y el problema continúa planteado del mismo modo que antes: ¿qué es más complicada, la función primitiva, ó una de las derivadas?

Hemos visto que, en algunos casos, se simplifica; en otros queda lo mismo.

¿Quién nos dice que no habrá casos en los que las derivadas tengan mayor grado de complicación que las funciones primitivas? Claro que los hay.

En el caso sencillísimo de una fracción formada por dos polimonios en x, las derivadas resultan mucho más complicadas que la función de donde se parte.

De suerte que no podemos decir, en general, que las relaciones analíticas entre incrementos de diversos órdenes de una función sean más fáciles de manejar que las funciones mismas.

Si aquéllas no podemos obtenerlas directamente en la Fí-

sica matemática, debe suponerse que no habrá mayor facilidad para obtener estas últimas.

Pero es que en toda la Física matemática hay una *hipótesis de cálculo,* por la cual se supone, que las leyes de los incrementos, ó, en general, de las variaciones de los parámetros del fenómeno, van simplificándose á medida que se pasa de las ecuaciones primitivas á las diferenciales, y que al fin podríamos llegar á derivadas constantes. Y entonces se establecen las leyes entre estos incrementos, y de las leyes entre los incrementos, es decir, de las relaciones analíticas entre las diferenciales, por integración se sube hasta las ecuaciones primitivas.

Digámoslo de una vez: por regla general, en la mayor parte de los problemas de la Física matemática, se supone que para las relaciones entre las variables, la fórmula de Taylor es aplicable; y como esta fórmula es un polinomio ordenada por las potencias de los incrementos si es convergente, como se admite, las diferenciaciones sucesivas la simplifican.

Todo esto es todavía muy vago, ya lo comprendemos; pero téngase en cuenta que no es más que una indicación general, que precisaremos más adelante.

***

Y con esto podemos dar por terminada la primera parte de este curso y este primer tratado de la Elasticidad por el método de Cauchy, ó mejor dicho, una exposición elemental del método expresado.

XVI.—Estudio experimental de algunas propiedades del grisú (*).

POR ENRIQUE HAUSER.

SEGUNDA NOTA

Al continuar los estudios que fueron objeto de una Nota anterior y que habrían de referirse ahora al examen de la variación de las propiedades del grisú por la influencia de distintas causas físicas, me encontré con la necesidad de disponer de cierta cantidad de gas de suficiente pureza para que mis experimentos concordasen con los que pudiese haber hecho con grisú natural, pues como sabemos es condición esencial para esa concordancia una pureza relativa del metano.

Ahora bien; el disponer de cierta cantidad de metano puro preparado artificialmente y á un precio razonable, es dificultad que no han llegado á solventar mis antecesores en este asunto, tal vez por no concederle la importancia que merecía, cuando no les era posible procurarse gas natural en cantidad suficiente, esto último no siempre fácil.

El grisú obtenido del carburo de aluminio puro, considerado por el pronto como de suficiente pureza, sólo puede emplearse, económicamente hablando, para trabajos de análisis y experimentos con gas en reposo, pues costando dicho producto 400 francos el kilogramo (**) y no rindiendo sobre el agua el carburo más puro que he podido procurarme sino es-

(*) Véase el número 10 del tomo V de la REVISTA, página 646, Abril de 1907.

(**) Ese precio me fué dado por la casa Poulenc Frères, de París, en Marzo del corriente año (1907).

casamente 60 por 100 de lo teórico (57,3 por 100), es decir, 280,25 litros, en vez de 488 por kilogramo, el precio del metro cúbico del metano puro (á 0° y 760 mm.), sería de 1.430 francos. Ahora bien, para experimentar con grisú en movimiento, aun en pequeña escala (no me refiero á la prueba de lámparas y explosivos), son necesarios unos 4 ó 5 metros cúbicos al año, cantidad que nos representaría un gasto de 6 á 7.000 pesetas, suma que sin ser prohibitiva, sería mejor poderla emplear en aparatos de experimentación si pudiésemos procurarnos ese gas por otro medio con economía y sin dificultad.

Siendo el precio del carburo de aluminio comercial mucho más bajo que el puro, que á 3,50 francos el kilogramo resulta 121 veces más barato, sin descender en igual proporción su rendimiento en metano, mi primer intento fué tratar de procurarme ya fabricado un carburo de aluminio comercial que por su acción sobre el agua no desprendiera hidrógeno, aunque esto fuera á costa de su rendimiento en gas, y habiéndome dirigido al efecto á una importante fábrica de productos químicos de Berlín por mediación de su representante en ésta, se me hizo saber que no podían satisfacer mis deseos, pues el carburo de aluminio comercial que ellos expendían desprendía siempre hidrógeno por la acción del agua. No me quedaba más camino que encontrar un medio para purificar yo mismo ese producto, ó ponerlo en condiciones que al reaccionar el agua sobre él sólo desprendiese metano. A continuación explico cómo he conseguido el resultado que buscaba.

Obtención del metano puro del carburo de aluminio comercial.

Vamos á considerar desde luego las impurezas que suelen acompañar al carburo de aluminio comercial. Este cuerpo, siendo obtenido de ordinario, por fusión en horno de cal, de

una mezcla de caolín y carbón, contiene generalmente como impurezas, carburo de calcio, de hierro y de silicio juntos con aluminio y carbón en exceso, pudiendo contener además un poco de sulfuro de aluminio originado por el azufre del carbón y tal vez siliciuro de aluminio. Además, como los caolines contienen generalmente álcalis, el carburo de aluminio comercial puede encontrarse también impurificado por carburos alcalinos (*).

De los carburos de hierro y silicio no hay que preocuparse, pues el agua no los ataca en frío, y siendo el carburo de aluminio atacable por el agua fría con bastante lentitud, parecía resuelto el problema con sólo tratarle por agua fría y recoger los gases una vez que cesara en gran parte el desprendimiento de acetileno, debido á la descomposición rápida por el agua de los carburos alcalinos y cálcicos; pues siendo el acetileno unas 30 veces más soluble en agua que el metano, podría separarse fácilmente de éste el acetileno restante por medio de un lavado. Sin embargo, la cosa no es tan sencilla; pues siendo el resultado de la descomposición por el agua de los carburos alcalinos los hidratos de las mismas bases, y el hidrato cálcico resultado de la descomposición del carburo de calcio, y reaccionando ambos cuerpos sobre el aluminio en exceso que hemos dicho contiene el carburo, se produce un desprendimiento de hidrógeno, gas que es el que por su mezcla con el metano modifica más las propiedades de éste (**). Además, si bien el aluminio puro

---

(*) Si contuviese carburo de manganeso, éste daría por su reacción con el agua una mezcla de metano é hidrógeno, y vendría este gas en las primeras porciones recogidas por ser el carburo de manganeso más rápidamente atacado por el agua que el carburo de aluminio.

(**) El aluminio es atacado, no sólo por los álcalis libres, sino también por sus carbonatos. Ahora bien: aunque los carbonatos alcalinos en solución muy concentrada atacan al aluminio, no lo hacen con tanta energía, como cuando la concentración es menor, siendo también más débil el ataque con disoluciones diluídas. Dicho ataque pa-

sólo descompone rápidamente el agua pura á temperatura elevada, lo hace lentamente en frío, y el aluminio impuro con indicios de álcalis ó calcio la descompone fácilmente por bajo de 100°, y á semejanza del plomo parece ser más sensible á la acción del agua destilada que cuando contiene una pequeña cantidad de sales como el agua potable.

De estas reacciones nos pueden dar idea el siguiente análisis del gas obtenido directamente del carburo comercial, sin otra precaución que la de dejar escapar la mayor cantidad posible de acetileno desprendido en un principio, separando el resto de dicho gas por lavado del metano impuro.

Ataque en frío á.....	13° c.
Oxígeno....	2,00
Hidrógeno.....	3,34
Metano (p. a.) (*).....	87,90
Nitrógeno (p. d.) (**)..... ...	6,46
TOTAL.....	99,70

El grisú de esta composición podría emplearse para algunos experimentos; pues como ya he dicho en mi nota anterior, se necesita, al menos, 32,7 por 100 de hidrógeno para hacer perder claramente al grisú su propiedad característica del retraso á la inflamación; sin embargo, bastante antes de llegar á ese límite, el grisú empieza á perder la nitidez de sus propiedades características, y con que el grisú tenga

---

rece verificarse como si el aluminio descompusiese directamente el agua, pues el gas desprendido es hidrógeno sin trazas de ácido carbónico; es, decir, *como si* la reacción fuera debida únicamente al hecho de haber alcalinizado el agua; y así es, que una solución saturada de agua de cal, la cual sólo contiene poco más de una milésima de su peso de óxido de calcio, ataca visiblemente al aluminio puro en frío y rápidamente en caliente con formación ulterior de aluminato cálcico.

(*) Por análisis.

(**) Por diferencia.

siquiera 3 por 100 de hidrógeno, la extinción de la llama al determinar su limite de inflamabilidad no es tan neta y cortada como con grisú puro.

Ahora bien; como la separación del metano del hidrógeno no es cosa fácil de hacer en cierta escala, sobre todo si la cantidad de este último gas es considerable, he podido deducir desde luego que era más práctico tratar de purificar el carburo que el metano, lo cual he conseguido después de numerosos tanteos y no pocas desilusiones.

Para conseguir esta purificación, el problema puede plantearse de dos maneras:

1.° O disolver el aluminio,

2.° O separar la mayor parte posible del aluminio, los cuerpos que tienen acción sobre él, y hacer luego que las impurezas restantes sean insolubles en agua y que ésta no ejerza acción apreciable sobre el aluminio.

El primer método es el empleado por Moissan, y se funda en la propiedad que tiene el carburo de aluminio de ser muy poco atacable en frío por el ácido clorhídrico concentrado, mientras que el aluminio lo es rápidamente. Esta operación hay que hacerla tratando cuando más de cada vez de 2 á 3 gramos de carburo contenido en tubos de ensayo, rodeados de hielo y renovando, después de lavar con agua helada, el ácido clorhídrico cuando el ataque se para por formación de un exceso de cloruro de aluminio; la operación ha de hacerse rápidamente, y no debe durar más de unos treinta minutos. Desde luego se comprende que este procedimiento no es económico, pues para tratar un kilogramo de carburo (no para obtenerlo) se necesita una batería de 400 tubos de ensayo, gastar mucho ácido clorhídrico puro y prestar una atención excesiva; además, por poco que se quiera acelerar la operación poniendo más cantidad cada vez, ó se pierde mucho carburo, ó resulta impurificado por aluminio; es decir, que de haber procedido yo por este medio, que he ensayado en pequeño, habría resultado el carburo á unos 400

francos el kilogramo, que era lo que se trataba de evitar.

He intentado también hacer desaparecer el aluminio aprovechando la facultad que tiene de oxidarse rápidamente al aire después de amalgamado, pero sin resultado práctico. Otros intentos de disolverle, por substitución, en una solución de cloruro cúprico ó de cubrirlo de hierro por electrólisis para separarlo luego por un imán, tampoco me dieron resultado, teniendo además el inconveniente todos estos tratamientos de producir una gran pérdida de carburo de aluminio.

En vista de los resultados desfavorables obtenidos por los métodos anteriores, basados en la separación total del aluminio, he deducido el siguiente, fundado en hacerle inofensivo y que describo con detalles, pues juzgo de utilidad vulgarizar su conocimiento para los laboratorios que se ocupan de estudios ó experimentos con el grisú.

Procedimiento empleado.

Ya he dicho que es conveniente quitar desde luego la mayor parte del aluminio y facilitar el ataque ulterior de las impurezas: para ello, si el carburo no está muy finamente pulverizado, como ocurre al que por ser más económico conviene utilizar, hay que hacer desde luego esa trituración, pero no en un mortero, sino entre dos cilindros laminadores, que aplastarán al carburo é impurezas, haciendo á éstas más fácilmente atacables y harán salir los carburos contenidos en los gránulos de aluminio, aumentando en cambio de tamaño las granallas de este metal, del que resultará más fácil separar así una parte, por medio de cribado, del carburo en polvo. Durante esta operación, debido sin duda á la acción de la humedad del aire sobre el carburo de calcio que contiene el de aluminio, éste se apelmaza y adhiere á las láminas de aluminio, del que es fácil separarle por medio de una ligera fricción. Operando así, y según el grueso de

la criba empleada (100 mallas por centímetro cuadrado), es posible separar un residuo muy rico de aluminio que representa al menos 7 por 100 del peso total (*). De lo alterable de estos residuos puede uno formarse idea con decir que, mientras acabado de obtener se observan á simple vista los gránulos de aluminio; abandonado al aire un par de meses, sólo puede reconocerse este metal á la vista después de un lavado para separarle la mayor parte del aluminato cálcico que lo envuelve, procedente del ataque por el hidrato cálcico (resultante á su vez del ataque del carburo cálcico por la humedad del aire), del aluminio y de la corta cantidad de su carburo que le acompaña. La observación de este hecho, completada con el estudio de la acción del agua de cal sobre el aluminio puro, me ha permitido completar el método de purificación que describo.

Desde luego, la operación más importante que hay que hacer es separar la mayor parte posible del carburo cálcico, y esto se consigue muy fácilmente, si observamos que, por ser éste rápidamente atacado por el agua fría, mientras el carburo de aluminio lo es muy lentamente, queda aquél en suspensión en el agua sostenido por las burbujas de acetileno que se desprenden, mientras el carburo de aluminio se va al fondo rápidamente, siendo entonces muy fácil separarlos por decantación.

Opero generalmente cada vez sobre 50 gramos en un vaso de 500 c. c., con 400 c. c. de agua á la temperatura ordinaria; bien agitada en un principio la mezcla de carburo y agua, se deja aposar por un par de minutos y se decanta luego con precaución, repitiendo esta operación hasta que el agua que cubre al carburo quede transparente, lo cual se consigue generalmente al cuarto lavado, pudiendo observarse entonces

(*) Como durante la operación del laminado, el carburo absorbe humedad, no es posible determinar la pérdida de impurezas por diferencia, sino pesando éstas directamente.

en el fondo del vaso, en vez de un polvo gris, una mezcla granular en la que se distinguen claramente los puntos de carburo de aluminio amarillo con granos de carbón y laminillas de aluminio.

Si probamos con papel tornasol el agua que cubre al carburo, veremos que generalmente nos marca una reacción alcalina, debido sin duda á la presencia de hidrato cálcico procedente del ataque del carburo cálcico, y no arrastrado antes á causa de su poca solubilidad en agua; pero no sera difícil disolverle transformándole previamente en cloruro, para lo cual basta tratar por agua ligeramente acidulada con ácido clorhídrico al 5 por 100 de 1,19 p. s., agitar bien y dejar aposar unos minutos; con este tratamiento se disuelve la mayor parte de la cal restante, y como al mismo tiempo se ataca un poco el aluminio y su carburo, que pone la parte más fina de esta substancia en suspensión en el agua, hay que diluir el agua ácida que lo cubre en un volumen de agua corriente, que, disminuyendo rápidamente la intensidad del ataque, permitirá decantar, sin arrastrar carburo, al líquido que le cubre. Para quitar el ácido libre será necesario lavar con nuevas aguas, agitando, dejando reposar lo suficiente y decantando en seguida, hasta que estas aguas no sean ácidas, lo cual se consigue, generalmente, al cuarto lavado. En estas condiciones queda el carburo purificado sin percibirse apenas el olor de acetileno por su ataque por el agua y su situación de emplearlo en seguida, que es lo que hago generalmente: También puede lavarse con alcohol para arrastrar el agua, y con éter para quitar el alcohol, secándole después rápidamente en la estufa para guardarlo.

Con el carburo así preparado resulta el aluminio muy poco atacado por el agua corriente, y en varios ensayos hechos, el contenido en hidrógeno del grisú obtenido (á 14° c.), era próximamente de $^1/_2$ por 100. Me hubiera dado por satisfecho con este resultado, salvo hacer pasar el gas sobre negro de paladio para quitarle los últimos indicios de hidró-

geno si hubiera de utilizarle para análisis del mismo, cuando entre los varios aparatos productores de grisú que tenía en marcha con el mismo carburo, pude observar que uno de ellos producía grisú sin hidrógeno; y estudiadas las condiciones en que eso sucedía, y comparadas éstas con las que según los trabajos de Ditte son más favorables á la oxidación del aluminio, deduje los perfeccionamientos que describiré, después de haber explicado las condiciones en que se dificulta la descomposición del agua por el aluminio.

Según ha hecho observar Ditte, el aluminio debe necesariamente descomponer el agua en frío, por ser el calor de formación de una molécula de alúmina francamente mayor que el de descomposición de tres moléculas de agua, conforme á la siguiente ecuación:

$$Al_2 + 6H_2O = Al_2O_3, 3H_2O + 3H_2 + 186 \textit{ Calorías.}$$

Ahora bien; si en la práctica esta reacción no se ejerce con actividad, proviene de un lado de que el aluminio se cubre desde los primeros instantes de una ligera capa de hidrato de alúmina poco permeable, pero, sobre todo, de pequeñas burbujas de hidrógeno que separan por completo al aluminio del agua, y esto es tan cierto que, si calentando ésta disminuye su adherencia, se observa, ya cerca de 80°, un lento desprendimiento de burbujas. Esto se puede también demostrar, según Ditte, acidulando ligeramente el agua con ácido sulfúrico que disuelve la costra de alúmina, no teniendo tampoco lugar el ataque de aluminio de una manera apreciable en frío, á causa de la envolvente de hidrógeno que lo cubre; pero si hacemos el vacío sobre dicho líquido, entonces las burbujas de hidrógeno se desprenden, y el ataque del aluminio se verifica de una manera continua.

De esto se deduce que, si encontrásemos un medio de dificultar el desprendimiento de las burbujas pequeñas que cubren al aluminio, y si fuese posible de aumentar su adheren-

cia, habríamos dado un avance en la resolución del problema. Esto se consigue, en parte, de la siguiente manera, teniendo presente que la adherencia relativa de las burbujas pequeñas es mucho mayor que la de las grandes; primero, porque su centro de gravedad está más cerca del de los trozos de aluminio que en las grandes, y segundo, porque su fuerza ascensional ó de despegue, es menor que en las grandes burbujas. Por lo tanto, si hacemos que el carburo ocupe cierto espesor en el fondo de la vasija que le contiene (*), las burbujas sólo podrán atravesar la masa de carburo y salir á la superficie del líquido, cuando teniendo suficiente tamaño, puedan romper la capa suelta de carburo que las aprisiona. De otra parte, si en vez de hacer llegar el gas á la superficie del agua del gasómetro por la parte alta, disponemos que éste se desprenda por el fondo del mismo, conseguiremos, además, dar cierta presión al gas dentro del aparato productor. Por otra parte; si hacemos que el gas salga por el tubo de desprendimiento en forma de burbujas relativamente gruesas; de manera que, por ser lento el ataque del carburo de aluminio, transcurra algún tiempo (al menos un cuarto de minuto) entre una y otra, el hidrógeno que hemos dicho que contiene ese gas en cantidad inferior á medio por ciento, encontrándose, por lo tanto, á la presión de $\frac{1}{200}$ de atmósfera, no llegará á disolverse en el agua (que á la presión atmosférica absorbía $\frac{2}{100}$ de su volumen) en más que $\frac{1}{200} \times \frac{2}{100} =$ $= 0{,}0001$ del volumen de ésta; pero como el agua corriente contiene de 6 á 7 c. c. de oxígeno disuelto por litro (0,6 á 0,7 por 100), cantidad suficiente para quemar el doble del hidrógeno contenido en el grisú, y encontrándose el hidrógeno, al empezar á disolverse en el agua, frente á un volumen de oxígeno 60 veces mayor, y de igual manera que ese oxígeno es

(*) También podría cubrirse de arena.

capaz de oxidar la sangre de los peces, no me parece exagerado suponer que el hidrógeno del grisú sea oxidado en mayor ó menor proporción por el oxígeno disuelto en el agua, sobre todo, bajo la influencia de la luz. El hecho es, aparte de la manera de explicarlo, que el metano que he obtenido por este medio no contiene hidrógeno ó sólo en cantidad inferior á $\frac{2}{1000}$, obtenido á la temperatura de 14°, siendo también de interés el hacer observar que, mientras el carburo de aluminio, llamado puro (al cual no hago sufrir ninguna purificación), no me ha producido hidrógeno en el grisú cuando ha sido obtenido éste bajo cierta presión por entrar en el gasómetro por abajo; en cambio, el producido en el aparato que indiqué en la figura 2.ª de la nota anterior, me ha dado cantidades de 0,20 y 1,20 por 100 de hidrógeno, temiendo yo que pudiera haber ocurrido lo contrario por ser de cinc la caja del primer gasómetro referido.

El análisis de una de las últimas muestras de grisú obtenido del carburo comercial purificado por mí, es como sigue:

Oxígeno	0,85
Hidrógeno	0,15
Metano (p. l.) (*)	88,30
Nitrógeno (p. d.)	10,35
TOTAL	99,65

El aparato productor y gasómetro va representado en la figura 1.ª Como se ve, he abolido los tubos de goma, y como los tubos de entrada de gas y de salida ó entrada de agua llegan hasta el fondo, el grisú ha de extraerse por la llave l que termina un tubo que atraviesa el tapón.

El rendimiento en grisú, húmedo, del carburo así preparado ha sido como sigue, en el espacio de veintitrés días (á

(*) Por el límite de inflamabilidad.

la temperatura y presión media de 14° c. y 710 mm.), partiendo de 50 gramos de carburo (laminado y cribado):

	Litros.	
Día 1.°	0,700	3,050
— 2.°	0,550	
— 3.°	0,450	
— 4.°	0,450	
— 5.°	0,300	
— 6.°	0,250	
— 7.°	0,200	
— 8.°	0,150	
— 9.° — 10.°	0,200	
— 11.°	0,100	
— 12.°	0,080	
— 13.°	0,070	
— 14.°	0,050	
— 15.° — 16.°	0,100	
— 17.°	0,050	
al 23.° día	0,300	
TOTAL	4,000	(Cuatro litros.)

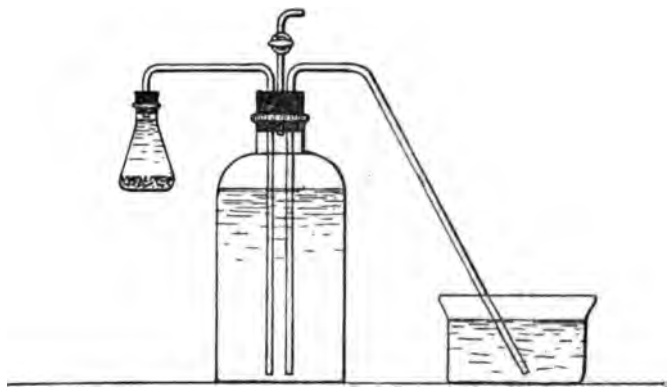


Figura 1.ª

Como se ve, en los ocho primeros días ha rendido el carburo las tres cuartas partes de su producción.

Este gas fué analizado por hidrógeno en los primeros días

del ataque, encontrando 0,09 por 100 de dicho gas; otra muestra, tomada en los últimos dias del ataque sobre la casi totalidad del gas (3,500 cc.), no acusó hidrógeno en el análisis. El límite de inflamabilidad del mismo, 6,6, corresponde á una ley de 91,75 por 100 de metano. El volumen correspondiente de metano puro y seco á 0° y 760 mm., es de 3208 cc., que referidos á 54 gramos de carburo de aluminio comercial sin laminar ni cribar (50 del laminado y cribado), nos dan un rendimiento de un litro de metano puro y seco por cada $\frac{54}{3,21} = 16,800$ gramos de carburo primitivo, ó sea un metro cúbico supuesto, puro y seco, á 0°*C* y 760 mm. por 16 kg. 800 gr. de carburo, que costando de 3,30 francos á 3,50 francos el kilogramo en fábrica, y teniendo en cuenta que en la purificación sólo se gasta agua y menos de 100 cc. de ácido clorhídrico puro por kilogramo de carburo tratado, el coste del kilogramo de carburo purificado puesto en ésta no excede de 5 francos por kilogramo, ó sea 84 francos el metro cúbico en vez de 1,430 obtenido por el carburo puro.

El carburo comercial que me ha servido para estos trabajos procede de la casa E. de Haen, de Seelze, cerca de Hannover, y lo he preferido á otros, porque siendo el más barato, suponía que sería el más impuro, y al resolver el problema lo haría de una manera general. Si el carburo de aluminio no contuviese carburo de calcio, el procedimiento que indico sólo debería utilizarse, naturalmente, en su segunda parte. No es probable que con los carburos comerciales que existen, de 8 á 20 francos el kilogramo, se obtenga el grisú mucho más barato de lo que indico, pues para conseguir mayor baratura sería preciso extraerle por licuación del gas del alumbrado, como ya enseñaré en su día; pero el precio de 84 francos el metro cúbico para los experimentos de laboratorio (no para prueba de lámparas y explosivos), resulta suficientemente económico.

Ya he dicho que del carburo puro no he tenido un rendimiento de gas recogido *sobre agua*, superior á 60 por 100 del teórico, y esto procede de que el carburo llamado puro de que dispongo no lo es, bastando un examen microscópico á unos 35 diámetros (*) para cerciorarse de ello, observándose en él, además del carburo de aluminio de color amarillo azufre, granos cristalinos y agujas de carburo de silicio, alguno que otro de carbón y granos de alúmina fundida; rara vez alguna lámina de aluminio y al parecer algún cristal de cuarzo con algunos granos heterogéneos, que tal vez encierren en su interior granos de carburo cálcico, pues ya he dicho que el grisú recién preparado con este carburo tiene á veces olor á acetileno.

Las muestras de grisú obtenidas con este carburo no son tan fácilmente comparables entre sí como las que proceden del comercial, pues de éste se emplea una cantidad mucho mayor que del puro, cuya composición acabamos de decir que es heterogénea.

Si el grisú obtenido del carburo comercial queremos utilizarle para análisis, es conveniente hacerle pasar en caliente por un tubo con negro de paladio, pero es más sencillo colocar el referido tubo desde luego entre el frasco productor de grisú y el gasómetro colector, haciéndole absorber el hidrógeno al mismo tiempo que va desprendiéndose y circulando muy lentamente por el tubo de paladio.

Todas las determinaciones de hidrógeno antes referidas han sido hechas por absorción de dicho gas con negro de paladio según el último método de Hempel, como explicaré en la próxima Nota.

(*) He utilizado para este examen un binocular Zeiss.

(Laboratorio de la Escuela de Minas.)

XVII.—Sobre una transformación geométrica.

POR JUAN J. DURÁN-LORIGA.

1. Consideremos la recta cuya ecuación en coordenadas basicéntricas es

$$(R)\ldots\ldots\ l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

y hallemos su polo respecto á la elipse imaginaria

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0,$$

que tiene por centro el baricentro del triángulo de referencia, obtendremos el punto

$$(M)\ldots\ldots\ \alpha : \beta : \gamma = l : m : n.$$

Si ahora transformamos el punto M por una inversión de Hirst, siendo la cónica de los puntos dobles la elipse de Steiner circunscripta, resultará el punto

$$(M')\ldots\ldots\ \alpha : \beta : \gamma = l^2 - mn : m^2 - ln : n^2 - lm,$$

dado por la intersección de las rectas

$$(GM)\ (*)\ldots\ldots\ \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(*) Empleamos, para señalar los distintos puntos y rectas que se vayan presentando, la notación corriente en la *Moderna geometría del triángulo*.

y

$$l(\beta+\gamma)+m(\alpha+\gamma)+n(\alpha+\beta)=0$$

polar, esta última de M respecto á la elipse

$$\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta=0.$$

En nuestra transformación hacemos corresponder á la recta R el punto M' y recíprocamente.

La hemos dado la denominación de *Transformación por rectas isobáricas*, por la razón que vamos á exponer:

Volvamos á considerar la recta

$$(R)\ldots\ldots l\alpha+m\beta+n\gamma=0 \qquad (1)$$

y sus dos *isobáricas*

$$\left.\begin{array}{l}(R_1)\ldots\ldots m\alpha+n\beta+l\gamma=0\\(R_2)\ldots\ldots n\alpha+l\beta+m\gamma=0\end{array}\right\} \qquad (2)$$

las rectas R_1 y R_2 se cortan en el punto

$$(P)\ldots\ldots \alpha:\beta:\gamma=l^2-mn:m^2-ln:n^2-lm,$$

es decir, el mismo punto M' anteriormente considerado. Resulta, pues, que hacemos corresponder á una recta el punto de intersección de sus dos isobáricas, y correlativamente á un punto, la recta que une sus dos isobáricos.

Aun se puede presentar la cuestión bajo otro aspecto. Observemos, en efecto, que dada la recta

$$(R)\ldots\ldots l\alpha+m\beta+n\gamma=0,$$

existen sobre ella sólo dos puntos isobáricos uno del otro (un punto y su primer isobárico), cuyas coordenadas se obtendrán resolviendo las ecuaciones

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$
$$n\alpha + l\beta + m\gamma = 0,$$

resultando

$$(M)\ldots\ldots \alpha : \beta : \gamma = m^2 - ln : n^2 - lm : l^2 - mn,$$
$$(M_1)\ldots\ldots \alpha : \beta : \gamma = n^2 - lm : l^2 - mn : m^2 - ln,$$

en esta transformación se hace corresponder á R el *segundo isobárico* de M, es decir,

$$(M_2)\ldots\ldots \alpha : \beta : \gamma = l^2 - mn : m^2 - ln : n^2 - lm.$$

Inversamente, dado un punto, sólo pasan por él dos rectas isobáricas una de otra (una recta y su primera isobárica), cuyas ecuaciones se obtienen por medio del sistema

$$\alpha_2 l + \beta_2 m + \gamma_2 n = 0,$$
$$\gamma_2 l + \alpha_2 m + \beta_2 n = 0,$$

resultando las rectas

$$(R)\ldots\ldots (\beta_2^2 - \alpha_2\gamma_2)\alpha + (\gamma_2^2 - \alpha_2\beta_2)\gamma + (\alpha_2^2 - \beta_2\gamma_2)\gamma = 0,$$
$$(R_1)\ldots\ldots (\gamma_2^2 - \alpha_2\beta_2)\alpha + (\alpha_2^2 - \beta_2\gamma_2)\gamma + (\beta_2^2 - \alpha_2\gamma_2)\gamma = 0.$$

La transformación hace corresponder al punto

$$M_2(\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2),$$

la *segunda isobárica* de R, es decir,

$$(R_2)\ldots\ldots (\alpha_2^2 - \beta_2\gamma_2)\alpha + (\beta_2^2 - \alpha_2\gamma_2)\beta + (\gamma_2^2 - \alpha_2\beta_2)\gamma = 0.$$

Es evidente que á los lados del triángulo fundamental corresponden los vértices opuestos, y recíprocamente. A una recta, pasando por el baricentro, le corresponde este punto, puesto que sus isobáricas pasan también por él.

Puesto que la recta del infinito coincide con sus isobáricas, los puntos correspondientes están en el infinito.

2. Consideremos, en general, una curva cuya ecuación baricéntrica es

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

la condición para que la recta

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$$

le sea tangente, ó, en otros términos, la ecuación tangencial de la curva será de la forma

$$\varphi(u, v, w) = 0.$$

El punto correspondiente á la recta es

$$\alpha : \beta : \gamma = u^2 = vw : v^2 - uw : w^2 - uv,$$

y eliminando los parámetros u, v, w entre estas últimas ecuaciones y la $\varphi(u, v, w) = 0$, se tendrá el lugar geométrico de los puntos correspondientes á las tangentes de $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, es decir, la transformada de la curva propuesta; para hacer esta eliminación, basta observar que, siendo u, v, w proporcionales respectivamente á $\alpha^2 - \beta\gamma$, $\beta^2 - \alpha\gamma$, $\gamma^2 - \alpha\beta$, resta substituir sus valores en la $\varphi = 0$, obteniéndose para la transformada

$$\varphi(\alpha^2 - \beta\gamma, \beta^2 - \alpha\gamma, \gamma^2 - \alpha\beta) = 0.$$

Si la curva dada es de la clase n, resultará una ecuación del grado $2n$, pero podrá rebajarse; así, por ejemplo, si la curva toca la recta del infinito, como á esta recta corresponden puntos en el infinito, la ecuación de la transformada contendrá el factor $\alpha + \beta + \gamma$, análogamente aparecerán las

correspondientes á las tangentes imaginarias, si existen, trazadas desde el baricentro.

Podemos proceder inversamente, es decir, en lugar de obtener la curva transformada como lugar de puntos, considerarla como envolvente de rectas.

Sea la curva dada

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

la recta correspondiente al punto (α, β, γ), tiene por coordenadas tangenciales

$$u : v : w = \alpha^2 - \beta\gamma : \beta^2 - \alpha\gamma : \gamma^2 - \alpha\beta,$$

y eliminando α, β, γ, tendremos la ecuación

$$f(u^2 - vw,\ v^2 - uw,\ w^2 - uv) = 0,$$

que será, en coordenadas tangenciales, la transformada de

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

3. Supongamos que la recta (1) pase por un punto fijo, $M_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, y vamos á encontrar el lugar geométrico del punto correspondiente; ó, en otros términos, tratemos de encontrar la línea transformada de un haz de rectas de vértice M_1, tendremos:

$$l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1 = 0,$$

y eliminando l, m, n, entre ésta y las (2), resulta

$$\alpha_1\alpha_2^2 + \beta_1\beta_2^2 + \gamma_1\gamma_2^2 - \alpha_1\beta\gamma - \beta_1\alpha\gamma - \gamma_1\alpha\beta = 0 \quad (3)$$

que representa una elipse, puesto que

$$\Delta_1 = -\frac{3}{4}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)^2 < 0,$$

degenerando en dos rectas imaginarias, pasando por el baricentro cuando el vértice del haz coincide con dicho punto.

Si el punto fijo está en el infinito, el lugar correspondiente se descompone en una recta, pasando por el baricentro y la recta del infinito.

Las cónicas representadas por la ecuación (3) pasan por el centro de gravedad del triángulo y tienen sus centros sobre la recta que une M_1 con su complementario. Además, los ejes de estas cónicas son paralelos, y si pasa su determinación, se aplica el método dado por el Sr. Lemoine *(Nouvelles Annales,* Septiembre, 1901), el punto del círculo circunscripto que resulta es el punto de Steiner.

La polar de M_1, respecto á las cónicas, es la recta correspondiente al punto en la transformación considerada.

Si en particular, M_1 es el punto K (punto de Lemoine), la elipse correspondiente tiene por eje mayor el segmento GH_0, siendo la tangente en G la transversal recíproca del eje de homología de ABC y del segundo triángulo de Brocard $A_2\ B_2\ C_2$, y, por consiguiente, paralela á la recta de Longchamps.

El eje menor tiene por ecuación,

$$[3(a^4 - b^2 c^2) + q^4 - n^4]\alpha + [3(b^4 - a^2 c^2) + q^4 - n^4]\beta + \\ + [3(c^4 - a^2 b^2) + q^4 - n^4]\gamma = 0,$$

en la que q y n tienen la significación habitual. Es, pues, paralelo á la *transversal recíproca* del eje de homología de ABC, y su primer triángulo de Brocard.

La polar de K, respecto á la cónica, es la transversal recíproca del eje de homología de ABC y del primer triángulo de Brocard $A_1\ B_1\ C_1$; es, pues, paralela á su eje menor como podía preverse, puesto que K está sobre su eje mayor.

Si el vértice del haz es el pie de una mediana, por ejemplo, M_1 (0, 1, 1), resulta para la ecuación de la transformada,

$$\beta^2 + \gamma^2 - \alpha(\beta + \gamma) = 0,$$

que se ve fácilmente representa la elipse de Steiner inscripta en el triángulo formado por las intermedianas $A'C'$, $A'B'$ y la paralela ó BC trazada por A.

Finalmente, si M_1 coincide con el vértice A, resulta

$$\alpha^2 - \beta\gamma = 0,$$

que representa la elipse de Steiner circunscripta al triángulo BCA_1, simétrico del propuesto respecto al punto medio de BC.

La consideración de nuevos puntos, nos llevaría seguramente á resultados interesantes.

La ecuación (3) no puede representar un círculo más que en el caso particular de ser equilátero el triángulo de referencia.

Hemos encontrado para la elipse correspondiente al punto M_1 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ la ecuación

$$\alpha_1 \alpha^2 + \beta_1 \beta^2 + \gamma_1 \gamma^2 - \alpha_1 \beta\gamma - \beta_1 \alpha\gamma - \gamma_1 \alpha\beta = 0. \quad (3)$$

Ahora bien; si $L_1 = 0$ es la ecuación de la recta correspondiente al punto, y $L_2 = 0$, $L_3 = 0$, las de sus isobáricas, se la puede dar á la (3) la forma

$$L_1^2 - L_2 L_3 = 0;$$

de donde resulta que la cónica (3) juega respecto al triángulo formado por M_1, y sus dos isobáricos, el mismo papel que la cónica $\alpha^2 - \beta\gamma = 0$ respecto al triángulo fundamental. Este hecho, que podía preverse, permitiría determinar con facilidad, geométricamente, sus elementos.

4. Consideremos ahora, inversamente, en lugar de varias rectas en haz, varios puntos en línea recta, ó en otros términos, vamos á encontrar la transformada de la recta que tiene por ecuación

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0. \quad (1)$$

Se ve *à priori* que la transformada es una cónica.

En efecto, cuando el punto M_1 recorre la recta (1), el punto M' que tiene por coordenadas

$$\alpha : \beta : \gamma = (\alpha_1^2 - \beta_1 \gamma_1) : (\beta_1^2 - \alpha_1 \gamma_1) : (\gamma_1^2 - \alpha_1 \beta_1),$$

describe la cónica

$$\Sigma l \alpha^2 - \Sigma l \beta\gamma = 0,$$

y, por consiguiente, la recta

$$\Sigma(\alpha_1^2 - \beta_1 \gamma_1) \alpha = 0,$$

polar de M' respecto á la elipse imaginaria

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0,$$

envolver á otra cónica.

Vamos á encontrar su ecuación: bastará eliminar los parámetros $\frac{\alpha_1}{\gamma_1}$ y $\frac{\beta_1}{\gamma_1}$, que representaremos por a y b entre las ecuaciones

$$f = (a^2 - b) \alpha + (b^2 - a) \beta + (1 - ab) \gamma = 0,$$
$$\varphi = la + mb + n = 0,$$

y la ecuación

$$\frac{f'a}{\varphi'a} = \frac{f'b}{\varphi'b},$$

y se obtiene fácilmente

$$(p^2 - qr) \alpha + (q^2 - pr) \beta + (r^2 - pq) \gamma = 0,$$

habiendo hecho

$$p = - lm\alpha + (m^2 - 2ln) \beta - mn\gamma,$$
$$q = (l^2 - 2mn) \alpha - lm\beta - ln\gamma,$$
$$r = 2m^2 \alpha + 2l^2 \beta + 2lm\gamma.$$

La ecuación que hemos obtenido es de tercer grado; pero se ve fácilmente que se descompone en las siguientes:

$$m^2\alpha + l^2\beta + lm\gamma = 0,$$
$$(4mn - l^2)\alpha^2 + (4ln - m^2)\beta^2 + (4lm - n^2)\gamma^2 +$$
$$+ 2(2l^2 + mn)\beta\gamma + 2(2m^2 + ln)\alpha\gamma + 2(2n^2 + lm)\alpha\beta = 0.$$

La segunda de las cuales representa una parábola, cuya ecuación puede escribirse así:

$$(l\alpha + m\beta + n\gamma)^2 - 4(m\alpha + n\beta + l\gamma)(n\alpha + l\beta + m\gamma) = 0, \quad (2)$$

ó bien,

$$L_1^2 - 4L_2 L_3 = 0.$$

Representando por $L_1 = 0$ la recta dada, y $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ sus isobáricas. La (2) demuestra que la parábola toca las rectas L_2 y L_3 sobre la L_1. Las coordenadas de los puntos de contacto son

$$(L_1 L_2) - - \alpha : \beta : \gamma = n^2 - lm : l^2 - mn : m^2 - ln$$
$$(L_1 L_3) - - \alpha : \beta : \gamma = m^2 - ln : n^2 - lm : l^2 - mn,$$

puntos isobáricos del correspondiente á L_1.

Resulta, pues, que (2) es una parábola de Artz del triángulo formado por L_1 y sus isobáricas, triángulo que es triplemente homológico del propuesto y con el mismo baricentro: si lo representamos por $A_1 B_1 C_1$, se ve fácilmente que la dicha parábola toca la recta que une los puntos medios b_1 y c_1 de $A_1 C_1$ y $A_1 B_1$, que la dirección conjugada ó $B_1 C_1$ es la mediana $A_1 a_1$; ésta es, pues, la dirección del eje. El foco es el punto de intersección de la recta $A_1 K_1$ (siendo K_1 el punto de Lemoine del nuevo triángulo) con el círculo circunscripto al triángulo $A_1 b_1 c_1$.

Para la expresión analítica de los elementos de la parábola, hemos encontrado

EJE

$$[(P-Q)(2m^2+ln)+(R-P)(2n^2+lm)+(Q-R)(4mn-l^2)]\alpha,$$
$$+[(Q-R)(2n^2+lm)+(P-Q)(2l^2+mn)+(R-P)(4ln-m^2)]\beta,$$
$$+[(R-P)(2l^2+mn)+(Q-R)(2m^2+ln)+(P-Q)(4lm-n^2)]\gamma=0.$$

DIRECTRIZ

$$P\alpha+Q\beta+R\gamma=0.$$

COORDENADAS DEL FOCO

$$\alpha:\beta:\gamma=2lP-nQ-mR:2mQ-lR-nP:2nR-mP-lQ,$$

en cuyas fórmulas se ha puesto

$$P=mc^2+nb^2-lbc\cos A,$$
$$Q=na^2+lc^2-mac\cos B,$$
$$R=lb^2+ma^2-nab\cos C.$$

5. Consideremos ahora el caso particular en que $m=n=0$, es decir, cuando la recta considerada es el lado BC del triángulo fundamental; entonces se obtiene la parábola de Artz $\alpha^2-4\beta\gamma=0$, y análogamente para los otros dos lados $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, $\gamma^2-4\alpha\beta=0$.

Podemos, pues, decir que *si un triángulo inscripto en el de referencia tiene por vértices tres puntos isobáricos, la envolvente de los lados de estos triángulos está formada por las tres parábolas de Artz del primer grupo.*

Resulta, por consiguiente, que las parábolas de Artz son un caso particular de las que hemos obtenido en la ecuación (2), y que su existencia es debida á la propiedad de que goza el triángulo fundamental de ser un *triángulo isobárico;* llamamos así á todo triángulo en el que se verifica que los vértices son puntos isobáricos (un punto y sus dos isobári-

cos), como sucede en el triángulo $L_1 L_2 L_3$ que antes hemos considerado, y más generalmente á los que sirven de fundamento á la transformación que estamos estudiando.

La consideración de lo que pudiéramos llamar *isobaritismo,* nos lleva á hacer algunas reflexiones. Si recorremos los elementos punto, recta y curva (en partículas cónicas) que figuran en la geometría del triángulo, y nos referimos particularmente á coordenadas baricéntricas (pues en otro sistema se modificarían los elementos isobáricos), observamos que unos gozan de isobaritismo absoluto, es decir, que una transformación isobárica los deja invariables, citaremos entre los puntos el centro de gravedad, único que goza de esta propiedad, y que origina que una *transformación recíproca, complementaria, brocardiana,* etc., los deja invariables; entre las rectas, citaremos la *recta del infinito* ($\alpha + \beta + \gamma = 0$), y entre las cónicas, *la elipse de Steiner circunscripta*

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0\right).$$

En la expresión analítica de estos elementos no pueden entrar de ningún modo los del triángulo, y son de formas absolutamente simétricas. Otros elementos gozan de un *isobaritismo relativo;* tampoco figuran en su expresión los elementos del triángulo, pero dejan de ser simétricos respecto á las tres coordenadas, y una transformación isobárica, si bien los altera, los deja en la misma *posición relativa* en el triángulo. Tal sucede, por ejemplo, con las medianas; así, si se considera la relativa al lado BC, que tiene por ecuación

$$\beta - \gamma = 0,$$

que se puede también escribir

$$0\alpha + \beta - \gamma = 0;$$

una transformación isobárica le convierte en

$$0\beta + \gamma - \alpha = 0; \quad \text{es decir,} \quad \alpha - \gamma = 0;$$

esto es, *también la mediana,* pero relativa al lado *A C.*—Por último, hay elementos que, siendo función de los lados del triángulo, una transformación isobárica puede cambiarlos completamente; así, por ejemplo, si sometemos á esta transformación al círculo circunscripto que tiene por ecuación

$$a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta = 0,$$

se obtiene una línea completamente distinta; pero no siempre ocurre esto; así, por ejemplo, si á la *interbisectriz* que que tiene por ecuación

$$-\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0,$$

se la somete á dos transformaciones isobáricas, resultan las otras dos.

6. Dadas, en general, dos rectas, sólo se pueden encontrar en ellas dos puntos (uno sobre cada recta) que sean isobáricos uno de otro (un punto y su primer isobárico); pero si las rectas son isobáricas, entonces á cada punto de una de las rectas corresponde en la otra su isobárico. Las parábolas de Artz, *generalizadas*, que antes hemos considerado, se han obtenido, en suma, por la siguiente generación. Dadas dos rectas isobáricas, la envolvente de las rectas que unen pares de puntos isobáricos elegidos uno en cada una de ellas, es una parábola representada por la ecuación (2). *En particular, si las dos rectas isobáricas son dos lados del triángulo de referencia, se obtienen dos parábolas de Artz.*

Este resultado se explica fácilmente; pues las dichas rectas de unión dividen los lados del triángulo en partes pro-

porcionales, que es cabalmente la generación por la cual llegó su autor á determinarlas.

7. Si consideramos una recta,

$$L = l\alpha + m\beta + n\gamma,$$

y sus dos isobáricas L' y L'', puesto que la ecuación de una cónica circunscripta al triángulo $L\,L'\,L''$ es

$$pL\,L' + qL\,L'' + rL'\,L'' = 0,$$

resulta para la elipse de Steiner, circunscripta á dicho triángulo,

$$\Sigma\, lm\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + (\Sigma\, l^2 + \Sigma\, lm)\,(\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta) = 0.$$

Si $lm + mn + ln = 0$, es decir, si el polo baricéntrico de L está sobre la elipse de Steiner, circunscripta al triángulo fundamental, la anterior ecuación se reduce á

$$\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta = 0;$$

de modo que la elipse de Steiner circunscripta al triángulo de las isobáricas $L\,L'\,L''$ coincide con la elipse del triángulo fundamental. Podemos, pues, decir *que cuando el polo baricéntrico de una recta cae sobre la elipse de Steiner, circunscripta, el triángulo formado por ella y sus isobáricas queda inscripto en dicha elipse.*

Por otra parte, se ve fácilmente que, si el polo baricéntrico cumple la anterior condición, la envolvente de la recta correspondiente es la elipse de Steiner inscripta; resulta, por consiguiente, que si una recta toca la elipse de Steiner inscripta, el triángulo formado por ellas y sus isobáricas apoya sus vértices en la de Steiner circunscrita. Es, por otra parte, evidente que cuando una recta satisface la circunstancia anterior, lo mismo sucede con sus isobáricas, puesto que siendo

los polos baricéntricos puntos isobáricos, todos estarán en la elipse circunscriptas al estar uno de ellos. Se tienen, pues, ∞^1 triángulos inscriptos en una de las elipses (la circunscripta) y circunscriptas á la otra

8. Vamos, para terminar, á hacer aplicación del procedimiento general que hemos dado en el párrafo 2, á algunos ejemplos.

Sea la parábola de Artz, $\alpha^2 - 4\beta\gamma = 0$, la línea cuya transformada deseamos obtener. Su ecuación tangencial es $u^2 - vw = 0$, y substituyendo en ésta, según hemos dicho, en lugar de u, v, w, respectivamente, los binomios $\alpha^2 - \beta\gamma$, $\beta^2 - \alpha\gamma$, $\gamma^2 - \alpha\beta$, resulta para la curva correspondiente la ecuación

$$\alpha^2(\alpha^2 - 3\beta\gamma) + \sigma(\alpha^3 + \beta^3) = 0$$

que se descompone en las tres siguientes:

$$\alpha = 0,\ \alpha + \beta + \gamma = 0,\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \alpha\gamma - \alpha\beta = 0,$$

las dos últimas representan la recta del infinito, y el par de tangentes imaginarias conducidas desde el baricentro á la parábola dada; la primera $\alpha = 0$, esto es, el lado BC del triángulo de referencia, es la del lugar que se busca conforme con lo anteriormente dicho.

Consideremos ahora la curva $\alpha^2 - \beta\gamma = 0$ que, según sabemos, es la elipse de Steiner circunscripta al triángulo BCA_1, simétrico del propuesto respecto al punto medio de BC. Su ecuación tangencial es $u^2 - 4vw = 0$, y la línea correspondiente,

$$\sigma^2(\alpha^2 - 6\beta\gamma) + 4\alpha(\beta^3 + \gamma^3) - 3\beta^2\gamma^2 = 0 \qquad (1)$$

que siendo unicursal pueden expresarse sus diversos puntos en función racional de un parámetro.

Observemos con este objeto, que si en la ecuación tangen-

cial hacemos $u = m$, $v = n$, resulta $w = \frac{m^2}{4n}$; tenemos, pues, $u = 4mn$, $v = 4n^2$, $w = m^2$. Las rectas que corresponden á los puntos de la curva (1), son, pues,

$$4mn\alpha + 4n^2\beta + m^2\gamma = 0,$$

y tales puntos tienen por coordenadas,

$$\alpha : \beta : \gamma = 12m^2n^2 : 16n^4 - 4m^3n : m^4 - 16mn^3,$$

ó haciendo $m : n = p$, resulta:

$$\alpha : \beta : \gamma = 12p^2 : 16 - 4p^3 : p^4 - 16p.$$

Mas, generalmente, á las cónicas $\alpha^2 - k\beta\gamma = 0$, corresponden las curvas que tienen por ecuación

$$\alpha^2\left[k\alpha^2 - 2(k+2)\beta\gamma\right] + 4\alpha(\beta^3 + \gamma^3) + (k-4)\beta^2\gamma^2 = 0,$$

obtenida mediante la ecuación tangencial,

$$Ku^2 - 4vw = 0$$

y la representación paramétrica, es:

$$\alpha : \beta : \gamma = p^2(4 - k) : (1 - 2kp^3) : k^2p^4 - 2p.$$

Sea, como tercer ejemplo, la recta que tiene por ecuación

$$\beta + \gamma = 0,$$

es, decir, la paralela á BC, trazada por A.

Poniendo en lugar de β y γ, respectivamente, $v^2 - uw$ y $w^2 - uv$, resulta para ecuación tangencial de la transformada

$$v^2 + w^2 - uw - uv = 0,$$

ó en coordenadas puntuales,

$$4\alpha(\alpha+\beta+\gamma)-(\beta-\gamma)^2=0,$$

que representa evidentemente una parábola tangente al lado BC en el pie de la mediana.

A la mediana BC corresponde una envolvente degenerada de la segunda clase, formada del baricentro y del punto del infinito de BC.

Si el punto describe una cónica,

$$l\beta\gamma+m\alpha\gamma+n\alpha\beta=0$$

circunscripta al triángulo fundamental, la curva correspondiente tendrá por ecuación tangencial:

$$F(u_1 v_1 w)=\Sigma l v^2 w^2-\Sigma lu(v^3+w^3)+uvw\Sigma lw=0,$$

evidentemente inscripta en el triángulo de referencia.

Se tendrá la ecuación puntual eliminando u, v, u, entre las ecuaciones

$$F'_u : F'_v : F'_w=\alpha : \beta\gamma$$

y la

$$u\alpha+v\beta+w\gamma=0.$$

En particular, para la elipse de Steiner circunscripta, resulta la incripta del mismo geómetra.

XVIII.—Fundamento teórico de la Fototopografía.

POR JOSÉ MARÍA TORROJA.

PARTE SEGUNDA

Relaciones analíticas que existen entre tres figuras planas, proyecciones de una misma en el espacio.

Hemos visto en la parte primera que, dadas dos proyecciones S y S' de una figura cualquiera de tercera categoría desde dos puntos O y O', puede determinarse (salvo en casos particulares) una tercera proyección de la misma, desde un centro O'' sobre un plano S''. Entre tres proyecciones cualesquiera de una figura en el espacio, existen, pues, ciertas relaciones, y éstas son las que nos proponemos ahora investigar.

Recordemos igualmente que los puntos del plano determinado por los tres centros constituían un caso de excepción, pues quedando indeterminada su tercera proyección entre todos los de uno de los ejes singulares, era necesario efectuar las construcciones en aquel mismo plano, á no ser que se acudiera á algún método indirecto para la resolución del problema.

Dividiremos, pues, este estudio en dos secciones: en la primera nos ocuparemos de las relaciones que ligan los elementos de los tres planos, prescindiendo de los puntos de los ejes singulares, y la segunda tendrá por objeto estudiar lo relativo á estos puntos.

SECCIÓN PRIMERA

Relaciones entre los puntos de tres proyecciones de una figura en el espacio, exteriores á sus ejes singulares.

Vamos á investigar directamente, por los métodos de la Geometría Analítica, las relaciones que existen entre las seis coordenadas de las proyecciones de un punto desde tres centros O, O' y O'', sobre tres planos S, S' y S'', que se cortan en el punto V. Refiramos aquel punto al tetraedro, cuyos vértices son O, O', O'' y V, y á un punto propio cualquiera U, no situado en ninguna de las caras de aquél. En el sistema de coordenadas así establecido, basta, para determinar un punto M, dar las razones dobles,

$$\left.\begin{aligned} O'O''.(VOMU) &= \mu \\ O''O.(VO'MU) &= \mu' \\ OO'.(VO''MU) &= \mu'' \end{aligned}\right\}$$

pues con ellas podemos inmediatamente construir los planos $O'O''M$, $O''OM$ y $OO'M$, que, por su intersección, nos dan el punto M.

Además, la proyección de M sobre el plano S está en la recta OM de intersección de los planos $OO'M$ y $OO''M$; la proyección sobre S', en la $O'M$, común á los planos $O'OM$ y $O'O''M$, y finalmente, la proyección sobre S'', en la $O''M$, en que se cortan los $O''OM$ y $O''O'M$. De aquí deducimos que las proyecciones m y m' están ambas en el plano $OO'M$; las m' y m'', en el $O'O''M$, y las m'' y m, en el $O''OM$.

Si referimos los puntos del plano S al triángulo Vpq y á la traza de la recta OU, cada una de las coordenadas de m será la razón doble del haz de rectas de vértices p y q, sec ciones respectivas de los de planos de aristas OO' y OO''. Haciendo lo mismo en los planos S' y S'', observamos que, llamando ξ y υ, ξ' y υ', ξ'' y υ'' estas coordenadas, las co-

rrespondientes á cada par de puntos principales contrarios, son iguales como razones dobles de un mismo haz de planos; es decir, que

$$\upsilon = \xi', \upsilon' = \xi'', \upsilon'' = \xi.$$

Dadas cuatro coordenadas ξ, υ, ξ', υ', de dos puntos m y m', tales que $\upsilon = \xi'$, las del m'', que con aquellos forma un terno, son $\xi'' = \upsilon'$ y $\upsilon'' = \xi$; es decir, que dadas dos de las proyecciones de un punto en el espacio, conocemos inmediatamente la tercera.

En el caso particular en que los centros O, O' y O'' son los puntos del infinito de los ejes del triedro formado por los planos de proyección, la propiedad anterior se expresa en coordenadas cartesianas por las igualdades

$$z = z', x' = x'' \text{ é } y'' = y,$$

si se toma por punto U el que tiene iguales á la unidad sus tres coordenadas cartesianas.

Aunque con lo que acabamos de indicar queda completamente resuelto el problema de cambio de planos, y estudiadas las relaciones que ligan entre sí las tres proyecciones de una figura en el espacio, vamos á establecer esta teoría interpretando analíticamente las construcciones geométricas estudiadas en la Parte Primera, empleando para ello coordenadas cartesianas rectangulares.

Vimos en dicha Primera Parte, que á un punto cualquiera de uno de los planos, por ejemplo el S, corresponden en el S' los de una recta que pasa constantemente por el punto p' (fig. 1.ª), y en el S'' los de otra recta, que también ha de pasar por un punto fijo q''; vamos á expresar analíticamente que esta condición se cumple doblemente para cada par de planos.

Para que dos puntos M' y N' sean conjugados (es decir,

proyecciones de uno mismo en el espacio), es preciso que cada uno de ellos esté situado sobre la recta homóloga del otro en la relación que liga los elementos de los planos S' y S''. Vamos á ver cómo puede establecerse esta condición. Tomemos como eje de abscisas, en cada plano, el eje singular correspondiente pq, $p'q'$ y $p''q''$, y como eje de ordenadas una recta cualquiera perpendicular á aquél. La ecuación de cada una de las rectas que constituyen el haz que tiene por vértice el punto q' (cuyas coordenadas son $x' = q'$, $y' = o$), puede ponerse bajo la forma general

$$y' = \varkappa' (x' - q'), \qquad (1)$$

siendo $\varkappa'$ el coeficiente angular de cada recta. Análogamente, las rectas del haz contrario, de vértice p'', tendrán una ecuación general de la forma

$$y'' = \pi'' (x'' - p''). \qquad (2)$$

Estos dos haces contrarios q' y p'' son proyectivos, y esta relación se expresa por una ecuación bilineal entre los coeficientes angulares de cada par de rayos homólogos, ecuación que será de la forma

$$\varkappa'\pi'' + m\varkappa' + n\pi'' + l = o;$$

pero observando que al rayo $p'q'$ del haz q' corresponde el $p''q''$ del p'', vemos que para $\varkappa' = o$, $\pi'' = o$, lo que introduce en esta ecuación la condición $l = o$, y la transforma, por tanto, en

$$\varkappa'\pi'' + m\varkappa' + n\pi'' = o. \qquad (3)$$

Para hallar la relación que enlaza las coordenadas de los pares de puntos homólogos de los planos S' y S'', basta eliminar $\varkappa'$ y π'' entre las tres ecuaciones (1), (2) y (3). Así, obtenemos la ecuación buscada

$$y' y'' + my' (x'' - p'') + ny'' (x' - q') = o \qquad (4).$$

Esta es, para un par de valores x' é y', como coordenadas de un punto del plano S', la ecuación en x'' é y'', de su recta homóloga en el sistema S''.

Vamos ahora á buscar las coordenadas del punto N'' de una recta

$$a_2 x'' + b_2 y'' = c_2 \qquad (5)$$

que sea conjugado con un punto, también dado M', del otro plano. Basta hallar el punto de intersección de la recta dada con la homóloga del punto M' y, para ello, despejar x'' é y'' de las ecuaciones (5) y (4). Ordenando la (4) con relación á x'' é y'', resulta

$$my' x'' + (y' + n(x' - q'))\, y'' = mp'' y',$$

y de ésta y la (5) se deducen los siguientes valores:

$$x'' = \frac{b_2 mp'' y' - c_2 n(x' - q') - c_2 y'}{(b_2 m - a_2) y' - a_2 n(x' - q')},$$

$$y'' = \frac{(a_2 p'' - c_2) my'}{(b_2 m - a_2) y' - a_2 n(x' - q')},$$

que son las coordenadas del punto buscado N''.

Finalmente, vamos á demostrar que la relación establecida por las ecuaciones anteriores es trilineal, es decir, que á los pares de puntos conjugados de dos rectas de los planos S' y S'' corresponden en el tercer plano S, puntos que están también sobre una recta. Sean

$$a_1 x' + b_1 y' = c_1 \qquad (6)$$

y

$$a_2 x'' + b_2 y'' = c_2 \qquad (5)$$

las ecuaciones de las dos rectas dadas: entre las coordenadas de cada par de puntos conjugados situados uno en cada una de ellas, ha de existir la relación (4).

Además, cada par de puntos, uno de la recta buscada y otro de una de las dadas, se hallan ligados por otras dos ecuaciones análogas á ésta:

$$yy' + m_2 y(x' - p') + n_2 y'(x - q) = o \qquad (7)$$

é

$$yy'' + m_1 y''(x - p) + n_1 y(x'' - q'') = o \qquad (8)$$

que representan, respectivamente, las relaciones entre las coordenadas de los puntos del plano S y los que les corresponden en los S' y S''. Tenemos, pues, cinco ecuaciones (6), (5), (4), (7) y (8) entre las seis coordenadas de los puntos de los tres planos: y, como buscamos una relación entre x é y, despejaremos x' é y' de las (6) y (7), y x'' é y'' de las (5) y (8), todas ellas de primer grado en estas variables, y substituyendo los valores así obtenidos en la (4), tendremos una ecuación de segundo grado, descomponible en dos de primero, que es la del lugar geométrico buscado. De las (6) y (7)

$$a_1 x' + b_1 y' = c_1$$

$$m_2 y x' + (y + n_2(x - q))\, y' = m_2 p' y,$$

sacamos

$$x' = \frac{(b_1 m_2 p' - c_1)\, y - c_1 n_2 (x - q)}{(b_1 m_2 - a_1)\, y - a_1 n_2 (x - q)},$$

$$y' = \frac{(c_1 - a_1 p')\, m_2 y}{(b_1 m_2 - a_1)\, y - a_1 n_2 (x - q)}.$$

Análogamente, las (5) y (8) nos dan

$$x'' = \frac{(b_2 n_1 q'' - c_2)\, y - c_2 m_1 (x - p)}{(b_2 n_1 - a_2)\, y - a_2 m_1 (x - p)};$$

$$y'' = \frac{(c_2 - a_2 q'')\, n_1 y}{(b_2 n_1 - a_2) y - a_2 m_1 (x - p)}.$$

Substituyendo estos valores en la (4) y designando, para abreviar, por φ y ψ, los denominadores comunes de x' é y' y de x'' é y'', resulta:

$$\begin{array}{r|l|l} (c_1-a_1p')m_2(c_2-a_2q'')n_1 & y^2-m(c_1-a_1p')m_2[c_2m_1(x-p)+p''\psi] & y=o \\ +m(c_1-a_1p')m_2(b_2n_1q''-c_2) & -n(c_2-a_2q'')n_1[c_1n_2(x-q)+q'\varphi] & \\ +n(c_2-a_2q'')n_1(b_1m_2p'-c_1) & & \end{array}$$

que se descompone en las ecuaciones de dos rectas, una de las cuales es el eje singular $y=o$, y la otra tiene la ecuación de la forma $Ay+B=o$, y es la recta buscada. Vemos que la línea de segundo grado se ha descompuesto en dos rectas: una que es el eje singular, como rayo que se corresponde doblemente, como perteneciente á los haces p y q, y otra que es el eje perspectivo de estos dos haces; así como las dos rectas dadas, cuyas ecuaciones son las (6) y (5), lo eran de cada par de haces situados en los planos S' y S''.

Queda, pues, demostrado que las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} y'y''+m\,y'(x''-p'')+n\,y''(x'-q')=o \\ y''y+m_1y''(x-p)+n_1y\,(x''-q'')=o \\ y\,y'+m_2y\,(x'-p')+n_2y'\,(x-q)=o \end{array}\right\} \quad (9)$$

relacionan trivalente y trilinealmente los puntos de los tres planos, es decir, que dados dos puntos M' y N'', cuyas coordenadas (α'_1, β'_1), (α''_1, β''_1) satisfacen á la primera ecuación, podemos hallar las coordenadas del punto L del tercer plano, homólogo con aquellos, por las ecuaciones segunda y tercera. Para esto es preciso, sin embargo, conocer en cada caso particular los valores que toman los coeficientes m, n, m_1, n_1, m_2, y n_2 de estas ecuaciones, es decir, definir la relación proyectiva entre cada par de haces contrarios.

Dos procedimientos idénticos en el fondo pueden seguirse

para esto. Consiste el primero en dar, por sus coeficientes angulares, dos pares de rayos homólogos, distintos de los ejes singulares, en cada par de haces de vértices contrarios, puesto que estos ejes son homólogos, condición que ya tuvimos en cuenta al escribir la ecuación de la proyectividad (3), en la cual habrá que substituir cada par de homólogos de aquellos coeficientes angulares, obteniéndose así dos ecuaciones que nos darán los valores de los coeficientes m y n de dicha ecuación (3). El otro método consiste en tomar dos ternos de puntos homólogos, substituir sus coordenadas en las ecuaciones correspondientes del sistema (9) y sacar de aquí los valores buscados.

Vamos á emplear este último procedimiento, porque presenta gran ventaja para las aplicaciones á la *Fototopografía*.

Sean las coordenadas de los puntos de los dos ternos $(\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1)$, $(\alpha', \beta', \alpha'_1, \beta'_1)$, $(\alpha'', \beta'', \alpha''_1, \beta''_1)$. Si tomamos como orígenes los puntos q, p' y q'', serán $q = p' = q'' = o$; y las ecuaciones (9) se convertirán en

$$\left.\begin{array}{l} y'y'' + my'(x'' - p'') + ny''(x' - q') = o \\ y''y + m_1 y''(x - p) + n_1 yx'' = o \\ yy' + m_2 yx' + n_2 y'x = o \end{array}\right\} (10).$$

La primera ecuación nos dará

$$\left.\begin{array}{l} \beta'\beta'' + m\beta'(\alpha'' - p'') + n\beta''(\alpha' - q') = o \\ \beta'_1\beta''_1 + m\beta'_1(\alpha''_1 - p'') + n\beta''_1(\alpha'_1 - q') = o \end{array}\right\}$$

$$m = \frac{\begin{vmatrix} -\beta'\beta'' & \beta''(\alpha' - q') \\ -\beta'_1\beta''_1 & \beta''_1(\alpha'_1 - q') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta'(\alpha'' - p'') & \beta''(\alpha' - q') \\ \beta'_1(\alpha''_1 - p'') & \beta''_1(\alpha'_1 - q') \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{-\beta'\beta''\beta''_1(\alpha'_1 - q') + \beta'_1\beta''\beta''_1(\alpha' - q')}{\beta'\beta''_1(\alpha'_1 - q')(\alpha'' - p'') - \beta'_1\beta''(\alpha' - q')(\alpha''_1 - p'')}$$

$$n = \frac{\begin{vmatrix} \beta'(\alpha''-p'') & -\beta'\beta'' \\ \beta'_1(\alpha''_1-p'') & -\beta'_1\beta''_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta'(\alpha''-p'') & \beta''(\alpha'-q') \\ \beta'_1(\alpha''_1-p'') & \beta''_1(\alpha'_1-q') \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{-\beta'\beta'_1\beta''_1(\alpha''-p'')+\beta'\beta'_1\beta''(\alpha''_1-p'')}{\beta'\beta''_1(\alpha'_1-q')(\alpha''-p'')-\beta'_1\beta''(\alpha'-q')(\alpha''_1-p'')}$$

y análogamente deducimos de la segunda

$$\left.\begin{aligned} \beta\beta'' + m_1\beta''(\alpha-p) + n_1\beta\alpha'' &= o \\ \beta_1\beta''_1 + m_1\beta''_1(\alpha_1-p) + n_1\beta_1\alpha''_1 &= o \end{aligned}\right\}$$

$$m_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\beta\beta'' & \beta\alpha'' \\ -\beta_1\beta''_1 & \beta_1\alpha''_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta''(\alpha-p) & \beta\alpha'' \\ \beta''_1(\alpha_1-p) & \beta_1\alpha''_1 \end{vmatrix}} = \frac{-\beta\beta_1\beta''\alpha''_1+\beta\beta_1\beta''_1\alpha''}{\beta_1\beta''\alpha''_1(\alpha-p)-\beta\beta''_1\alpha''(\alpha_1-p)}$$

$$n_1 = \frac{\begin{vmatrix} \beta''(\alpha-p) & -\beta\beta'' \\ \beta''_1(\alpha_1-p) & -\beta_1\beta''_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta''(\alpha-p) & \beta\alpha'' \\ \beta''_1(\alpha_1-p) & \beta_1\alpha''_1 \end{vmatrix}} = \frac{-\beta_1\beta''\beta''_1(\alpha-p)+\beta\beta''\beta''_1(\alpha_1-p)}{\beta_1\beta''\alpha''_1(\alpha-p)-\beta\beta''_1\alpha''(\alpha_1-p)}$$

y de la tercera

$$\left.\begin{aligned} \beta\beta' + m_2\beta\alpha' + n_2\beta'\alpha &= o \\ \beta_1\beta'_1 + m_2\beta_1\alpha'_1 + n_2\beta'_1\alpha_1 &= o \end{aligned}\right\}$$

$$m_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\beta\beta' & \beta'\alpha \\ -\beta_1\beta'_1 & \beta'_1\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta\alpha' & \beta'\alpha \\ \beta_1\alpha'_1 & \beta'_1\alpha_1 \end{vmatrix}} = \frac{-\beta\beta'\beta'_1\alpha_1+\beta'\beta_1\beta'_1\alpha}{\beta\beta'_1\alpha_1\alpha'-\beta'\beta_1\alpha\alpha'_1}$$

$$n_2 = \frac{\begin{vmatrix} \beta\alpha' & -\beta\beta' \\ \beta_1\alpha'_1 & -\beta_1\beta'_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta\alpha' & \beta'\alpha \\ \beta_1\alpha'_1 & \beta'_1\alpha_1 \end{vmatrix}} = \frac{-\beta\beta_1\beta'_1\alpha'+\beta\beta'\beta_1\alpha'_1}{\beta\beta'_1\alpha_1\alpha'-\beta'\beta_1\alpha\alpha'_1}.$$

Tenemos así determinados los coeficientes de las ecuaciones (9) en función de las coordenadas de dos ternos de puntos conocidos, que podemos medir en el plano respectivo, y de la distancia entre los dos puntos principales de cada plano, que es también conocida.

Si tomamos en los haces p y q' dos rectas cualesquiera, á ellas corresponden en el plano S'' dos rectas perfectamente determinadas y, por lo tanto, un punto, el de intersección de éstas. Luego los valores de x'' é y'' han de ser funciones uniformes de los coeficientes angulares de los rayos dados. Estos coeficientes, por haber tomado los orígenes en q y p', respectivamente, tienen los valores $\frac{y}{x-p}$ é $\frac{y'}{x'-q'}$ y son los que en las ecuaciones de la proyectividad designamos por π y $\varkappa'$. Las ecuaciones primera y segunda del sistema (10), ordenadas respecto á x'' é y'', son:

$$\left.\begin{array}{l} my'x''+(y'+n(x'-q'))\,y''-mp''y'=o \\ n_1yx''+(y+m_1(x-p))\,y'' \qquad\qquad\qquad =o \end{array}\right\}$$

y de ellas se deduce

$$x''=\frac{\begin{vmatrix} mp''y' & y'+n\ (x'-q') \\ o & y+m_1(x-p) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} my' & y'+n\ (x'-q') \\ n_1y & y+m_1(x-p) \end{vmatrix}} \qquad y''=\frac{\begin{vmatrix} my' & mp''y' \\ n_1y & o \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} my' & y'+n\ (x'-q') \\ n_1y & y+m_1(x-p) \end{vmatrix}}$$

y dividiendo las primeras filas de estos cuatro determinantes por $(x'-q')$ y las segundas por $(x-p)$, obtenemos, finalmente,

$$x''=\frac{\begin{vmatrix} mp''\left(\frac{y'}{x'-q'}\right) & \left(\frac{y'}{x'-q'}\right)+n \\ o & \left(\frac{y}{x-p}\right)+m_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m\left(\frac{y'}{x'-q'}\right) & \left(\frac{y'}{x'-q'}\right)+n \\ n_1\left(\frac{y}{x-p}\right) & \left(\frac{y}{x-p}\right)+m_1 \end{vmatrix}}=\frac{a\pi x'+cx'}{a_1\pi x'+b\pi+c_1x'},$$

$$y''=\frac{\begin{vmatrix} m\left(\frac{y'}{x'-q'}\right) & mp''\left(\frac{y'}{x'-q'}\right) \\ n_1\left(\frac{y}{x-p}\right) & o \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m\left(\frac{y'}{x'-q'}\right) & \left(\frac{y'}{x'-q'}\right)+n \\ n_1\left(\frac{y}{x-p}\right) & \left(\frac{y}{x-p}\right)+m_1 \end{vmatrix}}=\frac{d\pi x'}{d_1\pi x'+e\pi+fx'},$$

como queríamos demostrar.

Pasemos ahora á estudiar, de los casos particulares de la Primera Parte, aquellos en que por ocupar alguno de los puntos principales posiciones especiales, las fórmulas anteriores presentan alguna variación (*).

2 Los centros O y O' son puntos impropios y lo son, por tanto, los puntos principales p y q': tenemos $p=q'=\infty$

$$m=\frac{\beta'\beta''\beta''_1-\beta'_1\beta''\beta''_1}{-\beta'\beta''_1(\alpha'_1-q')+\beta'_1\beta''(\alpha'-q')}=\mu,$$

$$n=o,\ nq'=\frac{-\beta'\beta'_1\beta''_1(\alpha''-p'')+\beta'\beta'_1\beta''(\alpha''_1-p'')}{\beta'\beta''_1\alpha'_1(\alpha''-p'')-\beta'_1\beta''\alpha'(\alpha''_1-p'')}=-\nu$$

$$m_1=o,\ m_1p=\frac{-\beta\beta_1\beta''\alpha''_1+\beta\beta_1\beta''_1\alpha''}{\beta_1\beta''\alpha''_1-\beta\beta''_1\alpha'}=-\mu_1,$$

(*) Los números de orden corresponden á los de la Primera Parte.

$$n_1 = \frac{\beta_1\beta''\beta''_1 - \beta\beta''\beta''_1}{-\beta_1\beta''\alpha''_1 - \beta\beta''_1\alpha''} = \nu_1,\ m_2 = m_2,\ n_2 = n_2$$

$$\left.\begin{array}{l} y'y'' + \mu y'(x'' - p'') + \nu y'' = o \\ y''y + \mu_1 y'' + \nu_1 y x'' = o \\ yy' + m_2 y x' + n_2 y' x = o \end{array}\right\}$$

3. Los tres centros son puntos impropios.

Todos los puntos principales son del infinito, y los tres ejes singulares pq, $p'q'$ y $p''q''$ son igualmente rectas impropias, no pudiéndose, por tanto, tomar como ejes de abscisas, ni aplicar á este caso las fórmulas generales.

7. Los centros O y O' se hallan, respectivamente, sobre los planos S' y S. Los vértices p y q se confunden y también los p' y q': es decir, que $p = q$, $p' = q'$, y como $q = p' = o$, también $q' = p = o$. Los valores de los coeficientes son:

$$m = \frac{-\beta'\beta''\beta''_1\alpha'_1 + \beta'_1\beta''\beta''_1\alpha'}{\beta'\beta''_1\alpha'_1(\alpha'' - p'') - \beta'_1\beta''\alpha'(\alpha''_1 - p'')} = \mu,$$

$$n = \frac{-\beta'\beta'_1\beta''_1(\alpha'' - p'') + \beta'\beta'_1\beta''(\alpha''_1 - p'')}{\beta'\beta''_1\alpha'_1(\alpha'' - p'') - \beta'_1\beta''\alpha'(\alpha''_1 - p'')} = \nu,$$

$$m_1 = \frac{-\beta\beta_1\beta''\alpha''_1 + \beta\beta_1\beta''_1\alpha''}{\beta_1\beta''\alpha''_1\alpha - \beta\beta''_1\alpha''\alpha_1} = \mu_1,$$

$$n_1 = \frac{-\beta_1\beta''\beta''_1\alpha + \beta\beta''\beta''_1\alpha_1}{\beta_1\beta''\alpha''_1\alpha - \beta\beta''_1\alpha''\alpha_1} = \nu_1,\ m_2 = m_2,\ n_2 = n_2,$$

y las ecuaciones (10) se reducen á las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y'y'' + \mu y'(x'' - p'') + \nu y''x' = o \\ y''y + \mu_1 y''x + \nu_1 y x'' = o \\ yy' + m_2 y x' + n_2 y' x = o \end{array}\right\}$$

(Continuará.)

PUBLICACIONES RECIBIDAS DESDE 1.° DE JULIO DE 1907

(Continuación.)

Odhner (Nils).—Nosthern aud Arctic.—Invertebrates in the Collection of the Swedish State Museum (Riksmuseum).—III. Opisthobranchia and Pteropoda.—By...—Kungl. Svenska Vetenskapsakademiens.—Handlingar.—Band 45, N° 4.—Upsala and Stochkolm...

Nordenskiöld (Erland).—Archeologiska Undersokningar.—Perus och Bolivias.—Gränstrakter, 1904-1905.—Af. . Kungl. Svenska Vetenskapsakademiens.—Handligar. - Band 42, N° 2.—Upsala & Stockholm ..

Gelder (G. de).—De Berekening, de Bouw en het Bedryf Van het Kabelnet der Gemeente Amsterdam.—Batavia, 1907.

Van Iterson, Jun (G.).—Mathematische uud Mikroskopisch Anatomische Studien über Blattstellungen nebst betrachtungen über den Schalenban der Miliolinen.—Von... In Delft.—Gustavo Fischer in Jena.

Royal Society of London.—Philosophical Transactions of the...—Series A, vol. 207, pp. 203-306. A. 419.—London, 1907.

Royal Astronomical Society.—Monthly Notices of the...—Vol. LXVII. N° 8.—June, 1907.—London.

Geological Society.—The Quarterly Journal of the...—Vol. LXIII, Part. 3. August 14 th, 1907. N° 251.—London.

Zoological Society of London.—Transactions of the...—Vol. XVII, Part. 6. Vol. XVIII, Part. 1.—London, Oct. 1906.—London, August, 1907.

Zoological Society of London.—Proceedings of the general meetings for scientific business of the...—1906, Pages 759-1052, April, 1907.—1007 Pages 1-746, June-Octobre, 1907.—London.

Royal Geograplical Society (The).—The Geograplical Journal. - London.

Home office.—Mines ad Quarries.—General Report and Statistics for 1905 Part IV.—Colonial and foreign Statistics.—1906. Part II. Labour. 1906. Part III. Output.—London, 1907.

Edinburgh Mathematical Society.—Procedigs of the...—Vol. XXV. Sesion 1906-1907.—Edinburgh.

Royal Society of Edinburgh.—Proceedings of the...—Sesion 1906-7.—Vol. XXVII.—N° III, N° IV (pp. 161-368).—Edinburgh, 1907.

Edinburgh Geological Society. - Transactions of the...—Vol. IX.—Par. 1.—Edinburgh, 1907.

Royal Physical Society.—Proceedings of the...—N° 3. Vol XVII. Pages 81 to 120.—Edinburgh, August, 1907.

(Continuará)

XIX.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

SEGUNDA PARTE

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Curso de 1907-1908.

Conferencia primera.

SEÑORES:

Explicábamos en los cursos anteriores, que nuestro objeto, en estas conferencias, era presentar un resumen de la Física matemática bajo su doble aspecto de ciencia clásica, según se formó y se desarrolló espléndidamente en una serie de trabajos admirables durante todo el siglo XIX; ó como ciencia nueva en estado de transformación, pero sin haber alcanzado todavía un estado definitivo y completo, que permita oponerla á la Física matemática tradicional de Poisson, de Cauchy, de Ampere y de tantos otros matemáticos como ilustran la pasada centuria.

Indicamos también nuestro propósito de llevar, en lo posible, á la par este doble trabajo, consagrando la primera parte de cada curso, y la mayor, á la Física matemática clásica, y dedicando la última parte á las nuevas teorías y á los nuevos puntos de vista, que pudiéramos decir que forman la Física matemática moderna.

Esto hicimos en el curso anterior; esto esperamos hacer en éste.

***

Pero la Física matemática clásica comprendía, y comprende, porque continúa dominando, multitud de ciencias parciales, ó, si se quiere, de ramas de una misma ciencia, que á su tiempo enumeramos, y que eran: la teoría de la Elasticidad, la teoría de la Luz, la del Sonido, la teoría de la Capilaridad, la Electricidad estática, la Electricidad dinámica, el Magnetismo, el calor y la Termodinámica, para no citar sino las principales.

Y escogimos, ante todo, la teoría de la Elasticidad, por razones que en una de las últimas conferencias del curso precedente expusimos con toda la amplitud posible.

Considerábamos, que la teoría de la Elasticidad era fundamental en Física matemática; por ejemplo: la teoría de la Luz se consideraba como la teoría elástica del Eter, y así, al final del curso anterior, la presentábamos á modo de ejercicio de las fórmulas generales de la Elasticidad.

Así la consideró Lamé en su obra clásica, y así la consideró Cauchy en sus prodigiosos trabajos.

De este modo se ha considerado siempre, hasta que la teoría electromagnética ha venido á disputar este privilegio á la teoría elástica del Eter.

Otro tanto podemos decir de la Acústica, que es una aplicación de la teoría de la Elasticidad.

En rigor, si la Termodinámica no se ha considerado en la Física matemática clásica como aplicación inmediata de dicha teoría de la Elasticidad, entre ambas existe una relación íntima, como hace notar Mr. Poincaré, y como veremos en otro curso.

Más aún, las teorías eléctricas de Maxwell puede decirse que son teorías de sistemas elásticos, siquiera sea una elasticidad de nueva especie la del éter, en la gran obra del eminente físico escocés.

Todo esto lo expusimos, todavía con más desarrollo, en las últimas conferencias del segundo curso, y á lo dicho entonces nos referimos, para justificar esta elección preferente que

hemos hecho, de dicha teoría elástica, en nuestras conferencias.

***

Pero la teoría de la Elasticidad puede exponerse, según dice el eminente matemático Poincaré, de muchas maneras, por muchos métodos y partiendo de diversas hipótesis, que podrán tener un fondo común, pero que, en rigor, son distintas, lo bastante para dar lugar á teorías diversas.

La teoria clásica de la Elasticidad puede explicarse, según indicábamos en otra ocasión:

1.° Por el método de Cauchy.

2.° Por el método de Navier, Poisson, Lamé y otros sabios.

3.° Por el método de Poincaré, que es en cierto modo una inclinación á la Física matemática moderna, y cierta ruptura con la Física matemática clásica de las fuerzas centrales.

4.° En rigor, también se ha procurado explicar la teoría de la Elasticidad por la Termodinámica.

Nosotros, en el curso precedente, y en su primera parte, expusimos el primero de estos cuatro métodos, es decir, expusimos la teoría de la Elasticidad y llegamos á sus fórmulas fundamentales, partiendo de la hipótesis de Cauchy.

Después aplicamos estas fórmulas á diversos ejemplos, con lo cual puede decirse, que el tomo que hemos publicado con las conferencias del curso de 1906 á 1907 constituye un tratado elemental de la teoría de la Elasticidad, según el método de Cauchy.

En este curso, continuando el desarrollo de nuestro programa, explicaremos la teoría de la Elasticidad, como acabamos de indicar, por los métodos de Navier, Poisson, Lamé, Clebsch y otros.

Métodos que, á decir verdad, no son absolutamente idén-

ticos, pero que tienen un fondo común, que explicaremos más adelante, como en oposición al método de Cauchy.

Por eso, la primera sección de este curso, pudiera titularse: Teoría de la Elasticidad; segunda parte.

O aún mejor: Teoría de la Elasticidad, según Lamé y su escuela.

***

Para explicar el espíritu de estos últimos metódos, es conveniente compararlos con el método de Cauchy, que expusimos, con la posible extension, en el último curso académico.

Y aun no está demás, que recordemos cuál es el espíritu de la Física matemática, expuesto y desarrollado con muchos ejemplos en el primer año que explicamos esta asignatura.

La Física, decíamos, parte, como toda ciencia positiva, de la experiencia, de los hechos, de la realidad.

En cada fenómeno busca las magnitudes, que definen y determinan el fenómeno en sí; y las relaciones analíticas, por medio de ecuaciones, entre estas magnitudes, se designan, quizá con excesivo atrevimiento, pero sin atrevimientos tales no hay ciencia, con el nombre de *leyes de la Naturaleza.*

Acaso recuerden mis oyentes, y si no lo fueron de aquellas conferencias pueden verlo en el primero de los dos tomos publicados, que presentábamos en aquella ocasión, como ejemplo típico, el de la teoría de los Gases. Los diversos estados de una masa gaseosa, los accidentes de este fenómeno, por decirlo de esta manera, dependen de tres magnitudes ó parámetros: la presión, p; el volumen, v; la temperatura absoluta, T. Y la ley del fenómeno será una función que enlace estas tres magnitudes, por ejemplo:

$$F(p, v, T) = 0,$$

mediante la cual, los valores de dos de dichas variables determinarán el de la tercera.

Pero estas funciones, que enlazan las magnitudes físicas en cada fenómeno, pueden obtenerse de dos modos.

1.° Por los métodos experimentales de la Física, interrogando á la Naturaleza en el laboratorio ó en el gabinete, y construyendo empíricamente la función F, y sus análogas en todos los demás fenómemos de la Física, y aun nos atreveríamos á decir, de la Naturaleza.

2.° Por el procedimiento constante, uniforme, atrevido y fecundo al mismo tiempo, de la Física matemática clásica, que empieza siempre por establecer *una hipótesis* (ó varias), y que á esta hipótesis aplica luego el cálculo matemático.

En rigor, en la historia de la Ciencia, las cosas no se presentan en forma tan sencilla, porque uno y otro procedimiento, la teoría y la práctica, como antes se decía, la hipótesis y la experimentación, como ahora se dice, muchas veces marchan á la par; pero nosotros, como hemos indicado, para la mejor inteligencia de nuestros oyentes, ó de nuestros lectores, presentamos los métodos puros, exclusivos y con sus caracteres propios; y siendo esto así, lo que dijimos antes, es rigorosamente exacto: la Física experimental debe prescindir de toda hipótesis, y sólo á los hechos y á su medida debe atenerse para deducir las leyes de la Física.

En cambio, la Física matemática prescinde de la experiencia, ó sólo la emplea para la comprobación de los resultados.

Se considera, en cierto modo, superior á la experiencia misma, como método eminentemente racional, y al cálculo matemático pretende someter la variedad de los fenómenos mediante una ó varias hipótesis: es un esfuerzo de la *razón* para imponerse al *empirismo*.

***

Pero ¿cuáles son estas hipótesis?

Varían según los casos, los fenómenos y las circunstancias de estos fenómenos.

Alguna vez tendremos ocasión de insistir sobre este punto; por hoy nos limitaremos á repetir lo que ya hemos expuesto en los años anteriores: entre todas las hipótesis de la Física matemática clásica, la más natural, la más fecunda, la que dió siempre resultados más brillantes, la que mejor recogía los hechos de la Naturaleza para fundirlos en una unidad superior, la que constituye la gloria de la Física matemática del siglo XIX, era la que se designa con el nombre de *Hipótesis mecánica.*

Mediante esta hipótesis, todo fenómeno de la Naturaleza se consideraba como un problema de Mecánica; en la Naturaleza, se decía, no hay más que materia y movimiento, ó según otros, materia, fuerza y movimiento, y, por lo tanto, todos los fenómenos del mundo inorgánico estarán comprendidos en las fórmulas generales de la Dinámica, y como caso particular, en las fórmulas de la Estática.

Ahora bien, como por entonces se consideraba que la casi totalidad de la Mecánica se componía de elementos racionales, es decir, *à priori,* sujetos á las leyes matemáticas, de aquí las ambiciones y las arrogancias de la Ciencia, pretendiendo encerrar todas las leyes del Universo material en las fórmulas lógicas de la razón.

Si la *hipótesis* era exacta, al estudiar los fenómenos de la Naturaleza, no había que acudir á los hechos; una nueva Metafísica, eminentemente matemática, reconstruía el Cosmos en el cerebro humano.

Y la empresa era grandiosa, era sublime, y sin escrúpulo puede emplearse esta palabra.

Y marquemos concretamente este encadenamiento de ideas.

Consideremos un fenómeno material cualquiera, que para abreviar la explicación, llamaremos A.

Establezcamos una *hipótesis mecánica*, es decir, supongamos que ese fenómeno, sean cuales fueren sus apariencias, ya se presente como luz, ya como calórico, ya como electricidad ó magnetismo, ó bien como fenómeno químico; supongamos, repetimos, que no es más que un conjunto de masas grandes ó pequeñas, en número finito ó en número enorme, moviéndose con determinadas velocidades bajo la acción de determinadas fuerzas. A esta hipótesis, para abreviar la explicación, llamémosla *M*.

Pues aplicando al fenómeno *A* la hipótesis *M*, es decir, al fenómeno dado, la hipótesis mecánica, el fenómeno *A* se reduce á un problema de Dinámica.

Pero, las fórmulas de la Dinámica, *hemos admitido* (hoy no se admite), que son eminentemente racionales, resultados simbólicos de la aplicación de la Lógica.

Luego el fenómeno *A* ya está encerrado en dichas fórmulas, que expresan las leyes de la cantidad y del orden combinatorio.

Luego el fenómeno *A*, repetimos, con todos sus accidentes y apariencias, no depende más que de las leyes racionales de la cantidad y del orden combinario; y así, la razón humana, no sólo abarca en sí la variedad infinita de los hechos, que en este caso hemos designado por *A*, sino que les presta su unidad y les impone sus leyes.

En suma, las leyes del Universo están escritas en la razón con certidumbre matemática y en fórmulas matemáticas; la experiencia sólo sirve, en este caso, para dos cosas:

1.° Para comprobar los resultados.

2.° Para determinar las constantes de las fórmulas matemáticas, que expresan cada ley natural.

Y aún los sabios se esforzaban por reducir *todas estas constantes* de la Física, á *una sola*, con lo cual todo brotaba de la razón, salvo esta *constante única*, que había que pedir á la experiencia.

La empresa era soberana; la verdadera Ciencia, dígase lo

que se quiera, siempre tenderá á este *ideal;* entregarla á la muchedumbre de los hechos, es convertir á la Ciencia en inventario infinito, que podrá servir para una monstruosa almoneda del Cosmos; pero no más.

Cien veces será vencido el idealismo por los brutales choques de la realidad, y cien veces se levantará con nuevos alientos, aun arrostrando nuevos desengaños.

***

Pero á lo que acabamos de decir, que es repetir en otra forma lo que ya hemos dicho muchas veces, la crítica moderna opone graves censuras.

Se admite el espíritu de la Física matemática, tal como lo acabamos de explicar; pero negándole todo carácter absoluto.

Es un procedimiento para llegar á la verdad; procedimiento más ó menos brillante, pero sujeto á grandes errores y á un trabajo eterno de tejer y destejer, de subir la roca y de verla despeñarse, como Sísifo la veía rodar una y otra vez.

La Hipótesis mecánica, que en todo el siglo XIX dominaba, hoy ha perdido gran parte de su prestigio, y en esto debo declarar que no estoy conforme con la mayor parte de los críticos.

Que la hipótesis mecánica no sea más que una hipótesis, es evidente; pero la Historia dice que ha sido la hipótesis más fecunda, y el sentido común afirma, que es la hipótesis más natural y la que mejor armoniza con la naturaleza de las cosas y de los fenómenos.

Las demás hipótesis, podrán ser más ó menos ingeniosas, más ó menos útiles, pero son infinitamente más artificiosas, como demostraremos siempre que llegue el caso, que la Hipótesis mecánica.

Y apelamos antes al sentido común, porque, en efecto, el

que prescindiendo de teorías mira al Universo, lo que ve son masas, movimientos, y á las causas de estos fenómenos les da el nombre de fuerzas.

Todo esto podrá ser vago; pero el sentido común en estas vaguedades se funda, porque entre ellas y de ellas está recibiendo constantemente influencias invencibles. Y esto es algo, siquiera no sea decisivo.

Digo, pues, que la Hipótesis mecánica me parece la más natural; y digo más, la substitución de esta hipótesis por otra cualquiera, la considero como una deficiencia ó como un retroceso, y cuando llegue el caso procuraré demostrarlo.

Bien sé que, para rebajar la importancia de la Hipótesis mecánica, se acude á un célebre teorema de Mr. Poincaré, del cual dimos cuenta en las conferencias del primer curso.

El teorema del eminente sabio dice así:

Si un fenómeno cualquiera de la Física se explica por una hipótesis mecánica, por otras infinitas hipótesis mecánicas, podrá explicarse también; y como los fenómenos no pueden tener más que una explicación verdadera, es imposible admitir que tengan infinitas explicaciones, con lo cual todas quedan en duda.

Esto tiene mucha importancia, no lo desconocemos; pero tiene importancia para negar á las hipótesis de la Física matemática su valor absoluto: nada más.

No; una hipótesis mecánica, no puede aventurarse que sea la explicación absoluta de un fenómeno, y esto lo hemos reconocido cien veces. Pero aun así y todo, podrá ser un símbolo grandemente fecundo, y por de contado unas hipótesis serán inadmisibles por ser incompatibles con la realidad; otras serán todas aceptables, pero entre ellas habrá una que, al menos por su sencillez, sea preferible á las restantes.

Esto sin contar con que probablemente las hipótesis estarán enlazadas entre sí, y aun estarán sujetas á una evolu-

ción, como la de los seres vivos; idea que ya hemos apuntado otra vez, y sobre la cual, quizá volvamos en otra ocasión.

***

Las hipótesis mecánicas, según acabamos de decir, pueden ser varias; mejor dicho, pueden ser infinitas; pero pueden reunirse en dos grandes grupos.

Como en toda hipótesis mecánica hay que admitir masas, porque con masas, velocidades y fuerzas han de explicarse los fenómenos ó se pretende explicarlos, estas masas pueden tener dos disposiciones distintas:

1.° Pueden ser discontinuas.

2.° Pueden constituir un todo continuo.

De aquí resulta que las hipótesis mecánicas pueden partir de estas dos disposiciones de la materia: ó la materia discontinua reunida en grupos, centros ó puntos materiales, ó la materia continua.

Y en uno y en otro caso, á los sistemas discretos ó á los sistemas continuos, habrá que aplicar los teoremas de la Dinámica.

Cabe otra tercera hipótesis, que es, la de las masas discontinuas que se suponen reemplazadas por masas continuas, como se ha hecho en varios problemas, á fin de substituir en los cálculos las sumas por las integrales, según explicábamos en el curso anterior.

Pero las dos hipótesis fundamentales son las que acabamos de indicar: la masa discontinua, ó la masa continua.

Y apliquemos todas estas ideas, que son la reproducción condensada de las ya expuestas en los cursos precedentes, al problema de la Elasticidad.

***

Explicamos la teoría de la Elasticidad según el método de Cauchy, y era bien sencillo: admirable en su sencillez.

Condensémoslo en breves frases, para marcar sus diferencias con el método de Lamé y los métodos análogos.

Cauchy supone que los sistemas están formados de puntos ó masas infinitamente pequeñas por relación á las distancias que entre ellos median. Entre estos puntos del sistema existen fuerzas internas, que son funciones de las distancias. Se supone además que el sistema sufre la acción de fuerzas exteriores, y que el problema se reduce á determinar las coordenadas de los desplazamientos de cada punto en función de las coordenadas iniciales y del tiempo.

Este es el problema general de la Elasticidad; mejor dicho, es el problema general de un sistema de puntos aislados: es el problema de la Astronomía, transportado á la Física molecular. Los astros son puntos; la atracción newtoniana es, en este caso, la atracción molecular, función de la distancia y proporcional al producto de cada dos masas; y las ecuaciones son las generales de la Dinámica: tres para cada masa. Resolver el problema es integrar este sistema de ecuaciones.

Desde el punto de vista de la Lógica matemática, nada más elemental.

Cauchy redujo la Hipótesis mecánica á su expresión más sencilla y más pura, si así puede decirse.

Claro es que esta hipótesis supone:

1.° Discontinuidad en la distribución de las masas.

2.° Supone asimismo, como en la Astronomía, la *acción á distancia*, ó que, por lo menos, las cosas pasan como si la acción á distancia fuese real.

3.° Que las fuerzas son *centrales*, es decir, que van de masa á masa.

Después de plantear el problema con esta generalidad, se introduce una nueva hipótesis, que es, por decirlo de este modo, *hipótesis de simplificación*, á saber: que sobre cada

punto sólo ejercen acción sensible los que están á pequeña distancia de él, dentro de la esfera de acción molecular. De las influencias del resto del sistema puede prescindirse al establecer las ecuaciones para cada punto.

Con sujeción á estas ideas desarrollamos el método de Cauchy en el curso anterior, y puede decirse que todo él se condensa en las líneas que preceden; el resto son procedimientos y métodos de cálculo.

Pasemos ahora á la *segunda parte* de la teoría de la Elasticidad que vamos desarrollando, que es la misma teoría por otro método, á saber: por el método de Lamé, ó por métodos análogos; mas para abreviar la expresión, al conjunto de estos métodos, que no difieren unos de otros en lo esencial, les daremos el nombre del ilustre matemático.

La primera parte ha sido, pues, el método de Cauchy.

La segunda parte va á ser en este curso el método de Lamé.

Y claro es que tendremos que repetir muchas de las cosas que ya explicamos en el curso anterior; de todas maneras, llegaremos á las mismas fórmulas.

***

Teoría de la Elasticidad por el método de Lamé.—Podemos dar, desde luego, una idea general de este nuevo método, sin perjuicio de desarrollarlo en las conferencias sucesivas, para que se comprendan desde el principio las diferencias que existen entre él y el método de Cauchy.

También aquí se parte de la Hipótesis mecánica, y aquí, á decir verdad, no es maravilla que de la Hipótesis mecánica se parta, porque de un problema de Mecánica se trata: dado un sistema de puntos enlazados de cierto modo y constituyendo un sistema, y suponiendo que sobre este sistema actúan fuerzas exteriores, determinar la ley de desplaza-

miento de los diferentes puntos, la nueva forma del sistema, por lo tanto, y la intensidad y distribución de las acciones internas.

Y se dirá: Pues tratándose de un problema de Mecánica, ¿cómo no ha de aplicarse la Hipótesis mecánica?

Esto es evidente, tan evidente que no vale la pena de discutirlo; y, sin embargo, para estudiar el fenómeno matemáticamente, pueden hacerse hipótesis diversas, y algunas tendrán el carácter de hipótesis físicas (ya explicaremos lo que esto significa), y otras tendrán el carácter de hipótesis mecánicas.

En efecto; las ecuaciones finales han de ser: ó ecuaciones de equilibrio ó de movimiento; es decir, las ecuaciones generales de la Mecánica.

Pero respecto á la *definición del sistema y á su estructura íntima,* ó pueden hacerse hipótesis, que son verdaderas hipótesis mecánicas, ó pueden definirse estos sistemas por sus propiedades físicas experimentales, sin aventurar nada respecto á su constitución.

Y aquí llegamos al punto en que difiere el mótodo de Cauchy del método de Lamé.

Cauchy define cada cuerpo, según hemos explicado varias veces, como estando compuesto de puntos materiales á grandes distancias relativas y sujetos á fuerzas internas y recíprocas. Esta es una hipótesis, y puede decirse que es una hipótesis mecánica, porque aspira á penetrar en la constitución de la materia como sistema mecánico.

En cambio, el método de Lamé y los análogos, no parten de esta hipótesis, sino de dos resultados experimentales, sin que sea preciso dar la explicación de estos resultados; por más que, cometiendo una inconsecuencia á veces, se pretenda explicarlos, viniendo á parar, aunque de una manera incompleta, á la hipótesis de Cauchy.

Todo esto que adelantamos debe ser explicado con más detenimiento.

El nuevo método que vamos á exponer parte de estos dos hechos experimentales; y para fijar las ideas, supongamos que se trata de un cuerpo sólido.

Primer resultado experimental.—Sea un sòlido, *S*, y sea *M* un punto de este sólido (fig. 1.ª).

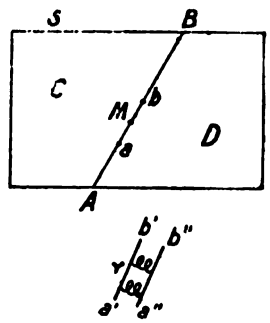


Figura 1.ª

Por el punto *M* tracemos un plano, *AB*, que dividirá al sólido en dos partes, *C* y *D*.

La experiencia da que las partes *C* y *D* están unidas y mantenidas, en el equilibrio general, al parecer por una serie de fuerzas que actúan en los diferentes puntos del plano *AB*.

Este es un hecho que la experiencia impone; para separar la parte *C* de la *D*, para romper el sólido, digámoslo así, se necesita ejercer cierto esfuerzo: todas las construcciones, todos los materiales de construcción, lo demuestran prácticamente, y la ciencia de la construcción, de este hecho necesita partir.

Para romper la madera, la piedra, el hierro, es preciso someter estos materiales á ciertas fuerzas, y aparecen, una vez conseguida la rotura, *superficies propiamente de rotura*.

Y al afirmar esto no formulamos ninguna hipótesis: consignamos un hecho, estamos en el dominio de la Física experimental; y es que, hasta ahora, más que á la Física matemática, á la Física experimental pertenece, considerada de este modo, la teoría de la Elasticidad.

Si procuráramos explicar el hecho en cuestión; si dijéramos que las dos partes *C* y *D* del sólido *S* están unidas, á lo largo de la sección ideal *AB*, por atracciones mutuas de los elementos *D* sobre los elementos *C*, y recíprocamente, ya formularíamos una hipótesis y nos aproximaríamos, más ó menos, al método de Cauchy, y aun de lleno caeríamos en él, como vimos en el curso anterior.

Y, sin embargo, esto hacen la mayor parte de los autores, aunque quedándose, por decirlo de este modo, á la mitad del camino.

Pero esto no es necesario: para resolver el problema desde el punto de vista que estamos considerando, sólo hace falta el hecho experimental, intepretado, es cierto, desde el punto de vista de la Mecánica.

Porque esta interpretación nos permite definir un concepto que es fundamental en la nueva teoría: el concepto de *esfuerzos interiores,* ó, si se quiere, *tensiones;* concepto que ya explicábamos en una de las últimas conferencias del curso precedente.

En la sección AB tomemos un área sumamente pequeña, ab, que comprenda el punto M, y con el pensamiento substituyamos al elemento ab un *dinamómetro ideal,* compuesto de dos placas, $a'b'$, $a''b''$, unidas por resortes, r, é infinitamente próximas.

Este dinamómetro nos marcaría un esfuerzo; y si suponemos que el área ab disminuye, comprendiendo siempre al punto M, y dividimos este esfuerzo por el área, el cuociente tenderá á un límite, y este límite es lo que se llama *tensión por unidad de superficie en el punto M y para el plano ab.*

Lo mismo diríamos para otro plano.

Claro es que este dinamómetro ideal equivale, en cierto modo, á una hipótesis; pero tan sencilla, tan enlazada con la realidad, que casi puede considerarse como la traducción inmediata de un hecho experimental.

Es como decir, que si las dos partes, C, D, del sólido S están unidas constituyendo un sólido, y sometidas por de contado á fuerzas exteriores, en todos los puntos de la sección $A\ B$ actuarán esfuerzos que todavía no sabemos calcular, cuyas leyes de distribución desconocemos, pero que no por eso serán menos reales, y tanto, que si pasan de ciertos límites, el sólido se destruye, se aplasta, ó se desgarra, ó desliza una parte sobre otra, ó todo esto á la vez.

Y bien, estos hechos experimentales son los que mide simbólicamente nuestro dinamómetro ideal.

No es así como la mayor parte de los autores explican este concepto de tensión.

De otro modo lo definen, y aun las definiciones son varias, como veremos en el curso próximo, reproduciendo unas explicaciones muy interesantes de Mr. Poincaré.

Adelantemos algunas de estas ideas.

Los autores no se contentan con definir la tensión experimentalmente; procuran dar de ella una definición matemática.

Consideremos la sección AB y en ella el área ab (fig. 2.ª).

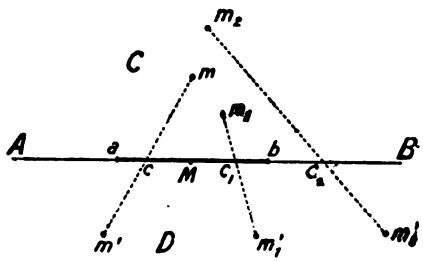


Figura 2.ª

Pues los autores á que me refiero suponen que todos los elementos m, m_1, m_2 ....., de la parte C del sólido, ejercen esfuerzos sobre los elementos m', m_1', m_2'..... de la parte D.

Y consideran tan sólo los pares de puntos en que la recta que los une corta al plano AB dentro del área ab. Por ejemplo: los puntos m, m', cuya recta corta á ab en el punto interior c; el par de puntos m_1, m_1', cuya recta corta asimismo al área en un punto c_1. Pero no toman en cuenta, para esta área ab, los pares de puntos m_2 m_2', que cortan al área ab exteriormente en c_2.

El primer grupo de puntos, mejor dicho, de pares de puntos, determinará, por decirlo de este modo, un manojo de fuerzas, que todas ellas pasarán por el interior del área ab.

Este manojo ó haz de fuerzas, limitado como queda expuesto por el contorno del área ab, que es algo así como un cinturón del haz, es el que sirve á dichos autores para definir la tensión correspondiente al área ab.

A este fin, según los procedimientos de la Estática, transportan todas las fuerzas del haz al centro de gravedad *M* del área, y de este modo se obtienen:

1.° Una resultante de todas estas fuerzas en el punto *M*. Esta resultante es la que se llama, como antes decíamos, *la tensión en el punto* M *del cuerpo* y *para* el elemento *ab*.

2.° Un par de fuerzas. Pero se demuestra fácilmente que el valor numérico del par de fuerzas es despreciable en los cálculos si se compara con el valor numérico de la resultante.

En efecto; supongamos, para fijar las ideas, que el elemento plano correspondiente al punto *M* es un círculo (figura 3.ª) cuyo centro esté en *M* y proyectado en *ab*.

Tomemos dos puntos *a'*, *b'* sobre un diámetro y á igual distancia de *M*, de modo que $Ma' = Mb'$.

Supongamos que sean *f* y *f'* los dos elementos de tensión correspondientes á los puntos *a'*, *b'*, ó, si se quiere, á dos áreas infinitamente pequeñas de segundo orden que comprendan á estos puntos.

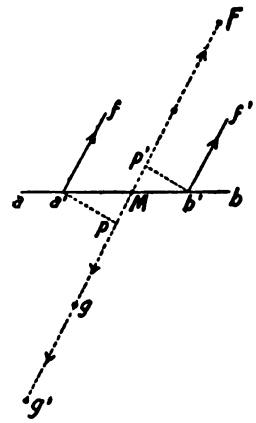


Figura 3.ª

Claro es que todo el círculo *ab* podrá descomponerse de este modo en pares de elementos á igual distancia de *M* y sobre los diferentes diámetros de este círculo.

Lo que digamos de los dos elementos de la tensión, *f*,*f'*, podremos decir de todos los demás.

Por último, dada la pequeñez de *a b*, y admitiendo la ley de continuidad para todo el sistema, podemos admitir que *f* y *f'* son iguales y paralelas. Claro es que consideramos el caso general; es decir, que la tensión es oblicua al elemento plano á que corresponde.

Aplicando ahora las reglas de la Estática, y trasladando f y f' al punto M, tendremos en M una fuerza $MF = 2f$ y otra fuerza opuesta é igual á la anterior, con lo cual no se alterará el sistema $Mg' = Mg + gg' = 2f$.

Pero el par que forman f y g tendrá por valor $f \times a'p$, siendo $a'p$ la perpendicular $a'f$, y el que forman f' y g' será igual á $f \times b'p'$: Ambos son iguales numéricamente y se destruyen por actuar en sentidos contrarios.

En general, suponiendo que el área es cualquiera, tomando para el punto M el centro de gravedad, y admitiendo que todas las f son iguales por unidad de área, todavía el par será nulo, porque la suma de los momentos de todas las fuerzas por relación á dicho centro de gravedad es igual á cero.

Por fin, si f variase por la ley de continuidad, el par no sería nulo, pero sería infinitamente pequeño con relación $a'f$.

De este modo queda definida la tensión para cada punto y para cada elemento; pero en rigor, como antes decíamos, esto es volver al método de Cauchy, empleándolo á medias. Es decir, aceptándolo para definir la tensión y sin sacar partido de la hipótesis, para terminar la solución del problema; porque si el sistema se compone de puntos, lo natural es buscar el equilibrio para estos puntos. Y aun cuando el sistema fuera continuo, definida la tensión de esta manera, lo natural sería continuar por el camino emprendido hasta llegar á las ecuaciones de equilibrio.

Por eso nosotros, buscando la unidad de los métodos y procurando no mezclar unos con otros, consideraremos, según dijimos al principio, que el *esfuerzo,* ó como dicen muchos autores, *la tensión* en cada punto y para cada elemento plano, es una magnitud experimental, ó si se quiere, un concepto experimental, que podría medirse idealmente por un dinamómetro ideal, y que, aun prácticamente y con cierta aproximación, puede medirse en muchos casos, como en construcciones y experimentos que pudiéramos citar.

Segundo resultado experimental.—El valor de la tensión en cada punto y para cada elemento plano depende de la deformación del sistema.

Esto también se comprueba en la práctica, ó mejor dicho, de la práctica se toma; la práctica despierta la idea de relacionar los esfuerzos interiores de un sólido con las deformaciones del sistema.

Un hilo que está sujeto á tensión, cuanto más se alarga, á mayor tensión estará sujeto.

Un prisma que se oprime por un peso contra su base, cuanto más se acorta, será señal de que está sujeto á mayor presión.

En un puente que desciende bajo la acción de las cargas que sobre él actúan, el ingeniero relaciona las flechas con la intensidad de dichas cargas.

En general, un sólido sometido á fuerzas exteriores, se deforma, y se comprende que los esfuerzos ó tensiones interiores dependen de las deformaciones, que en el sólido determinan las fuerzas á que está sometido; es decir, que hay una relación entre ambas cosas.

Podemos, pues, en términos generales, y sin perjuicio de concretar más adelante esta fórmula esquemática, decir que:

Tensión en un punto y para un elemento = Función (de las deformaciones del sólido).

Y anunciemos desde luego una simplificación, análoga á la que hicimos en el método de Cauchy.

Al exponerlo decíamos que, para establecer el equilibrio de cada punto, tendríamos en cuenta las fuerzas exteriores que sobre dicho punto actuaban, y además las fuerzas interiores: acciones y repulsiones recíprocas. Pero no las de todos los puntos del sistema; porque eran tan insignificantes las acciones de los puntos lejanos, que no había para qué tenerlas en cuenta. Así, pues, sólo considerábamos los pun-

tos que rodeaban al punto dado, y que estaban dentro de la esfera de la actividad molecular.

Pues asimismo diremos en este segundo método que vamos exponiendo, á saber: que las tensiones dependen, no de todas las deformaciones del sistema, sino únicamente de las deformaciones de la parte que rodea al punto que se considera hasta cierta distancia muy pequeña de dicho punto.

La simplificación es análoga; pero á decir verdad, parece más natural en el método de Cauchy, que en el método que estamos considerando.

Allí puede demostrarse rigurosamente para ciertas leyes de atracción y repulsión.

Aquí es una simplificación de buen sentido, pero no tan evidente, á no ser que se abandone, por el momento y para la demostración, el método experimental, y se acuda al principio de la acción á distancia, definiendo las tensiones como resultantes de acciones recíprocas de los elementos, según el método de Cauchy.

Decir que las tensiones dependen de la deformación del sistema ó de una parte de él, es decir una cosa exacta, pero poco precisa. La *función*, en Matemáticas, es una relación analítica entre magnitudes: la tensión es una magnitud; pero las deformaciones de una parte, por pequeña que sea, son muchas magnitudes, y es necesario ver si todas son independientes ó si hay algunas fundamentales de las que dependen las restantes.

Todo eso exige un estudio especial.

***

Con estos dos principios experimentales: El de *las tensiones* y el de *éstas en función de las deformaciones*, puede ya plantearse el problema como veremos en las conferencias

próximas y como en términos generales vamos á anticipar en ésta.

Consideremos en el interior del cuerpo un elemento sólido infinitamente pequeño y de caras planas.

Determinemos las tensiones para estas caras, y establezcamos el equilibrio de dicho sólido, según las reglas de la Estática.

Establecidas que sean, substituyamos las tensiones en valores de las deformaciones, y tendremos las ecuaciones finales; es decir, un sistema de ecuaciones que nos determinarán cada deformación en función de los datos, si se trata de un problema de equilibrio elástico, ó en función de los datos y del tiempo, si el problema es de Dinámica elástica; por ejemplo: Un problema de vibraciones.

Tal es la solución general, que especificaremos y concretaremos en la conferencia próxima, ó mejor dicho, en las conferencias restantes; porque, en rigor, en los últimos párrafos hemos dado la solución del problema de la Elasticidad según Lamé y según los autores que siguen su método ó métodos análogos.

XX.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia segunda.

SEÑORES:

Cuando se va á establecer cualquiera de las teorías que comprende la Física matemática, como, según hemos dicho, hay que empezar siempre por una hipótesis, á veces sencilla, otras veces más ó menos compleja, la claridad y el método exigen que la hipótesis se establezca sin ningún género de ambigüedad y sin vaguedades de ninguna clase.

La hipótesis podrá ser la que se quiera; para establecerla tiene libertad absoluta el matemático, quedando á su cargo la responsabilidad de las consecuencias. Sólo se le exige dos cosas, ante todo que en la hipótesis no exista contradicción lógica, porque en este caso se destruiría á sí misma: los cálculos serían incompatibles unos con otros, y las consecuencias opuestas á la realidad.

Pero esto no basta: es preciso que la hipótesis sea clara y completa.

Y esto, á decir verdad, no siempre se cumple sino por manera muy deficiente.

Un siglo hace que en la Física matemática figura el éter y no existe una definición que acepten todos los físicos y que determine sin género de duda la naturaleza, sea real, sea hipotética, de este flúido.

¿Es un flúido incompresible, como muchas veces se ha supuesto?

O bien: ¿es susceptible de compresiones y de dilataciones, que pudieran ser precisamente las dos electricidades, positiva y negativa?

¿Es el éter, como hay quien afirma, una especie de sólido de infinita rigidez?

¿O es vago, inconsistente, lo menos material que pueda imaginarse?

Y por otra parte: ¿es una substancia continua que llena el espacio por completo?

O por el contrario: ¿se compone de átomos distintos, colocados á distancia unos de otros, que pudieran ser átomos de éter, ó quizá los modernos electrones?

Dado que el éter sea una substancia discreta, es decir, compuesta de átomos á distancia, ¿cuál es la naturaleza de estos átomos?

¿Son, como algunos imaginan, verdaderos giróscopos infinitesimales, ó son sistemas complejos, pero no definidos?

Y entre átomo y átomo de éter, ¿qué existe: el vacío, ó bien otro éter más sutil, un éter de segundo orden, para irnos hundiendo en la nada, ó para irnos á través del espacio en persecución de la nada?

Todo esto se ha dicho, no en forma de interrogación, sino en forma afirmativa, por unos y por otros; pero es el caso que, hoy por hoy, no podemos definir el éter de una manera precisa.

Y nada tiene esto de particular, si el éter no es más que una palabra con la cual se designan hipótesis diversas y diversos flúidos hipotéticos.

La realidad es una: el oxígeno es oxígeno, y el hidrógeno es hidrógeno; pero los flúidos que la imaginación crea ó supone para la aplicación de la Mecánica á la Física matemática, pueden ser infinitos.

Y esto es aceptable; pero no lo es el que en cada caso no se defina de una manera precisa el flúido que se va á utilizar, y no se fijan sin ambigüedad sus propiedades, que es lo que muchas veces ha sucedido y sigue sucediendo.

***

Pues una cosa por el estilo podemos repetir al exponer los diferentes métodos á que se ha acudido para resolver el problema de la Elasticidad.

Nos referimos á algo de que ya hemos hablado varias veces.

Los sistemas elásticos, ¿cómo están constituídos?

Es preciso fijar bien las ideas si no hemos de caer á cada paso en vaguedades y en contradicciones.

¿Son sistemas continuos, ó discontinuos?

A Cauchy no se le puede dirigir esta acusación, porque establece terminantemente, lo mismo en la teoría de la Elasticidad, que en la de la Luz, que se trata de puntos ó masas infinitamente pequeñas, discontinuas, y, por lo tanto, situadas á distancia unas de otras.

Pero en el método de Lamé, la vaguedad existe.

Lamé, en su obra clásica, pág. 38, dice al analizar los métodos de Navier y otros geómetras, que tales métodos *suponen evidentemente* la continuidad de la materia; *pero que esta hipótesis es inadmisible.*

¿Por qué inadmisible?

Ya iremos viendo en estas conferencias, que muchas teorías y muchos autores suponen la continuidad. Hipótesis cuya esencia metafísica no discutimos, pero que no es absurda en sí.

Todo el tercer tomo de la gran obra de Appell, es decir, de su Mecánica, se aplica á los sistemas continuos. Pero prescindamos de esto, que nos llevaría muy lejos, y continuemos indicando las opiniones de Lamé, que tienen toda la fuerza que les da el nombre ilustre de su autor.

El cual sigue diciendo en la página citada: «Poisson cree vencer la dificultad reemplazando determinada integral por la suma de un número de términos finitos é indeterminados; pero en realidad no hace más que substituir en algunos casos al signo *suma* el signo *integral*».

Y agrega «que al método que ha adoptado, y que tiene su

origen en los trabajos de Cauchy, lo considera al abrigo de toda objeción: lejos de suponer la continuidad de la materia, deja en cierta indeterminación el número de pares moleculares cuyas acciones componen la fuerza elástica. Este número puede ser grande ó pequeño; puede diferir de un medio sólido á otro, y, sin embargo, los resultados serán exactos».

En suma, Lamé parece que rechaza la hipótesis de la continuidad, y que acepta la hipótesis de Cauchy para el cálculo de las tensiones; pero no acepta, sin embargo, el método de este sabio, método tan claro, tan sencillo y tan fecundo, si se parte de aquella hipótesis.

Además, deja la puerta abierta en cierto modo á la hipótesis de la continuidad, porque si el número de pares de elementos, que sirven para determinar las tensiones del interior del cuerpo, puede ser tan grande como se quiera, pudiera ser infinito, y las sumas serían verdaderas integrales.

De aquí resultan ciertas dudas y ciertas vaguedades que desaparecen admitiendo el método de Lamé; pero tomando como punto de partida los dos resultados *experimentales* que exponíamos al terminar la conferencia precedente, y que debemos recordar al comenzar esta nueva conferencia. A saber:

1.° La tensión en el interior de un cuerpo para un punto de un plano de dirección determinada, puede considerarse que es un resultado experimental: el que daría un dinamómetro ideal colocado en el punto y sobre el plano en cuestión.

2.° La tensión que acabamos de definir depende de las deformaciones del sistema, y aproximadamente, de las deformaciones de la región sumamente pequeña que rodea el punto de que se trata.

Y explicábamos al concluir la conferencia cómo admitiendo estos dos principios podía resolverse el problema de la Elasticidad.

Se consideraría un sólido infinitamente pequeño, que luego, para simplificar, puede suponerse que es un paralelepí-

pedo ó un tetraedro, colocado en el interior del cuerpo y comprendiendo un punto cualquiera que se considere.

Conociendo las tensiones en las diferentes caras de este sólido infinitesimal, que podemos considerar de figura invariable una vez establecido el equilibrio de deformaciones, é incluyendo entre las fuerzas las de inercia, si es problema dinámico, no habrá más que escribir las ecuaciones de equilibrio de dicho sólido.

Y por fin, substituyendo en vez de las tensiones sus valores respectivos expresados por las deformaciones, tendremos enlazadas á éstas últimas por varias ecuaciones, que las determinarán por los métodos generales del análisis.

***

A este punto habíamos llegado en la conferencia precedente, y deducimos de lo expuesto que la solución del problema de la Elasticidad, según el método de Lamé y los métodos análogos, exige:

1.° Un estudio de las tensiones en el interior del cuerpo.

2.° Un estudio de las deformaciones.

3.° Aplicación de los principios de la Mecánica al equilibrio de cualquier sólido infinitamente pequeño, comprendido en el cuerpo, ó aplicación al movimiento de éste sólido, si se trata de un problema de Dinámica; pero ya sabemos que los problemas de Dinámica se reducen á problemas de Estática, según el teorema de D'Alambert, agregando á las fuerzas efectivas las llamadas fuerzas de inercia.

Estudiemos, pues, estas tres cuestiones sucesivamente.

1.° Estudio de tensiones.

Ya hemos definido lo que se entiende por tensión en un punto y para un elemento plano que pase por él, de cualquier sistema elástico.

Empleamos la palabra tensión, como la emplean muchos autores: quizá convendría decir *esfuerzo*, para no confundir la tensión con la tracción; pero nos acomodaremos á la costumbre.

Dijimos en la conferencia precedente, que la tensión para un punto de un plano elemental, situado en el interior de un sistema elástico, puede definirse de muchas maneras.

Lamé define la tensión por una hipótesis que resulta comprobada por otros métodos más exactos; pero que al pronto parece algo arbitraria.

No insistiremos en ella.

Otros autores posteriores la definen considerando pares de puntos materiales del cuerpo, situados los dos puntos de cada par á distinto lado del plano elemental *ab* (figura 4.ª); por ejemplo, *m*, *m'*; pero con la condición de que la recta *mm'* corte al área *ab* en el interior de ella: en *c*, por ejemplo.

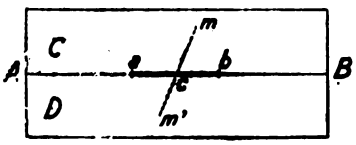


Figura 4.ª

La resultante de todas las fuerzas que actúan, según éstas líneas, por las acciones recíprocas de *m*, *m'* ....., será la tensión correspondiente al plano *ab*, que suponemos aplicada, según ya hemos explicado, al centro de gravedad de esta área elemental.

Esta es una definición matemática, clara y precisa.

Supone que el cuerpo está compuesto de puntos materiales; pero nada se opone á que se aplique también á los sistemas continuos, salvo una discusión especial para el caso en

que resultasen esfuerzos infinitos á medida que la distancia tendiese hacia cero.

Problema es éste sobre el cual algo hemos dicho en el curso anterior, y sobre el que volveremos más de una vez.

Todavía diversos autores han intentado definir la tensión de otra manera que vamos á indicar.

Consideremos un sólido elástico S (fig. 5.ª), en su interior un punto a sobre un elemento plano infinitamente pequeño, y prolonguemos este plano hasta que divida al cuerpo en dos partes. De modo que AB, prolongación del plano a, dividirá al sólido S en dos porciones, C, D.

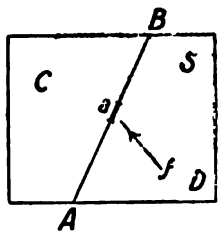


Figura 5.ª

Suprimamos una de éstas, D por ejemplo, y en cada punto del plano AB, y por lo tanto en a, apliquemos una fuerza f de modo que no varíen las condiciones dinámicas del sistema; es decir, que la porción C se encuentre en el mismo estado, que cuando á ella estaba unida la porción D que hemos suprimido.

Se dice que en este caso la acción de las fuerzas f es equivalente á la que ejercía la parte D sobre C, y cada una de estas fuerzas, f, por ejemplo, recibe el nombre de tensión sobre el elemento correspondiente a; y si se divide por el área de a, tendremos el concepto de *tensión por unidad de superficie* en el punto elegido y para el elemento plano en cuestión.

Mr. Lamé combate este sistema de definición, que parece muy sencillo y muy natural, pero que en rigor suscita dudas y dificultades en que no entraremos por ahora.

Por último, puede considerarse la tensión como nosotros la hemos considerado hasta ahora: como un resultado de la experiencia, á decir verdad, una experiencia que no puede hacerse, pero á la cual podemos aproximarnos por experiencias y analogías que parecen atendibles.

Definimos, pues, la tensión en cada punto y para cada elemento plano por las indicaciones experimentales de un dinamómetro ideal aplicado á dicho plano y capaz de medir fuerzas oblicuas.

Demos, pues, por definida la *tensión sobre un área* y también la *tensión por unidad de superficie.*

***

Se comprende que, en general, la tensión variará para cada punto del cuerpo; por lo tanto, será una función de las tres coordenadas x, y, z de dicho punto.

Pero la tensión se refería á un plano determinado ab, y ocurre esta pregunta: cuando ese plano girando alrededor de su centro de gravedad tome diversas orientaciones, la tensión ¿continuará siendo la misma?

De otro modo.

Si por el punto M del cuerpo (fig.ª 6.ª) hacemos pasar dos elementos planos, ab, $a'b'$, las tensiones correspondientes á estos elementos, ¿serán las mismas en magnitud?

Se comprende que pueden no serlo, y en general no lo serán.

Así, pues, las tensiones no serán iguales para diferentes planos pasando por el mismo punto, ni en intensidad ni en dirección. O dicho de otro modo. Las componentes de la tensión para un punto dado dependerán de la dirección del elemento plano que pasa por el punto, ó sea de los cosenos directores α, β, γ de su normal $M\,N$.

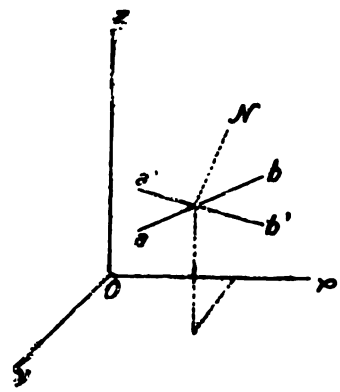


Figura 6.ª

Ya dependía la tensión de las coordenadas del punto; ahora depende de los cosenos directores del plano que se considera, y es claro que en el caso del movimiento esta tensión variará de un instante á otro, de suerte que, en rigor, podemos decir: que la tensión T en un punto $(x\ y\ z)$ de un sólido elástico, depende de siete variables: así, simbólicamente, en general (ó repitiendo esto para cada componente)

$$T = \text{función}\ (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t);$$

y para un instante determinado, es decir, para un valor determinado de t, ó en el caso del equilibrio, también simbólicamente:

$$T = f\,(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma).$$

Y, en fin, si fijamos nuestra atención únicamente en un punto del cuerpo elástico, y queremos estudiar cómo varía la tensión, según la orientación del plano, la cual está determinada por los cosenos directores α, β, γ de la normal, podemos suprimir x, y, z, como constantes de la función, y resultará

$$T = f(\alpha, \beta, \gamma)$$

en términos generales, ó una ecuación análoga, como antes decíamos, para cada componente de T.

Este es el problema que ahora nos proponemos resolver: determinar la tensión para un plano cualquiera en función de las cantidades que determinan la posición de éste.

Decimos la tensión, pero en adelante nos referiremos á la tensión por unidad de superficie. Si el plano es de área muy pequeña, y dividimos la tensión total correspondiente á esta área por el área misma, y suponemos que ésta tiende hacia cero, obtendremos un límite, admitiendo continuidad en el sistema, y ésta será la tensión por unidad de superficie para

un punto dado y para un elemento plano de determinada orientación.

Pero antes de pasar adelante, conviene todavía dar algunas explicaciones y fijar el sentido de algunas palabras.

***

Sea, como siempre, el sólido S (fig. 7.ª), dividido en dos partes por el plano $A\ B$.

En este plano, consideremos el área sumamente pequeña $a\ b$, como habíamos hecho hasta aquí; pero imaginemos que esta área ab se divide en dos planos ú hojas, ab, $a'\ b'$, como si el plano primitivo tuviera dos caras:

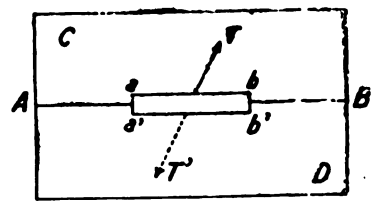


Figura 7.ª

La cara ab la supondremos *invariablemente unida* á la parte C: la $a'\ b'$, á la parte D: precisamente en este espacio $a\ b\ a'\ b'$ es donde tendríamos que colocar nuestro dinamómetro ideal.

La parte D del sólido, ó la parte útil, que será la infinitamente próxima á $a\ b$, $a'\ b'$, ejercerá un esfuerzo T sobre el plano $a\ b$, y, por lo tanto, sobre la parte C: es, precisamente, la tensión que hemos definido.

Así, pues, T es la tensión que D ejerce sobre C á través de la superficie $a\ b$.

Pero en virtud del principio de que la reacción es igual y contraria á la acción, á la vez la parte C ó su parte útil ejercerá una acción sobre D á través de $a'\ b'$, que estará representada por T' igual y contraria á T.

Así, en resumen, repitiendo para T' lo que hemos dicho para T, diremos que T' es el esfuerzo ó tensión que C ejerce sobre D á través de la superficie $a'\ b'$.

De suerte que, en general, cuando hablemos de tensión, tendremos que especificar la parte del cuerpo sobre la cual se ejerce, si está á un lado ú otro de la superficie *a b* de separación; porque cuando establezcamos ecuaciones, deberemos marcar si se trata de *T* ó de *T'*, pues si bien son iguales, tienen signos contrarios.

Una última explicación:

Si el esfuerzo *T* (figura 8.ª) es normal á la superficie *a b*, y va hacia el interior de *C*, diremos que es un esfuerzo de compresión, porque, en efecto, la acción de *D* sobre *C* será comprimir á esta última parte del cuerpo; y recíprocamente, *T'* tenderá á comprimir la parte *D*, así es que en este plano *ab a' b'* de dos hojas habrá compresión del cuerpo: cada región tenderá á comprimir á la otra; cada una se apretará contra la opuesta.

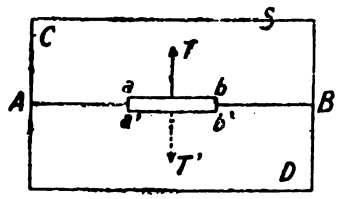


Figura 8.ª

La tensión en este caso se convierte en *presión*.

Por el contrario, si, como sucede en la figura 8', la tensión *T* que se ejerce sobre *C* á través de *a b* no va hacia dentro, sino hacia fuera de esta región, claro es que la parte *C* estará sujeta á una *tracción*. Y recíprocamente *T'* será el esfuerzo que *C* ejerce sobre *D* tirando de esta última y procurando alargarla.

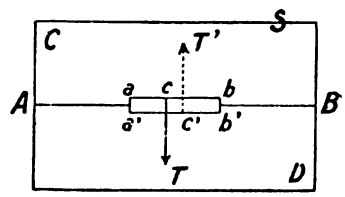


Figura 8'.

Entonces se dice que la tensión, término genérico, es en este caso *tracción*, y el plano *ab* que estamos considerando está sujeto á un esfuerzo de tracción.

En la figura 8.ª, los resortes del dinamómetro ideal que colocásemos en *a b a' b'* se estirarían, y en la figura 8' se comprimirían. Los nombres de las acciones sobre el dina-

mómetro se invierten, dada la hipótesis que hemos establecido y el modo de colocar el dinamómetro en cuestión.

Finalmente, si la tensión, en vez de ser normal al plano, es paralela, como en la figura 8″, entonces las partes *C* y *D* tienden á resbalar á lo largo de *AB*.

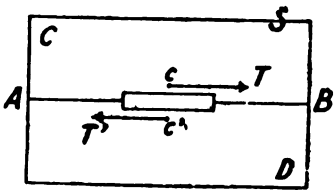


Figura 8″.

La tensión se llama esfuerzo tangencial, y tiende á producir un resbalamiento; algunas veces este esfuerzo se llama esfuerzo cortante.

***

Y ahora volvamos al problema que quedó pendiente: expresar *T* en función de α, β, γ; es decir, determinar la ley de variaciones de las tensiones alrededor de cada punto, según la orientación del plano.

Y no decimos bien al decir que hemos de determinar el valor de las tensiones, ni las fórmulas que hemos escrito hasta aquí tienen otra significación, que una significación esquemática, porque, por regla general, cada tensión es oblicua respecto al plano á que corresponde; de suerte que necesitamos determinar para cada plano, no sólo el valor numérico de la tensión, sino la dirección que tiene, ó si se quiere, determinar *sus tres componentes*.

De suerte que el problema que vamos á resolver es éste:

Determinar las tres componentes de la tensión por unidad de superficie, ó, abreviadamente, de la tensión en cada punto del sólido elástico, en función de los tres cosenos directores de la normal al plano á que la tensión se refiere.

Y ocurre esta primera pregunta que ya hicimos antes. Para cada punto, las tensiones alrededor del mismo ¿podrían ser arbitrarias en todos sentidos, si variásemos á voluntad la naturaleza del sólido, ó estarán sujetas en todos los sólidos continuos á ciertas leyes matemáticas?

¿Habrá infinitas tensiones arbitrarias, ó todas ellas dependerán de un número finito de tensiones, correspondientes á orientaciones determinadas del plano, que comprende el punto en cuestión?

Una consideración muy sencilla demuestra, que no todas las tensiones pueden ser arbitrarias.

Fijemos bien las ideas.

Tomemos un punto en el interior del sólido elástico S, y sea el punto M (fig. 9).

Alrededor de este punto, imaginemos un poliedro de caras planas abc..... infinitamente pequeño; si el sólido S está en equilibrio, estará en equilibrio el poliedro M infinitamente pequeño y situado en su interior.

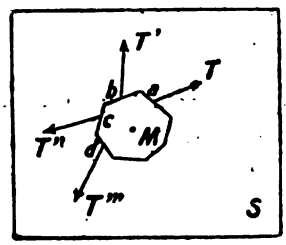


Figura 9.

Luego para este poliedro deberán cumplirse las ecuaciones de equilibrio de los cuerpos sólidos invariables.

Las fuerzas que se ejercen sobre él, son: las fuerzas exteriores, que suponemos que actúan en el punto M; la tensión T sobre la cara a; la tensión T' sobre la cara b; la T'' sobre la cara C, y así sucesivamente.

Luego estableciendo el equilibrio de dicho sólido, infinitamente pequeño, tendremos un número determinado de ecuaciones en que entrarán T y sus cosenos directores, así como las demás tensiones T', T''...; luego es evidente que todas ellas no son arbitrarias, puesto que han de satisfacer á un número determinado de ecuaciones de condición.

Este es precisamente el principio que vamos á aplicar para resolver el problema en que nos ocupamos.

Sólo que en vez de tomar un poliedro cualquiera, tomaremos dos de los más sencillos: 1.°, un paralelepípedo cuyas caras sean paralelas á los planos coordenados, que supondremos rectangulares; 2.°, un tetraedro en que tres caras sean

paralelas á dichos tres planos coordenados y en que la cuarta tenga una dirección cualquiera definida por los tres cosenos directores α, β, γ.

Mas antes, para terminar este avance, ó primera idea sobre la relación que existe entre las tensiones alrededor de un punto, haremos una última observación.

Hemos considerado un poliedro cualquiera que comprenda el punto M, y hemos encontrado, que entre las tensiones T, T', T''... sobre las caras a, b, c..... existen ciertas relaciones, de donde resulta que no todas las tensiones son arbitrarias.

Pero las tensiones sobre dichas caras, y aun las caras, puede suponerse que paralelamente á sí mismas se trasladan al punto M. Y esto es evidente, si el sistema es continuo y el poliedro es infinitamente pequeño.

De modo, que es legítimo suponer que las relaciones á que nos hemos referido entre T, T', T''... se aplican á dichas tensiones pasando por el punto M, y que los planos correspondientes pasan también por dicho punto y son paralelos á los a, b, c...

*
* *

Para buscar la ley que enlaza todas las tensiones correspondientes á un punto, empecemos considerando el paralelepípedo que antes indicábamos.

Sea este paralelepípedo $A\ B\ C$ (fig. 10).

En un instante cualquiera, cuando las deformaciones han llegado al límite que corresponde á este instante, podremos suponer que dicho paralelepípedo es un cuerpo rígido é invariable, y podremos aplicarle las fórmulas del equilibrio, que establece la mecánica racional.

Sabemos que éstas son seis: tres que expresan que las sumas de las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el paralelepípedo paralelamente á los tres ejes coor-

denados, han de ser iguales á cero; y otras tres relativas á los tres pares alrededor de ejes paralelos á los del sistema, que pasen por el centro del sólido.

En estos tres últimos vamos á ocuparnos ahora, para deducir de ellos relaciones importantes.

Consideremos la rotación alrededor del eje $o\ z$.

Las fuerzas exteriores podemos suponer que actúan en o,

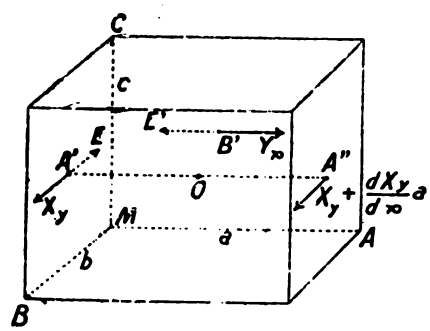


Figura 10.

y por lo tanto, su momento será nulo; prescindiremos, pues, de ellas.

De las fuerzas que actúan sobre la cara superior é inferior y en los centros de las mismas, también podemos prescindir, porque cortan al eje de giro.

Nos quedan las cuatro caras laterales: $B\ C$ y la opuesta; $A\ C$ y la opuesta á ella.

Consideremos la cara $B\ C$. La tensión, admitiremos, como siempre que actúa en el centro A' de dicha cara; pero de sus tres componentes sólo la paralela al eje de la y será eficaz. En efecto; la que pasa por A' y es paralela al eje de las x, pasa también por o, que es el centro, y su momento es nulo. La paralela al eje de las z tampoco puede producir movimiento de rotación; luego sólo queda, como hemos dicho, la componente paralela al eje de la y.

Y antes de pasar adelante, fijemos bien las notaciones.

Al considerar una cara $B\ C$, supondremos que se considera la tensión ó esfuerzo que ejerce la parte *de la derecha,* que es la del eje de las x positivas sobre *la izquierda*; y es claro que si es una tracción, deberá considerarse $A'D$ como *positiva*, según se ve en la figura 10'.

En cambio, la acción de la parte de la izquierda sobre la derecha $A'D'$ será en este caso *negativa.*

Respecto á las fuerzas tangenciales de dicha cara, llevarán el signo que les corresponda, es decir, el positivo si actúan en el sentido positivo de los ejes de las y y de las z; el negativo en el caso contrario. Y se considerará que actúa la parte del sólido que corresponda á la dirección positiva de los ejes sobre la parte de los ejes negativos: es decir, de derecha á izquierda, de delante á atrás, de arriba á abajo.

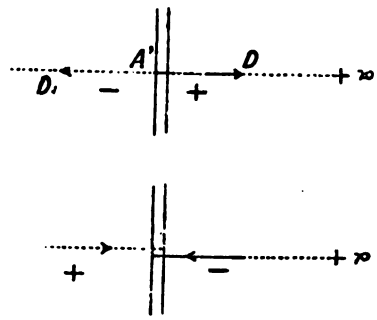


Figura 10'.

Esto respecto á los signos; respecto á las notaciones, la tensión sobre cada cara se designará por la letra del eje á que es perpendicular y por un subíndice que indique la componente de que se trata.

Así, la tensión en la cara BC (fig. 10), es decir, de la parte de la derecha del cuerpo sobre la izquierda, se designará por X, y sus tres componentes paralelas á los tres ejes x, y, z, serán X_x, X_y, X_z.

Del mismo modo, la tensión sobre la cara $C\ A$, que ejerce la parte delante del cuerpo sobre la posterior, ó de la positiva sobre la negativa, puesto que la cara es perpendicular al eje de las y, se designará por Y;
y sus tres componentes, por Y_x, Y_y, Y_z.

Por último, la tensión sobre la superficie $A\ B$, consideran-

do la acción de la parte superior del cuerpo sobre la inferior, puede expresarse por Z,

Y sus tres componentes, por Z_x, Z_y, Z_z.

También puede suponerse que cada plano elástico tiene dos caras: la negativa, que corresponde á la parte negativa del eje, y la positiva, que corresponde al eje positivo. Y en esta hipótesis la magnitud, que en general se llama *tensión*, podemos suponer que siempre actúa sobre la *cara negativa* y que tienen sus componentes el signo que les corresponde según el sentido en que actúen.

Las reacciones tendrán signo contrario y actuarán sobre las caras positivas.

El siguiente cuadro condensa las expresadas notaciones:

Tensión sobre la cara negativa de la superficie perpendicular

al eje de las x.....	X	componentes...	$X_x\ X_y\ X_z$
al eje de las y.....	Y	» ...	$Y_x\ Y_y\ Y_z$
al eje de las z.....	Z	» ...	$Z_x\ Z_y\ Z_z$.

Y debe recordarse siempre, lo repetimos una vez más, que se trata de la acción de la parte del cuerpo que está del lado del eje positivo sobre la parte del cuerpo que está del lado negativo.

Debe recordarse también que en esta hipótesis las tracciones son positivas, y las presiones, negativas.

***

Y calculemos ahora los pares que actúan sobre el paralelepípedo para hacerle girar alrededor del eje de las z.

Hemos visto que considerando la cara $B\,C$ (fig. 10), la única fuerza eficaz es la paralela al eje de las y.

Pero lo que nos interesa no es la acción del paralelepípedo

sobre la parte de la izquierda cuya componente eficaz sería X_y, sino, por el contrario, la acción de la parte de la izquierda sobre el paralelepípedo, que es igual y contraria á la anterior, de modo que sería $A' E$. Pero X_y está referida á la unidad de superficie; para toda la cara $B C$, representando por a, b, c las tres aristas del paralelepípedo, sería en valor numérico $X_y b c$, y como el brazo de palanca es $oA' = \frac{a}{2}$, el valor del par será $X_y \frac{abc}{2}$

Este es el valor numérico del par, y como hemos supuesto que X_y es positiva, es claro que dicho valor numérico tendrá el signo más; de todas maneras, en la teoría de los pares lo que importa es precisar el sentido del giro.

Resulta, pues, el par $X_y \frac{abc}{2}$; que está compuesto de la fuerza $A'E$ y del brazo de palanca OA', y que tenderá á comunicar al paralelepípedo una rotación, según se ve en la figura de izquierda á derecha, es decir, en el sentido de las agujas de un reloj.

En la cara opuesta á la BC, en el punto A'', la parte de la derecha, actuando sobre la izquierda, determinará una tensión, que es la que aquí nos interesa, porque es la acción sobre el paralelepípedo; pero de las tres componentes de esta tensión, dos de ellas son inútiles para nuestro objeto, porque la paralela al eje de la x pasa por el centro O; la paralela al eje de la z no tiende á producir ningún giro, y sólo queda la paralela al eje de la y, la cual tendrá por valor el mismo que tenía en A' con el incremento que corresponde al incremento a de la x del punto A'.

Es decir:

$$X_y + \frac{dX_y}{dx} a.$$

Como actúa esta tensión por unidad de superficie, sobre toda la cara, el valor total será

$$\left(X_y + \frac{dX_y}{dx} a\right) bc$$

y el momento con relación al punto o, cuyo brazo de palanca es $OA'' = \frac{a}{2}$ tendrá el valor numérico

$$\left(X_y + \frac{dX_y}{do} a\right) \frac{abc}{2}.$$

Este par tiende también á producir un giro en el mismo sentido que el anterior; por consiguiente, para obtener el par resultante, deberemos sumar los dos valores positivos y tendremos:

$$X_y \frac{abc}{2} + \left(X_y + \frac{dX_y}{ox} a\right) \frac{abc}{2} = X_y abc + \frac{dX_y}{dx} a \frac{abc}{2}$$

recordando siempre que este par tiende á producir un giro de izquierda á derecha.

Repitiendo todo esto para la cara $A\,C$ y la opuesta; y recordando que para la cara $A\,C$, si la acción de la parte anterior sobre la posterior es Y_x, la de ésta sobre el paralelepípedo será $-Y_x$, y deberá llevarse de B' á E' como marca la figura, tendremos para el momento del par resultante de ambas caras

$$Y_x\, abc + \frac{dY_x}{dy} b. \frac{abc}{2}.$$

Pero este par, como se ve en la figura, tiende á producir una rotación de derecha á izquierda, ó sea en sentido contrario que las agujas de un reloj.

De modo que ambos pares, es decir, el calculado para las caras BC y la opuesta, y el que acabamos de calcular, tienden á producir rotaciones contrarias; basta para el equi-

librio que sus valores numéricos sean iguales, considerándolos siempre como positivos.

Tendremos, pues, estableciendo esta condición

$$X_y\, abc + \frac{dX_y}{dx}\, a.\frac{abc}{2} = Y_x\, abc + \frac{dY_x}{dy}\, b.\frac{abc}{2}$$

y dividiendo por abc

$$X_y + \frac{dX_y}{dx}\,\frac{a}{2} = Y_x + \frac{dY_x}{dy}\,\frac{b}{2}.$$

Pero los últimos términos de ambos miembros son cantidades infinitamente pequeñas, puesto que lo son a, b, por lo tanto pueden suprimirse, y queda entre las componentes de las tensiones de dos caras contiguas la relación importantísima y fundamental:

$$X_y = Y_x,$$

que se expresa diciendo, que cuando se invierten la letra principal y el subíndice, el valor de la componente no varía.

***

Hemos considerado los planos perpendiculares á los ejes de las x y de las y; aplicando estos razonamientos á los planos perpendiculares á los ejes y, z, tendremos,

$$Y_z = Z_y.$$

Y repitiendo lo mismo para las caras del paralelepípedo perpendiculares á los ejes x, z, tendremos de igual modo,

$$X_z = Z_x.$$

Para fijar bien las ideas, hemos trazado la figura 11, en que

aparecen el paralelepípedo y las seis componentes tangenciales.

Dos de ellas, correspondientes á la cara yz: $X_y = Aa'$; $X_z = Aa''$.

Las otras dos, correspondientes á la cara de las xz: $Y_x = Bb'$; $Y_z = Bb''$.

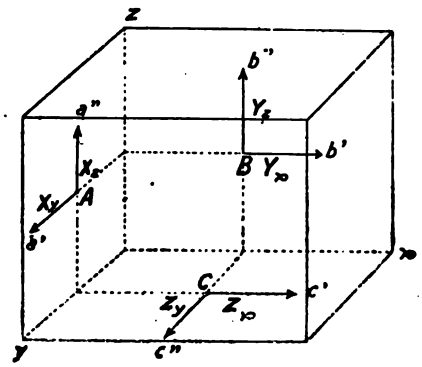


Figura 11.

Y las dos últimas, correspondientes á la cara xy: $Z_x = Cc'$; $Z_y = Cc''$.

Y son iguales Aa', Bb' perpendiculares al eje de las z: á saber, respectivamente X_y, Y_x.

Son iguales también X_z y Z_x, es decir, $Aa'' = Cc'$, ambas perpendiculares al eje de las y. Y por último son iguales Y_z y Z_y, ó bien $Bb'' = Cc''$, perpendiculares al eje de las x.

Lo que decimos de estas componentes, que representan las acciones del paralelepípedo sobre el cuerpo en las tres caras, pudiéramos decir de las acciones del cuerpo sobre el paralelepípedo en las mismas caras.

***

El cuadro que antes presentamos para las nueve componentes de las tres tensiones, y que era,

componentes de X	$X_x,\ X_y,\ X_z;$
componentes de Y	$Y_x,\ Y_y,\ Y_z;$
componentes de Z	$Z_x,\ Z_y,\ Z_z;$

se reduce, según lo que hemos demostrado, y si para simplificar adoptamos estas nuevas notaciones:

$$X_x = N_1;\ Y_y = N_2;\ Z_z = N_3$$

y

$$Z_y = Y_z = T_1;\ X_z = Z_x = T_2;\ Y_x = X_y = T_3,$$

al siguiente cuadro simétrico:

componentes de X	$N_1\ T_3\ T_2,$
componentes de Y	$T_3\ N_2\ T_1$
componentes de Z	$T_2\ T_1\ N_3;$

que comprende las notaciones que hemos de emplear en adelante, y que marca cuáles son las fuerzas normales á las caras, las cuales están representadas por la letra N y con los subíndices 1, 2, 3, según sean paralelas á los ejes x, y, z.

Marca asimismo por la letra T las componentes tangenciales, es decir, las que están en las caras. Los subíndices 1, 2, 3 corresponden á las combinaciones yz, xz, xy.

Las primeras N_1, N_2, N_3 serán tensiones ó tracciones; las segundas T_1, T_2, T_3 producirán deslizamientos.

***

Nos ha servido hasta aquí, para un punto cualquiera del sólido elástico, el paralelepípedo infinitamente pequeño de caras paralelas á los planos coordinados, y cuyo centro coincide con el punto en cuestión.

Pero lo hemos empleado *sólo con un objeto:* para buscar relaciones entre los esfuerzos elásticos alrededor de cada punto. Y hemos visto que, en efecto, existen relaciones sencillas y fundamentales entre las componentes de los esfuerzos sobre las caras contiguas del paralelepípedo.

Hacemos esta advertencia, porque dicho paralelepípedo, que es importantísimo y que casi pudiéramos decir que es clásico, nos ha de servir más adelante para establecer el equilibrio ó el movimiento de todos los puntos interiores del sólido de que se trate.

En esta conferencia lo hemos aplicado con un objeto mucho más concreto: con el de demostrar que las nueve componentes de las nueve tensiones X, Y, Z correspondientes á las tres caras del triedro, paralelo, por decirlo así, á los planos coordenados, se reducen á seis: N_1, N_2, N_3 y T_1, T_2, T_3.

Ha sido lo hecho hasta aquí una especie de simplificación preliminar; y ahora pasaremos al problema general de las tensiones que antes indicamos, es decir, á determinar sus leyes de variación ó de distribución alrededor de cada punto del sólido elástico.

Este será precisamente el objeto de la conferencia próxima.

XXI.—Mareómetros y mareógrafos de sifón.

POR EDUARDO MIER Y MIURA.

PRIMERA PARTE

TEORÍA DE LOS MAREÓMETROS Y MAREÓGRAFOS DE SIFÓN

I.—Principio fundamental de los mareómetros y mareógrafos de sifón.

El principio general en que están fundados los mareómetros y mareógrafos de mercurio es en su esencia el mismo en que se basan los usuales sifones, los manómetros de mercurio y otros aparatos análogos. Su manera de funcionar depende del equilibrio estático, siempre buscado, unas veces sin éxito, produciendo, por lo tanto, un movimiento, cual en los sifones sucede, y otras con él, como acontece en los manómetros; equilibrio que siempre tiende á establecerse entre las masas de diversas substancias líquidas y gaseosas encerradas en un tubo, provisto de una ó varias curvaturas, y sometidas á la acción de la gravedad y á la expansión propia, que en resumen determinan una serie de fuerzas, que buscan por su destrucción mutua el reposo aparente de la materia, ó determinan el movimiento de ésta, en los casos en que aquella compensación no se verifica.

Con arreglo á ese principio general, en un tubo doblemente encorvado, *A B C D*, figura 1.ª, abierto por sus extremos y que tenga llenas de mercurio parte de las ramas *A B* y *B C*, y de agua el resto de esta última y toda la *C D*, cuya extremidad se sumerge en un depósito de este líquido, tomarán las masas de agua y mercurio una posición de

equilibrio determinada, consecuencia natural del conjunto de fuerzas á que ambas están sometidas.

Entre estas fuerzas figura la presión atmosférica, que empuja en la rama *A B* hacia abajo y en la *D C* hacia arriba, pudiendo admitirse, por ahora, que se destruyan entre sí ambos efectos, toda vez que se necesitaría que existiera una gran diferencia de nivel entre la rama *A B* y el depósito de agua ó una gran distancia horizontal, para que los efectos de la presión atmosférica fueran sensiblemente diferentes, y partimos del supuesto de que la parte *C* no llega á estar diez metros más alta que el nivel del agua del depósito, ya que excediendo de 10,^{m}34 esa diferencia de nivel se produciría teóricamente el vacío en la parte *C*. Además, en lo sucesivo, hemos de examinar detalladamente la influencia de esa diferencia de presiones.

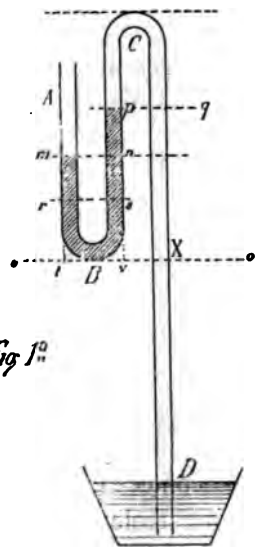


Fig. 1.ª

Trazando las horizontales *m n* y *p q*, figura 1.ª, evidente es que las dos columnas de mercurio *m B* y *B n* se hacen equilibrio, así como las dos de agua *p C* y *C q*, quedando la de este último líquido *q D* y la *p n* que también están en equilibrio.

Cualquiera que sea la situación del nivel del agua, dentro de los límites ya expresados, esa última condición de equilibrio exige para verificarse que las alturas *p n* y *q D* estén en relación inversa de las densidades de ambos líquidos; así es que, suponiendo sea agua destilada á 4° la que empleemos en el tubo;

$$\frac{pn}{qD} = \frac{1}{13,6},$$

de donde

$$q\,D = 13{,}6\,p\,n;$$

de manera que midiendo la longitud $p\,n$, determinaremos indirectamente la $q\,D$, y á cada variación en ésta corresponde otra proporcional en aquélla, indicando así la posibilidad de evaluar las variaciones de nivel del agua por el estudio de las oscilaciones de la columna de mercurio.

Tal es el principio en que se fundan los mareómetros y mareógrafos de sifón, en los que el agua destilada queda substituída por la del mar. Pero antes de describir estos aparatos conviene estudiar la influencia que la presión atmosférica y los cambios de temperatura pueden tener en sus indicaciones.

2.—Determinación de la fórmula que liga las presiones barométricas con el desnivel entre las superficies del mar y del mercurio.

La fórmula de Laplace ó cualquiera de las derivadas de ella, que ligan la diferencia de nivel entre dos puntos con las alturas barométricas en ellos observadas, pueden servir para indagar cuál sea la influencia de la presión barométrica sobre las indicaciones de los mareógrafos de sifón. Nosotros elegiremos para estos cálculos, por lo sencilla y por sobrar la aproximación que da, para nuestro objeto, la fórmula de Babinet:

$$D^m = 32^m\,(500 + t + t')\,\frac{B - B'}{B + B'},$$

en la que:

D es la diferencia de nivel,

t, la temperatura del mercurio en la estación inferior,

t', ídem íd. íd. en la superior,

B, la altura barométrica, en milímetros, en la estación inferior,

B', la altura barométrica, en milímetros, en la superior.

Podremos encontrar la altura B en función de las demás cantidades deduciendo la expresión:

$$B = B' \frac{32(500 + t + t') + D}{32(500 + t + t') - D},$$

que suponiendo igual temperatura en ambas estaciones (hipótesis admisible en el género de cálculo que nos ocupa) se transforma en

$$B = B' \frac{16000 + 64\,t + D}{16000 + 64\,t - D}$$

que da para la diferencia de presiones:

$$B - B' = B'\left(\frac{16000 + 64t + D}{16000 + 64t - D} - 1\right) = B' \frac{2\,D}{16000 + 64t - D}$$

que de un modo general expresa, para la diferencia D de cotas entre el nivel del agua y el del mercurio, en la rama libre, el valor de la diferencia de presiones barométricas.

Para un mareógrafo dado, si D_m es el desnivel medio de las superficies líquidas ya citadas, y B'_m y t_m, las presiones y temperaturas medias observadas:

$$B_m - B'_m = B'_m \frac{2\,D_m}{16000 + 64\,t_m - D_m},$$

dará la diferencia de presiones que debe aceptarse para corregir el aparato.

3. — Influencia de los cambios de temperatura en las indicaciones mareométricas.

Para estudiar cuál sea la influencia de las temperaturas en las indicaciones mareográficas, recordemos una vez más que puede desde luego establecerse que las alturas de las

columnas de mercurio y de otro líquido, que se hacen equilibrio, están en relación inversa de las densidades, ó sea que

$$\frac{m}{a} = \frac{d_a}{d_m},$$

representando m la columna de mercurio, a la de otro líquido y d_m y d_a las densidades correspondientes.

Las densidades de un mismo líquido y las temperaturas están enlazadas por la ecuación, bien conocida,

$$d_t = d_t\,(1 - K\,(t' - t)\,)$$

en que K representa el coeficiente de dilatación; y, expresando por d la densidad que corresponde á la temperatura de 0°, á otra cualquiera t, se tendrá:

$$d_t = d\,(1 - K\,t)$$

que, introducida en la anterior proporción, dará:

$$\frac{m}{a} = \frac{d_a\,(1 - K_a{}^t)}{d_m\,(1 - K_m{}^t)},$$

la cual expresión, aplicada al caso en que a corresponda al agua del mar, como el coeficiente de dilatación absoluta del mercurio es: $K_m = 0{,}0001797$, y el del agua del mar: $K_a = 0{,}0004954$ próximamente, partiendo del supuesto que el coeficiente de dilatación aparente del agua destilada es 0,000466, el del agua saturada de sal marina, 0,0005, y el del vidrio empleado en los mareógrafos, 0,0000254, se convierte en:

$$\frac{m}{a} = \frac{d_a\,(1 - 0{,}0004954\,t)}{d_m\,(1 - 0{,}0001797\,t)} = \frac{1{,}026\,(1 - 0{,}0004954\,t)}{13{,}596\,(1 - 0{,}0001797\,t)},$$

habiendo introducido en ella además los valores de las densidades del mercurio y del agua de mar á 0°.

Simplificando la anterior fórmula puede establecerse:

$$\frac{m}{a} = 0{,}0755 \frac{1 - 0{,}0004954\, t}{1 - 0{,}0001797\, t},$$

que de un modo general expresará la influencia de las variaciones de t en el valor de la relación $\frac{m}{a}$, con suficiente aproximación.

4.—Correcciones, por temperatura y presión, de las indicaciones mareométricas.

Precedentemente hemos determinado la corrección que en sí lleva el cambio de presión barométrica

$$B - B' = B' \frac{2\,D}{16000 + 64\,t - D},$$

estimada en milímetros de mercurio; é implícitamente acabamos de fijar la corrección por temperatura, toda vez que de la proporción escrita en el anterior párrafo se desprende que:

$$a = m \times 13{,}251 \frac{1 - 0{,}0001797\, t}{1 - 0{,}0004954\, t},$$

en la cual igualdad indica el quebrado, que en ella figura, el valor que en cada caso habrá de adoptarse como coeficiente de corrección por temperatura.

Para introducir á un mismo tiempo ambas correcciones en el cálculo, observemos que la primera no significa otra cosa, sino que siendo la presión barométrica en D, figura 1.ª superior á la que en A existe, la diferencia entre ambas estaria expresada por una altura de mercurio:

$$m\,r = B' \frac{2\,D}{16000 + 64\,t - D},$$

que contrarrestaría el exceso de presión que obra en el extremo del tubo $D\,C$, resultando, en su consecuencia, que en realidad á la columna de agua de mar $Q\,D$ hace equilibrio toda la

$$ps = pn + ns = m + B' \frac{2D}{16000 + 64\,t - D};$$

y convirtiendo estas alturas de mercurio en las que le corresponden para el agua de mar, aparecerá que:

$$a = m\,.\,13{,}251\,\frac{1 - 0{,}0001797\,t}{1 - 0{,}0004954\,t} +$$

$$+ \frac{2\,B'D}{16000 + 64\,t - D}\,13{,}251\,\frac{1 - 0{,}0001797\,t}{1 - 0{,}0004954\,t},$$

expresión que permite calcular en cada caso el valor de a en función de m, teniendo en cuenta todo género de correcciones y convirtiendo el mareómetro descripto en un aparato de precisión muy superior á la conseguida con los demás mareógrafos.

5.—Consideraciones acerca de la importancia que debe darse á las correcciones por temperatura y presión.

Habría de aplicarse á las observaciones de los mareógrafos ordinarios, para hacerlas comparables con las que proporcionan los de mercurio, una corrección por temperatura; pero mucho más compleja que la buscada por nosotros, toda vez que habría de tenerse en cuenta el aumento de volumen del flotante y su consiguiente mayor emergencia; la dilatación de la cadena que le sustenta y la del cordón, generalmente metálico, que hace avanzar ó retroceder el lápiz.

A esas correcciones habría de agregarse otra muy impor-

tante que depende de la gran inercia de los mecanismos que constituyen los mareógrafos ordinarios y que falsea, en cantidades de importancia, las indicaciones mareográficas; pudiendo citar, en apoyo de esta afirmación, que las observaciones hechas en el Instituto Geográfico, en mareógrafos nuevos y perfectamente engrasados, llegaron á acusar, como más adelante detallaremos, errores de algunos centímetros en las indicaciones del nivel de las aguas.

No es que pretendamos que se empleen los mareógrafos de mercurio, introduciendo en ellos toda suerte de correcciones, incluso las de graduación y dilatación de las reglas en que se hicieren las lecturas, y las que en sí llevan las alturas de los meniscos, como tampoco censuramos que no se tomen en cuenta las correcciones que hemos enunciado y otras que por especificar quedan, que á los mareógrafos ordinarios se refieren. Tan sólo queríamos hacer notar que el aparato descripto puede considerarse como de gran precisión, ya que las cantidades que en él juegan, cabe determinarlas en todos los casos con extremada aproximación, toda vez que se trata de densidades de líquidos muy estudiados, tales como el agua y el mercurio, las cuales pueden conocerse por el estudio de las temperaturas variables á que se hallen; estudio que da directamente los volúmenes y densidades, sabiendo de antemano lo que unas y otras valen á la temperatura inicial de 0° y el coeficiente de dilatación de las diversas substancias que entran en la composición del aparato; y en cuanto á la corrección por la presión barométrica, basta con una aproximación grosera, dada directamente por el aparato, en el valor de *D*, para obtener resultados sobradamente satisfactorios.

Si entráramos en este camino y le siguiéramos, tratando de tomar en cuenta los efectos del calor, los de la presión atmosférica y la compresibilidad del mercurio y aun la del agua, etcétera, etc., utilizando los estudios que acerca de estos puntos abundan, llegaríamos, sin duda alguna, á fijar todas las correcciones que las indicaciones del aparato habían de exigir;

pero esto, que quizás se intente en lo porvenir, sería prematuro actualmente, en que el fenómeno de las mareas se estudia sin poder hacer intervenir en él entidades de mayor importancia que las apuntadas, y usando por todas partes, para medirlas, aparatos de precisión inferior á la del que proponemos.

El estudio de las mareas puede y debe dividirse en dos grupos: estudio directo de sus fluctuaciones y examen razonado de las causas que las producen; grupos que, analizados paralelamente, pueden permitir quizás algún dia sujetar rigurosamente al análisis el fenómeno en cuestión, pero que hoy por hoy no ofrecen base suficiente para desarrollar una teoría completa.

Para no extender demasiado este escrito, citemos solamente uno de los elementos que en el segundo grupo intervienen, y observemos que las leyes que rigen las corrientes atmosféricas, si bien muy estudiadas, no están lo suficientemente conocidas y aún menos conocidos y estudiados son los efectos del viento sobre las aguas. Así, por ejemplo, es común preocuparse mucho de investigar cuál sea la componente horizontal de la velocidad del aire y descuidar por completo la componente vertical, que sin duda alguna tiene mayor importancia en los cambios del nivel del agua que aquella otra, por más que sea grande la de ésta; y no insistimos más acerca de estos asuntos ya tratados precedentemente por nosotros.

El estudio directo de las mareas se lleva á cabo actualmente por medio de aparatos, en los que, como ya hemos indicado, no se introducen multitud de correcciones, difíciles muchas de ellas de determinar y que de tomarse en cuenta convertirían los trabajos mareográficos en inagotable tarea de calculista, cuyo resultado no compensaría la fatiga producida, teniendo sobre todo presente la naturaleza del fenómeno que se analiza.

Decimos esto, porque si las variaciones del nivel del mar

fuesen de tan escasa cuantía, cual lo son las de los valores de *g* ó de los coeficientes de dilatación, por ejemplo, en su lugar estaría que, imitando los estudios que á estos asuntos se refieren, se aquilatara hasta la más leve causa de error, pequeñísima en sí, aunque muy grande, con relación á la variación estudiada; pero al medir magnitudes de tamaños tan variables que discrepan en metros unas de otras, aun en un mismo lugar, y que varían sin causas bien conocidas, y produciendo siempre sus cambios de una manera brusca y al parecer caprichosa, ya que las leyes que á estas mutaciones rigen son desconocidas, ¿no sería poco serio introducir correcciones, que pueden llegar á valer unos cuantos micrones, algunas de ellas obtenidas á costa de ímproba fatiga y jamás con absoluta certeza?

Más cuerdo parece, en el estado actual de la ciencia, en vez de medir ciertos errores para descubrir sus leyes, considerarlos como casuales y dejar encomendada á su propia combinación la tarea de destruir sus efectos, por la repetición grande de las observaciones, las cuales, sin gran gasto y con poquísimo trabajo, pueden acumularse en grandísimas cantidades; que ya llegará día en que bien se desista de medir lo eternamente variable, ó bien se aquilaten y estudien las causas y los efectos de modo tan profundo que se justifique la necesidad de fijar las leyes que á ciertos errores rigen.

En los mareógrafos ordinarios podemos señalar como causas de error de sus indicaciones, el movimiento que el agua tiene con relación á el tubo que la conduce al pozo, indicando exceso de altura si hacia ella se dirige ó dando una elevación menor que la correspondiente á las aguas en reposo, según el movimiento sea en dirección del pozo ó contraria á éste; el estado variable del interior del tubo; la salazón, ó mejor dicho, la densidad del agua; los efectos del calor y de las incrustaciones sobre el flotante; las dilataciones y contracciones de la cadena de que aquél pende y las de la polea sobre

que obra; los efectos del calor sobre la rueda que da movimiento al cordón del lápiz y los que sobre este mismo cordón produce; los errores en la colocación del lápiz y del papel y los propios del movimiento cronométrico; añadiéndose á todos éstos, y á otros que por brevedad omitimos, el muy considerable debido á la inercia mecánica de tan pesado sistema.

Si cada una de estas causas de error hubiera de tenerse en cuenta, sería tarea interminable determinar una sola cota del nivel del mar, y siguiendo el camino de procurar eliminar la mayor cantidad de errores que se pueda por el modo de ser de los aparatos de medida, nos parece conveniente el uso de los nuevos mareógrafos, menos erróneos é incomparablemente más baratos, dejando encomendada á la multiplicidad de las observaciones la eliminación de los errores.

Así, pues, al establecer un mareógrafo de sifón en una localidad determinada, dejándose de enojosos cálculos y de minuciosas observaciones, creemos que debe asignarse un valor constante para el número $13.251 \frac{1 - 0.0001797\,t}{1 - 0.0004954\,t}$ procurando tomar el promedio de los que verosímilmente pueda tener, haciendo lo propio con la corrección que en sí llevan las presiones barométricas.

6.—Cálculo aproximado de las correcciones para los mareómetros y mareógrafos del Mediterráneo.

Explicado el principio en que se fundan los mareógrafos de sifón, y deducidas las fórmulas que permiten calcular la influencia que en sus indicaciones puedan tener, tanto los cambios de temperaturas, como los de las presiones barométricas, funciones directas estos últimos de las oscilaciones del nivel de las aguas del mar, procede desde luego, al tratar de aplicar aquellos aparatos á las costas de España, estudiar cuáles son los valores que en ellas tienen esos diversos factores que acabamos de enumerar, y cómo los cálculos que

vamos á desarrollar no requieren precisión exagerada, tomaremos, solamente como base, los datos que se refieren á los mareógrafos y estaciones meteorológicas ya establecidos por el Instituto Geográfico en Cádiz, Santander y Alicante.

En el mareógrafo de este último punto, que lleva funcionando diez y nueve años, la menor cota observada del nivel del mar es de —3,^{m}8648, y la mayor, —2,^{m}8093, resultando, en su consecuencia, una máxima oscilación de 1,^{m}0555.

Por otra parte, la cota mínima de las aguas del mar en Cádiz es —5,^{m}0105, y la máxima, — 0,^{m}5465; mientras que Santander tienen los valores — 5,^{m}472 y + 0,^{m}081, los cuales acusan una oscilación máxima en este punto de 5,^{m}553 y de 4,^{m}4640 en Cádiz.

De los anteriores datos puede deducirse, como base para el establecimiento de mareógrafos, que sobrará con contar para el Mediterráneo con oscilaciones totales de 3 metros y de 6 metros para el Atlántico, siendo conveniente adoptar valores algo mayores que 3 metros para los mareógrafos que hubieran de establecerse cerca del estrecho de Gibraltar y aún más crecidos para aquellos aparatos que en este mismo se proyectara colocar.

En cuanto á las temperaturas y presiones barométricas extremas, que hayan de tomarse en cuenta para la instalación de los mareógrafos de sifón, no indicaremos más que lo estrictamente indispensable, limitándonos á presentar los estudios previos que pueden servir de ejemplo para cualquiera que se proyecte.

En Alicante, las presiones barométricas y temperaturas durante los años en que se han observado son:

Temperatura máxima.....	40°,8
Idem mínima.....	0°,6
Altura barométrica máxima.....	778^{mm},19
Idem id. mínima.....	739^{mm},94

Con estos números y los precedentemente expuestos, rela-

tivos á la oscilación de las aguas de los mares, puede estudiarse la influencia de la presión barométrica en los mareógrafos de mercurio que se establezcan en Alicante, teniendo además presente que siendo la cota del piso bajo en que está situado el mareógrafo $-1^{m},658$, con relación al cero provisional N.P.1, puede suponerse que la superficie libre del mercurio tiene aproximadamente la cota de $-1.^{m}$

Para este mareógrafo puede hacerse el cálculo con mayor precisión, como es natural, que cuando se trate de la instalación del aparato en puntos en que se desconozca la variación de altura de las aguas; pero supondremos, para discutir el asunto de un modo general, que las aguas pueden tomar todas las cotas comprendidas entre -5 y $-2m$, en lugar de $-3,86$ y $-2,81$ de las que es de esperar que no pasen en mucho; resultando así un valor mínimo para D de 1 metro y otro máximo de 4.

Tenemos, por lo tanto, como valores que en general podrán aplicarse á casi toda la costa del Mediterráneo los siguientes:

$$D = 2,^{m}5$$
$$t = 20^{\circ}$$
$$B' = 759.^{mm}$$

que no son los valores medios que á Alicante corresponden, sino los promedios aproximados de los extremos, por no querernos situar en condiciones ventajosas, que no hallaríamos en puntos distintos de Alicante, puerto en el cual se conocen esos valores medios que á temperaturas, presiones y niveles del agua corresponden, y que no se tendrían á mano en otras localidades.

Para esos valores resultan, designando, para abreviar, por C y P las fracciones que á continuación se indican.

$$C = \frac{1 - 0,0001797\,t}{1 - 0,0004954\,t} = 1,00638 \quad 13,251 \times C = 13,33554$$

$$P = \frac{2DB'}{16000 + 64t - D} = 0{,}220 \quad 13{,}251 \times C \times P = 2^{mm},93$$

$a = m \times 13{,}336 + 2^{mm},33 = m \times 13{,}336 + 0^{m},003$ próximamente.

Expresión esta última que puede aplicarse en muchos casos sin cometer errores de importancia y que facilita los cálculos, puesto que basta multiplicar la diferencia de nivel m, observada en el mercurio, entre las dos ramas del tubo en u, por el número constante 13,335 y añadirle la corrección invariable 3^{mm}.

Sin embargo, no exige grandes molestias obtener una precisión mucho mayor, y tan sólo creemos oportuno aplicar constantemente la corrección $+0,^{m}003$, deduciendo en cada caso el coeficiente, que podemos llamar escala, sin gran impropiedad, por el que ha de multiplicarse la diferencia de nivel m, observada entre las superficies de mercurio.

Y como en asuntos científicos la opinión particular de poco ó nada vale, probemos que las variaciones que sufre la corrección por presiones barométricas son completamente despreciables, y que no lo son, en cambio, las que la escala experimenta.

Como es natural, para realizar ese objeto hemos de partir de datos que correspondan á un caso extremo.

Desde luego, el mayor valor de P, y, por lo tanto, de la corrección por altura barométrica, corresponde al mínimo de t y á los máximos de D y B'. Aceptemos que:

$$D = 4m$$
$$B' = 780mm$$
$$t = -1^{\circ}$$

y con esos valores deduciremos:

$$P = \frac{2DB'}{16000 + 64t - D} = 0,^{mm}39,$$

$$C = \frac{1 - 0{,}0001797\,t}{1 - 0{,}0004954\,t} = 0{,}99968,$$

$$C.\ 13{,}251 = 13{,}247$$

$$P.\ C.\ 13{,}251 = 4{,}^{mm}17$$

$$a_p = m,\ 13{,}247 + 0{,}^{m}00417.$$

Los dos valores que para a comparamos restados, miembro á miembro, dan:

$$a - a_p = m\,(13{,}336 - 13{,}247) + (0{,}^{m}003 - 0{,}00417)$$
$$= m.\ 0{,}089 - 0{,}00117,$$

y como á una diferencia de nivel en el mercurio de $0{,}^{m}4$ corresponden más de 5 m de altura en la columna de agua, seguramente puede escribirse que, á lo más,

$$a - a_p < 0{,}4 \times 0{,}089 - 0{,}00117 = 0{,}^{m}035.$$

Tan sólo con hacer $t = 0$, conservando los valores máximos para D y B' antes aceptados, ya se obtiene:

$$C = 1$$

$$13{,}251 \times C = 13{,}251$$

$$P = 0{,}^{mm}39$$

$$P.\ C.\ 13.251 = 5{,}^{mm}168$$

$$a_p = m.\ 13.251 + 0{,}^{m}005168$$

$$a - a_p = m\,(13.336 - 13.251) + (0{,}003 - 0{,}005168)$$
$$= m\,0{,}085 - 0{,}0022 < 0{,}^{m}033$$

Basta con estos dos ejemplos para dejar demostrado que, si no exige grandes complicaciones de cálculo, conviene introducir la corrección por temperatura, sin que esto indique que aun sin ella pudieran usarse los mareógrafos de mercurio, dados su objeto, la naturaleza de la cantidad medida, la compensación que entre los errores se establece y

el limite, no superior al de los mareógrafos ordinarios, que para estos últimos hemos encontrado; pero como facilísimamente puede precisarse esa corrección y anular casi el error correspondiente, así lo haremos.

En cuanto á la corrección debida á las presiones barométricas, cuerdo parece adoptar para Alicante la de 3 mm.; ya que, aun en el caso extremo que hemos analizado, llega á producir el error de $1,^{mm}17$, pudiendo asegurarse que esos errores de variable signo no llegan en la casi totalidad de los casos á valer más que unas cuantas décimas de milímetro de agua.

No es tarea difícil calcular una tabla de valores para la escala, según la temperatura sea, y así lo hemos hecho en la que sigue:

Temperatura.	$C = \frac{1 - 0,0001797\ t}{1 - 0,0004954\ t}$	*Diferencias.*	Escalas: $e = C \times 13,251$	*Diferencias.*
— 10°	0,99686	0,00157	13,209	0,021
— 5°	0,99843	0,00157	13,230	0,021
0°	1	0,00158	13,251	0,021
5	1,00158	0,00159	13,272	0,021
10	1,00317	0,00160	13,293	0,021
15	1,00477	0,00161	13,314	0,022
20	1,00638	0,00161	13,336	0,021
25	1,00799	0,00162	13,357	0,021
30	1,00961	0,00163	13,378	0,022
35	1,01124	0,00164	13,400	0,022
40	1,01288	0,00165	13,422	0,022
45	1,01453	0,00166	13,444	0,022
50	1,01619	0,00167	13,466	0,022
55	1,01786		13,488	

De esta tabla hemos obtenido, por interpolaciones, la que sigue:

Temperaturas.	Escalas.	Temperaturas	Escalas.	Temperaturas	Escalas.	Temperaturas	Escalas.	Temperaturas	Escalas.
— 10°	13,209	4	13,268	18	13,327	32	13,387	46	13,448
— 9	13,213	5	13,272	19	13,332	33	13,391	47	13,453
— 8	13,217	6	13,276	20	13,336	34	13,396	48	13,457
— 7	13,222	7	13,280	21	13,340	35	13,400	49	13,462
— 6	13,226	8	13,285	22	13,344	36	13,404	50	13,466
— 5	13,230	9	13,289	23	13,349	37	13,409	51	13,470
— 4	13,234	10	13,293	24	13,353	38	13,413	52	13,475
— 3	13,238	11	13,297	25	13,357	39	13,418	53	13,479
— 2	13,243	12	13,301	26	13,361	40	13,422	54	13,484
— 1	13,247	13	13,306	27	13,365	41	13,426	55	13,488
0	13,251	14	13,310	28	13,370	42	13,431		
+ 1	13,255	15	13,314	29	13,374	43	13,435		
+ 2	13,259	16	13,318	30	13,378	44	13,440		
+ 3	13,264	17	13,323	31	13,382	45	13,444		

Usando la tabla precedentemente inserta, de manejo sencillísimo, se obtendrán los valores que corresponden á las alturas *q D* (fig. 1) de las columnas de agua, aplicando en Alicante y en los demás puntos de la mayor parte de la costa del Mediterráneo la corrección aditiva $+ 0^m,003$, por la presión barométrica, de la cual claro es que puede y debe prescindirse para el simple cálculo de oscilaciones, en que había de figurar á la vez, y con el mismo signo, en ambos términos de las restas que las producen.

XXII.—Estudio experimental de algunas propiedades del grisú.

POR ENRIQUE HAUSER.

TERCERA NOTA

Determinación del hidrógeno en el grisú.

La determinación del hidrógeno, en las muestras de gas antes referidas, con la exactitud y confianza necesarias en los resultados obtenidos para que estén libres de las objeciones hechas á los análisis de otros experimentadores, han ocupado principalmente mi atención. Aun sin tener en cuenta los errores que por causas químicas pueden ocurrir en la determinación del hidrógeno en el grisú por medio del eudiómetro, y que expóndré en breve, al mismo tiempo que el análisis del grisú, hay que tener en cuenta que siendo necesario para la combustión eudiométrica del grisú diluírle al menos en diez veces su volumen de aire, resulta que, aunque el volumen de gas sea suficiente para la determinación exacta del metano, es muy pequeño para hallar con cierta exactitud la cantidad de hidrógeno que dicho gas pueda contener.

En efecto; el valor del hidrógeno resulta, en una mezcla de este gas con metano, del conocimiento más ó menos exacto de la contracción habida y del volumen de ácido carbónico medido, conforme á la siguiente fórmula:

$$H = \frac{2}{3}(\text{Cont} - 2CO_2).$$

Ahora bien; si en vez de los valores teóricos de la contracción, los introducimos en la fórmula con sus errores, que

pueden ser para éstas medidas lo mismo aditivos que sustractivos, tendremos, llamando e al error posible,

$$H = \frac{2}{3}(\text{Cont} \pm e - 2(CO_2 \pm e)) =$$

$$= \frac{2}{3}(\text{Cont} - 2CO_2) + \frac{2}{3}(\pm e \mp 2e);$$

y combinando entre sí los errores, según su signo, tendremos para H los cuatro valores posibles que siguen:

$$H = \frac{2}{3}(\text{Cont} - 2CO_2) + \frac{2}{3}\begin{cases} -3e \\ -e \\ +e \\ +3e \end{cases} =$$

$$= \frac{2}{3}(\text{Cont} - 2CO_2) + \begin{cases} -2e \\ -\frac{2}{3}e \\ +\frac{2}{3}e \\ +2e \end{cases}$$

Veamos ahora cuál es el valor probable del error máximo operando en buenas condiciones: como los errores parciales de medida, que por una ú otra causa producen el error total, han de ser reducidos finalmente de alturas á volúmenes, haré en cada caso la reducción correspondiente, suponiendo que se trata de un volumen medio de gas de 100 cc., y que la parte estrecha de la bureta en que se opera se halla graduada en décimas de centímetro, pudiendo apreciarse á la vista la décima de división que tiene un milímetro de longitud.

ERRORES	En altura.	En volúmenes por 100 cc.
De lectura.. Por visual defectuosa	0,1 mm. Aq. ó Hg.	0,01 cc.
De lectura.. Por variación de la forma del menisco.	0,1 mm. Aq. ó Hg.	0,01 cc.
Por diferencia inobservada de temperatura $\frac{1^{\circ}C}{20}$ (variación correspondiente en la presión del gas y del vapor de agua entre 10 y 20° C, sometido á la presión media de 710 mm. en Madrid).....	0,17 mm. Hg.	0,024 cc.
Por variación inobservada de la altura barométrica $\frac{1}{20}$ mm....	0,05 mm. Hg.	0,007 cc.
TOTAL		0,051 cc.

es decir, de media milésima, partiendo de un volumen inicial de 100 cc., valor que concuerda con los resultados de la práctica.

Si introducimos estos valores en la fórmula antes indicada, tendremos:

$$H = \frac{2}{3}(\text{Cont} - 2CO_2) + \begin{cases} +0.102 \\ +0.034 \\ -0.034 \\ -0.102 \end{cases}$$

es decir, que si el volumen de hidrógeno no es mayor de 0,1 cc., valor que, referido al volumen del grisú (unos 9 cc.), representa un contenido de 1,1 por 100, podría darse el caso de terminar el análisis eudiométrico sin sospechar la existencia del hidrógeno, si los errores cometidos no han llegado á compensarse más ó menos parcialmente.

Igual inconveniente habríamos encontrado haciendo la combustión lenta por medio del tubo capilar de platino, según Drehschmitd. Mayor exactitud para la determinación del

hidrógeno, que por su combustión rápida en el eudiómetro, podría obtenerse, para la combustión fraccionada de dicho gas en presencia de un exceso de aire, por medio de la esponja ó negro de paladio, según el primer método de Hempel, ó por el amianto paladiado, según Winkler, pudiendo contener en dichos procedimientos hasta 16 por 100 de grisú hidrogenado la mezcla gaseosa combustible. Por el método de Drehschmitd, empleando oxígeno en vez de aire, ó el procedimiento de Dennis & Hopkins, fundado en la combustión gradual de ambos gases por la acción de una espiral incandescente de platino en presencia de un exceso de oxígeno, podía emplearse un volumen de grisú equivalente al 25 por 100 (*) del volumen total de mezcla (**). Si no existiera otro procedimiento para obtener el fin deseado, tan exacto y rápido como poco recomendado, cual es el que voy á describir ahora, me habría decidido por alguno de estos tres últimos métodos; pero considerando la importancia que habría en encontrar un procedimiento que nos diese el contenido de hidrógeno del grisú, simplemente por absorción, como se hace para la determinación del ácido carbónico, pudiendo emplear para ello, desde luego, 100 cc. de grisú ó más en cada operación, sin diluirlo previamente con ningún gas, se comprenderá que yo ensayase con insistencia el segundo método de Hempel que ofrecía dichos resultados, y que por no hallarle descripto en otro libro más que en el de su autor, había para dudar de su bondad ó de la facilidad de su aplicación; y, en efecto, por su estudio experimental, he encontrado que, para determinar grandes contenidos de hidrógeno (por ejemplo, superior á 15 por 100), son preferibles á este procedimiento, por las causas que luego indicaré, los anteriormen-

(*) Supongo al grisú pobre en hidrógeno.

(**) La aproximación, para la determinación del hidrógeno en el grisú, no aumenta al concentrar las mezclas, si no se tiene en cuenta la disminución rápida del volumen molecular del ácido carbónico al aumentar la presión. Este punto será tratado en la próxima nota.

te citados; pero para pequeñas cantidades de hidrógeno no he encontrado ninguno que le iguale. Este procedimiento se funda en la propiedad que tiene el paladio de poder absorber hasta unas 800 veces de hidrógeno cuando se halla en condiciones apropiadas, que son las que han sido determinadas por W. Hempel (*). Si hacemos pasar, al efecto, una mezcla de hidrógeno, metano y nitrógeno sobre paladio metálico, no observaremos ningún fenómeno; pero si dicho paladio se encuentra en estado de esponja y ha sido previamente cubierto de una delgada capa de subóxido del mismo metal, por su calcinación al aire, entonces se verifica una reacción enérgica, por lo cual el hidrógeno desaparece por completo si el contacto con el paladio ha sido suficientemente íntimo. Si después de terminada la reacción, lo cual se conoce fácilmente por el enfriamiente del metal, hacemos pasar una corriente de aire sobre él, se quemará por completo el hidrógeno absorbido y regenerado el subóxido de paladio, quedando así dispuesto el paladio para una nueva absorción, que puede repetirse un número indefinido de veces (**).

Esta reacción, como vemos, es parcialmente una combustión, y en parte, una oclusión. Igual propiedad que la esponja de paladio calcinada al rojo naciente, tiene el negro de paladio obtenido por reducción por el alcohol de una solución fuertemente alcalina de cloruro paladioso, por ser este negro de paladio un compuesto oxigenado ó una mezcla de paladio y óxido de dicho metal.

Veamos ahora cómo se opera en la práctica. El paladio

(*) *Methods of Gas Analysis by,* Dr. Walther Hempel. Trad. inglesa, pág. 181.

(**) Esta experiencia no debe hacerse con el tubo de paladio que se emplea para la determinación del hidrógeno; pues si la temperatura se eleva mucho en una ú otra reacción, puede fundirse en varios puntos el paladio, como he podido observar luego al microscopio, disminuyendo entonces mucho su poder absorbente de hidrógeno. El negro de paladio, saturado de hidrógeno, es de color gris, que pasa á negro azulado al oxidarlo.

negro, ó su esponja, se introducen, en forma de gránulos de $^1/_2$ á 2 mm. de diámetro (no en polvo, que dificultaría mucho el paso del gas) (*), en un tubo en *U* de unos 4 mm. de diámetro interior y unos 20 cm. de longitud total, en el que pueden caber fácilmente de 3 á 4 gramos; con objeto de evitar el acceso posible de la humedad de la bureta y de la pipeta de trabajo al paladio, va éste protegido en cada extremo por un taponcito flojo de amianto de próximamente 1 centímetro de longitud. Los extremos de este tubo pueden soldarse á unos tubos capilares, doblemente acodados, que le han de poner en comunicación con los receptáculos de gas; pero como puede ser conveniente, en ciertos casos, sacar el paladio del tubo para lavarle ó calcinarle, prefiero adoptar la disposición indicada en la figura 1, en la cual se ve que los tubos capilares penetran en el interior del tubo *U* hasta tocar el tapón de amianto *a*, y van unidos ambos al extremo por medio de un tubo de goma (**).

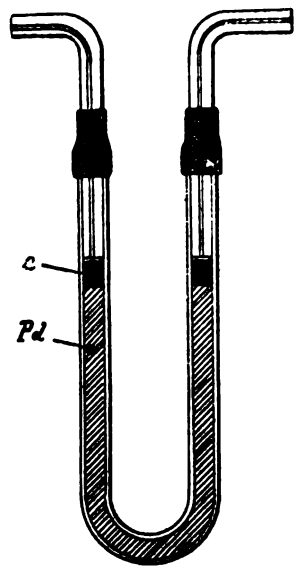


Figura 1.ª

(*) Para granular el negro de paladio, que se halla, generalmente, en el comercio, en forma de polvo fino, basta humedecerlo, en porciones de 1 gramo, sobre la tapa de un crisol de platino; moverlo con una punta de platino para hacer bolas, y después de secar al baño-maría, calentar gradualmente la tapa hasta el rojo naciente y no más, dejándola enfriar despacio. Para romper los gránulos gruesos, sin hacer mucho polvo, debe emplearse una punta fina de platino iridiado, ó, en su defecto, la de un cortaplumas; después se le criba por un tamiz fino, por ejemplo, de 440 mallas por cm². El negro de paladio, una vez calcinado, se suelda difícilmente á sí mismo, aun comprimiéndole previamente.

(**) Creo que en vez de poner el tubo, en *U*, de cristal, podía em-

El paladio ha de conservarse seco dentro del tubo, sin pegarse á las paredes del mismo. Preparado así el tubo de paladio, se coloca dentro de un vaso *V* y en conexión de un lado con la bureta *B* que contiene el gas, y del otro con la pipeta *P*; que ha de contenerle durante las pasadas sucesivas (fig. 2).

La bureta puede contener agua corriente, agua salada o mercurio (*). La pipeta *P* puede contener agua con 25 por 100 de ácido sulfúrico, agitada previamente con grisú hidrogenado para saturarla de dichos gases. Si han de hacerse muchos ensayos de grisú por hidrógeno, conviene que la bureta esté terminada por una llave de doble vía, *l*; una para introducir el gas en ella, y la otra para conducirle desde la bureta á través del tubo de paladio. Por lo demás, es casi inútil añadir que, si se desea operar con exactitud, es indispensable que la bureta tenga una envolvente de agua, *e*, de preferencia con circulación, y con termómetro, *t*, en que se aprecien décimas de grado.

Dispuestas así las cosas, se comprende fácilmente el modo de operar; y una vez hecha la lectura del volumen de gas contenido en la bureta *B*, gas que debe privarse previamente de ácido carbónico, oxígeno y óxido de carbono (**), por las razones que luego indicaré, se vierte agua á 100° en el vaso *v*, que rodea al tubo con paladio, sin que aquélla llegue á mojar los tubos de goma de éste, haciendo circular en seguida, y lentamente, el gas á través de dicho tubo, pasándole al menos tres veces en cada sentido; el agua caliente tiene por objeto iniciar la reacción, hacer que termine rápidamente

---

plearse con ventaja un tubo de cuarzo, para evitar roturas por las variaciones rápidas de temperatura á que está sometido.

(*) No conviene emplear en esta bureta agua sulfúrica que pudiera reaccionar sobre el pirogalato potásico ó la potasa de los tubos de absorción, dando lugar á un desprendimiento de ácido carbónico que conduciría á errores y dudas sobre el procedimiento.

(**) O en cantidad inferior, este último, á 0,5 por 100.

(pues ya empieza el frío) é impedir que la temperatura del tubo exceda de la debida y tuviera entonces lugar la com-

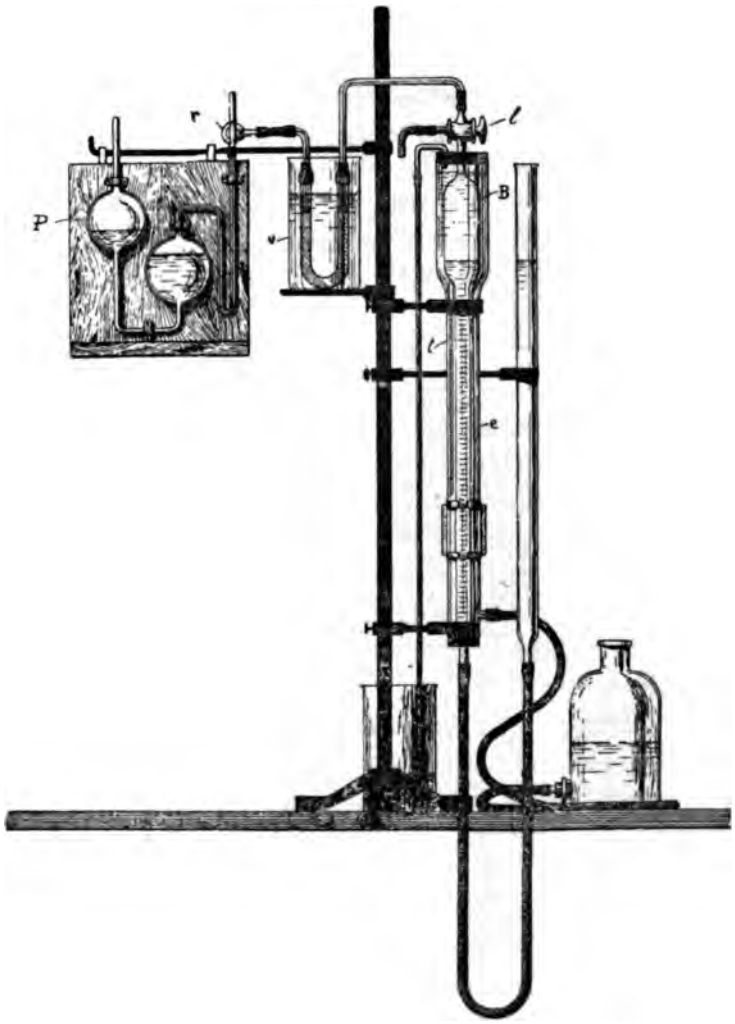


Figura 2.ª

bustión de parte del grisú. Terminada esta primera parte de la operación, se substituye el agua caliente por agua á la temperatura de la habitación, y se hace pasar el gas todavía

un par de veces á través del tubo con paladio para enfriarle por completo, evitándose así, además, el calentamiento excesivo del agua de la envolvente (si no es de circulación). Hecho esto, y al terminar el segundo pase, se dejan todavía algunos centímetros cúbicos de agua en la pipeta *P*, para evitar que, por una contracción imprevista, pase agua de esta pipeta al tubo con paladio; y cuando se ve que el gas que hay en la bureta no se contrae más, entonces se hace pasar el resto del gas á ésta, haciendo la lectura definitiva. Respecto al modo de hacer las correcciones de temperatura y presión, ya hablaré en otra nota al ocuparme del análisis eudiométrico del grisú.

De las precauciones que hay que observar para obtener resultados exactos y comparables, he de decir lo siguiente: en primer término, hay que determinar el volumen del espacio vacío del tubo de paladio, y para ello recomienda Hempel elevar 91° su temperatura, al mismo tiempo que, cerrado por un extremo, comunica por el otro con una bureta auxiliar graduada llena de agua; como el aumento de volumen del gas de 9 á 100° C, es de un tercio de su contenido, y en cambio, el gas medido en la bureta auxiliar está á la temperatura ordinaria, su volumen es sólo $^3/_4 \times {}^1/_3$ de el del tubo, ó sea $^1/_4$ del volumen de éste. Para hacer la determinación por este medio, es necesario que el tubo con paladio esté perfectamente seco, cosa no siempre fácil de disponer en cualquier instante, si ha sido ya usado. Por esta causa, y por el error que siempre produce la desigualdad de temperatura entre las distintas partes del tubo, empleo de preferencia el siguiente método en que opero á temperatura constante y presión variable. Para ello, el tubo de paladio ha de estar exento de gases ocluídos, lo cual es fácil de conseguir haciendo pasar por él, mientras está caliente á 100°, una corriente lenta de aire, ó tres ó cuatro veces el contenido de la bureta llena de aire hasta que no se observe en él contracción; hecho esto, se substituye el agua caliente del vaso por agua á la temperatura de la habitación,

y cerrando el tubo por un extremo, se hace comunicar el otro con una bureta de Hempel llena de mercurio, y produciendo en ésta cierta depresión (por ejemplo, 30 cm.), que llamaremos h, se mide el volumen v, que el aire ocupa en la bureta; y tomando nota de la altura barométrica H en ese instante y de la temperatura ambiente para conocer la tensión del vapor de agua, f, podemos en seguida calcular el volumen x del vacío del tubo de paladio.

En efecto; por la ley de Boyle & Mariote, tenemos

$$(x + v)(H - h - f) = x(H - f);$$

de donde

$$x = v\left(\frac{H - h - f}{h}\right).$$

Las precauciones de orden químico que hay que observar en este procedimiento son las siguientes:

1.° La muestra de gas que se ensaya no ha de contener ni óxido de carbono ni vapores clorhídricos (*), como tampoco gran cantidad de vapores de bencina ó alcohol; esto lo explica Hempel considerando que estos gases tienen más afinidad por el oxígeno del óxido de paladio que el hidrógeno y debilitan la acción de dicho cuerpo antes que empiece su reacción con el hidrógeno. El metano, etileno, ácido carbónico y nitrógeno son indiferentes á la temperatura en que se opera, así como el vapor de agua é indicios de amoníaco.

2.° Es de importancia para la exactitud, que el gas que se analiza no contenga oxígeno en cantidad prácticamente apreciable, y esto por causa de varios fenómenos que pueden ocurrir.

a) Si el gas no tuviera hidrógeno, y el paladio, por haberlo usado antes con un gas hidrogenado, contuviese ocluí-

(*) Según Hempel, el ácido clorhídrico, que tiene efecto nocivo sobre el paladio en esponja, es inactivo para el negro de paladio.

do hidrógeno, éste se quemaría total ó parcialmente con el oxígeno del gas, y habría una concentración sin haber hidrógeno; esto se evita fácilmente si, al terminar el análisis de un gas hidrogenado, se llena la bureta de aire, que se hace pasar en caliente por el tubo de paladio hasta que no se produzca contracción.

b) Si por el tubo de paladio, hallándose libre de hidrógeno, hacemos pasar un gas hidrogenado, con exceso de oxígeno, todo el hidrógeno se quemará, y entonces la cantidad de oxígeno existente será dos tercios de la contracción y no el valor de ésta, exponiéndonos á un error.

c) Si el oxígeno existe en cantidad no excesiva con relación al hidrógeno (*), éste encuentra más facilidad en oxidarse por el óxido de paladio de la esponja, que está más condensado, que por el del aire, y como el volumen de ese oxígeno es prácticamente nulo, el del hidrógeno será mayor que los dos tercios de la contracción medida, pudiendo quedar oxígeno sobrante á pesar de estar en defecto, como he podido comprobar en algún caso.

d) Si hay muy poco oxígeno con relación al hidrógeno ó al paladio está muy hidrogenado, éste quemará todo el oxígeno presente, según *(a)*, además de absorber el hidrógeno existente, y la contracción será mayor que el volumen de hidrógeno, sin guardar relación determinada.

e) Si existe bastante oxígeno con mucho hidrógeno y poco metano y los gránulos de paladio son demasiado gruesos, la reacción podrá ser demasiado intensa en su interior, excediendo el calor del rojo, y quemarse un poco de grisú si el enfriamiento del tubo no resulta suficiente. Este error pue-

(*) Hempel cree que el oxígeno se quema completamente *en todo caso* si existe hidrógeno suficiente para ello; en mi opinión, la combustión completa del oxígeno depende, no sólo de la cantidad de hidrógeno existente, sino del mayor poder ocluyente del paladio empleado (que es el que hace combinarse al hidrógeno con el *oxígeno gaseoso)*, con relación al poder oxidante del óxido de paladio que contiene.

de evitarse fácilmente pasando primero lentamente el gas por el tubo de paladio rodeado de agua fría hasta que se haya absorbido la mayor parte del hidrógeno, y poniendo después el agua caliente para continuar la absorción.

Vemos por esto los variados errores á que puede conducirnos la presencia del oxígeno, que es muy fácil evitar absorbiéndole previamente el análisis.

Esta absorción del oxígeno se puede hacer por el pirogalato potásico si tenemos la precaución de que este reactivo absorbente se halle á unos 30° C., la cual es fácil de conseguir, teniéndole en invierno próximo á una estufa, y en cualquier tiempo cubriendo el tubo de absorción por una pequeña manta, eléctricamente caldeada (*).

También puede hacerse la absorción del oxígeno por el hidrosulfito sódico, según Franzen (**), con más facilidad y rapidez que en el pirogalato potásico.

El fósforo no es recomendable para absorber el oxígeno

(*) El pirogalato potásico que empleo, lo preparo conforme á la fórmula de Hempel:

A	Potasa á la cal.....	120 grs.	p. e = 1,66 = 57° Be.
	Agua.....	80 —	
B	Acido pirogálico (pirogalol)..	5 grs.	
	Agua.....	15 —	

Se introduce primero en la bureta por aspiración la solución de potasa y luego la de ácido pirogálico.

(**) Esta disolución absorbente se prepara mezclando

Hidrosulfito sódico.....	30 grs.
Agua.....	150 cc.
Lejía de potasa cáustica.....	24 cc.

á 1,43 p. e = 43,5° Be.

El objeto de la potasa es facilitar la conservación del reactivo y disminuir un poco su energía desoxidante.

Esta disolución debe prepararse en un frasco cerrado, echando primero el agua alcalinizada, que debe llenarlo casi por completo, y luego el hidrosulfito en polvo, tapando bien en seguida y agitando para disolverlo; hecho esto, se substituye el tapón del frasco por otro de

en pequeña cantidad á menor temperatura de 14° C. y en presencia de los hidrocarburos que pueden acompañar al grisú. Todos estos reactivos absorbentes hay que saturarlos de grisú hidrogenado antes de usarlos.

Si se quiere evitar en absoluto la presencia del oxígeno en la bureta, conviene dejar en el tubo de paladio y capilares adjuntos el residuo gaseoso de la operación anterior.

Para juzgar de la exactitud de este método, baste decir que en una mezcla de grisú puro, desoxigenado, no habiendo obtenido contracción alguna en el análisis, por no contener hidrógeno, añadí entonces $^1/_2$ cc. de este gas puro, pudiendo observar, después de los pases necesarios, una contracción de $^1/_2$ cc. (*).

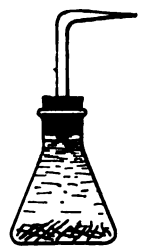


Figura 3.ª

Cuando se añade hidrógeno para cerciorarse del estado del paladio, es necesario dejar la mitad del gas ensayado en la pipeta *P* mientras se añade el hidrógeno en la bureta *B* por la otra vía de la llave *l*, haciendo después pasar el gas dejado en la pipeta para mezclar bien el hidrógeno introducido. Si en vez de operar así, introdujéramos el hidrógeno con la bureta llena de gas, aquél pasaría casi puro sobre el paladio sin estar diluído en el gas de la bureta por quedar en la parte alta de la misma, y, por lo tanto, al ser absorbido por aquél no habríamos comprobado su poder de absorción sobre el hidrógeno diluído. La duración de uno de éstos análisis por hidrógeno con absorción de oxígeno é igualación de temperatura no excede de veinte minutos, y si deter-

---

caucho con dos tubos, uno que llega hasta el fondo del mismo, y otro corto que se pone en comunicación con la tubería de gas, ó mejor, con un gasómetro con grisú, mientras el líquido sale aspirado hacia la pipeta por el tubo largo. De este modo se evita el contacto con el aire y el reactivo no se debilita.

(*) Para introducir hidrógeno en la bureta empleé, con éxito, un pequeño frasco generador terminado en un tubo afilado convenientemente encorvado. (Figura 3.)

minamos en el residuo el metano, por su límite de inflamabilidad, deduciendo después el nitrógeno, por diferencia podremos tener hecho un análisis en veinticinco minutos (*).

Para contenido de hidrógeno superior á 15 por 100 ó 20 por 100 no considero preferente este método á los demás: pues si la esponja ó negro de paladio está muy oxidado, la cantidad de vapor de agua que se forma al penetrar el gas es tan grande que el tubo se llena de humedad, la cual, aunque marcha al otro extremo del tubo, vuelve al hacer la parada en sentido contrario, penetrando en él y dificultando mucho la facultad de absorción. Esto puede disminuirse en gran manera, haciendo marchar el gas con mucha lentitud y poniendo algodón en los extremos del tubo; pero entonces el procedimiento pierde en simplicidad, siendo preferible en este caso diluir el gas con aire, según el primer método de Hempel; en cambio, usado para la determinación de pequeñas cantidades de hidrógeno, no he encontrado hasta ahora ninguno más conveniente por todos conceptos, siendo especialmente aplicable al reconocimiento del hidrógeno en el grisú natural, de lo cual ya hablaré en su día.

(Laboratorio de la Escuela de Minas.)

(*) Para determinar cantidades muy pequeñas de hidrógeno, interpongo entre el tubo de paladio y la pipeta una llave *r* de dos vías; una que puede hacer comunicar este extremo del tubo de paladio con el exterior, y la otra vía, con la pipeta, la cual permite antes de empezar la operación desalojar el aire del tubo de paladio por medio del mismo gas que va á analizarse y libre ya de oxígeno.

XXIII.—Fundamento teórico de la Fototopografía.

POR JOSÉ MARÍA TORROJA.

PARTE SEGUNDA

SECCIÓN PRIMERA

Relaciones entre los puntos de tres proyecciones de una figura en el espacio, exteriores á sus ejes singulares.

(Continuación.) (*)

Vamos ahora á estudiar con algún detalle la relación trivalente trilineal que acabamos de establecer.

A un punto cualquiera de uno de los planos, el S, por ejemplo, corresponden en S' rectas que pasan por p' y en el S'' otras rectas que pasan por q'': la ecuación de la recta homóloga de un punto $M(x_1, y_1)$ en el plano S' se halla poniendo en lugar de x é y estos valores particulares en la ecuación (7).

A un punto $M(x_1, o)$, del eje pq, corresponde en el plano S' la recta $y'=o$ y en el S'' la $y''=o$, ó sea, los otros dos ejes singulares, como puede verse substituyendo aquellos valores particulares $(x=x_1, y=o)$ en las ecuaciones (7) y (8). A dos puntos singulares de dos de los planos corresponde, pues, cualquier punto del eje singular del tercer plano: es decir, que el tercer punto del terno, cuyos dos primeros son singulares, queda indeterminado (por este procedimiento general): resultado que la última de las ecuaciones obtenidas comprueba fácilmente.

(*) Véase el número de Diciembre de 1907, página 380.

Si tenemos dos curvas, M' y N', de órdenes α y β respectivamente, el lugar geométrico en el plano S de los puntos conjugados con los de estas dos curvas es otra curva, L, de orden $\alpha\beta$ que tiene α puntos múltiples de orden β, y β puntos múltiples de orden α, todos situados en el eje singular $p\,q$, siendo estos puntos conjugados con los de intersección de M' y N''con $p'q'$ y $p''q''$ respectivamente. En efecto: M' corta á $p'q'$ en α puntos: la recta homóloga de uno de éstos, A', en la relación que enlaza los puntos de los planos S' y S'' corta á N'' en β puntos, cada uno de los cuales forma con aquél un par de homólogos, y como uno de ellos es singular y el otro no, el tercer punto A es el singular conjugado con A'; los puntos A' y A son múltiples de orden β en las curvas M' y L respectivamente, porque uno de esos puntos, el A, por ejemplo, es conjugado con todos los de intersección de M' con $p'q'$: luego L tiene α puntos, de grado de multiplicidad β, comunes con el eje singular pq, que son conjugados con los α puntos de intersección de M' con $p'q'$. Análogamente podemos ver que la curva L tiene β puntos de orden α comunes con pq, que son los conjugados con los β de intersección de N'' con $p''q''$. La curva L no puede tener con pq más de $\alpha\beta$ puntos comunes, como conjugados de los α singulares de intersección de M' con $p'q'$ y los β de N'' con $p''q''$, porque si tuviera más, los puntos correspondientes de éstos en las dos relaciones que enlazan los puntos del plano S, con los de los S' y S'' también habrian de ser singulares y comunes, por tanto, á M' y $p'q'$ ó á N'' y $p''q''$, contra lo supuesto. Esto demuestra que la curva L es de orden $\alpha\beta$ como queríamos probar.

El teorema que acabamos de demostrar es un caso particular del de Mac-Laurín Braikenridge, enunciado en el capítulo anterior.

Las proposiciones anteriores demuestran cumplidamente que la relación trivalente trilineal, que hemos establecido en

este artículo, es completamente idéntica á la que en el capítulo anterior vimos que existía entre tres proyecciones de una figura de tercera categoría. Allí, como aquí, dados los puntos conjugados de dos planos, podemos determinar el del tercer plano que forma terno con ellos; pero en uno y otro caso, esto es imposible para los puntos de los ejes singulares.

Vamos en lo que sigue á ver de llenar esta laguna, exponiendo las relaciones que ligan los puntos de estas rectas, y que nos permiten, por procedimientos especiales, hacer aquella determinación.

SECCIÓN SEGUNDA

Relaciones entre los puntos de los ejes singulares de tres figuras de segunda categoría, proyecciones de una figura en el espacio.

Dos procedimientos indicamos en la Primera Parte de este Trabajo para poder obtener ternos de puntos homólogos de los ejes singulares: consistía el primero en verificar las construcciones en el plano de los tres ejes, y el segundo, en trazar por los dos puntos dados m y m', de los ejes pq y $p'q'$, dos rectas cualesquiera en los planos S y S': el punto en que la recta del tercer plano S'', homóloga de las dos anteriores, corta al eje singular $p''q''$, es el punto conjugado con los dos dados. A cada uno de estos procedimientos corresponde uno de los artículos siguientes, en que se sistematizan aquellos métodos, se da el medio de construir fácilmente todos los ternos de puntos que se desee, y se consigue, aun en este caso de excepción, operar solamente en los planos de proyección abatidos sobre uno de ellos, que se toma como plano del dibujo.

I

Relación proyectiva entre los puntos de los tres ejes singulares.

Investiguemos primeramente en el plano de los tres ejes las relaciones que ligan los puntos situados sobre estas rectas.

Ante todo, vemos inmediatamente que, dados dos puntos m y m' en dos ejes singulares (fig. 9), el tercer punto pertenece al tercer eje, y queda completamente determinado

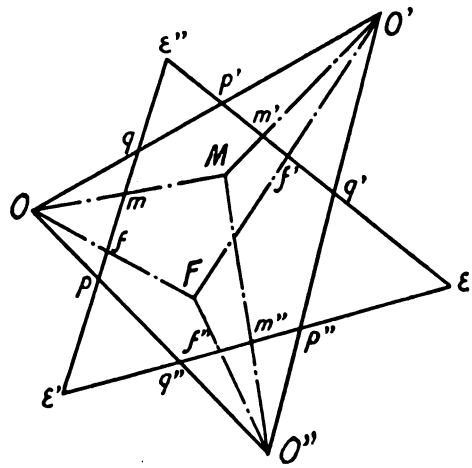


Figura 9.ª

como intersección de éste con la recta que une el centro correspondiente O'' con el punto M en que se cortan las otras dos proyectantes Om y $O'm'$: los puntos de las tres series están, pues, relacionados unívocamente.

Si tomamos en un eje singular un punto m, el punto correspondiente en el espacio, M, está en la recta Om, y todos los pares de puntos m' y m'' que forman terno con aquél, serán proyecciones de los puntos de la recta Om desde los centros O' y O'' sobre los ejes $p'q'$ y $p''q''$, y formarán dos series proyectivas, como perspectivas de una misma: en és-

tas series son homólogos los vértices correspondientes, como q'' y p', y los contrarios, como q' y p''.

Si aplicamos el teorema correlativo del de Carnot (*) al triangulo $OO'O''$ y los puntos M y F, tendremos

$$O.MFO'O'' \times O.'MFO''O \times O.''MFOO' = 1,$$

y sustituyendo cada una de estas razones dobles por las de los segmentos interceptados en los haces de vértices O, O' y O'' por los ejes singulares pq, $p'q'$ y $p''q''$, resulta:

$$\left(\frac{mq}{mp}:\frac{fq}{fp}\right)\left(\frac{m'q'}{m'p'}:\frac{f'q'}{f'p'}\right)\left(\frac{m''q''}{m''p''}:\frac{f''q''}{f''p''}\right)=1.$$

Si tomamos ahora el punto F como punto unidad y determinamos cada punto M por sus coordenadas proyectivas referidas á éste y al triángulo $\epsilon\epsilon'\epsilon''$ formado por las trazas de los ejes singulares con el plano de los tres centros, vemos inmediatamente que el valor

$$\frac{mq}{mp}.\frac{m'q'}{m'p'}.\frac{m''q''}{m''p''}=\frac{fq}{fp}.\frac{f'q'}{f'p'}.\frac{f''q''}{f''p''}=C$$

es constante, cualquiera que sea el punto M del plano, y

(*) Dice así: Si proyectamos los vértices de un polígono plano $ABCDE$ desde dos puntos M y N de su plano, no situado en ninguno de los lados, y consideramos los haces de las cuatro rectas que pasan por cada vértice, en todos los cuales se considera como primero y segundo rayos los que pasan respectivamente por los puntos M y N, y como tercero y cuarto, los dos lados del polígono, tomados en permutación circular, el producto de todas éstas figuras simples es la unidad, es decir, que

$$A.MNEB \times B.MNAC \times C.MNBD \times D.MNCE \times E.MNDA = 1.$$

(*E. Torroja.* — Tratado de Geometría de la Posición. — Madrid, 1899, página 271.)

dadas dos de las proyecciones, m y m', tenemos inmediatamente determinada la tercera m'', que es el objeto que nos propusimos en este estudio.

Pasemos ahora á determinar la constante C, que llamaremos *característica* de la relación proyectiva en que nos estamos ocupando. En cada eje singular damos el nombre de *punto límite* al homólogo de los puntos del infinito de los otros dos ejes. Así, el punto límite de la serie $p'q'$ (fig. 10) es el l' que corresponde al punto L del plano, cuyas otras

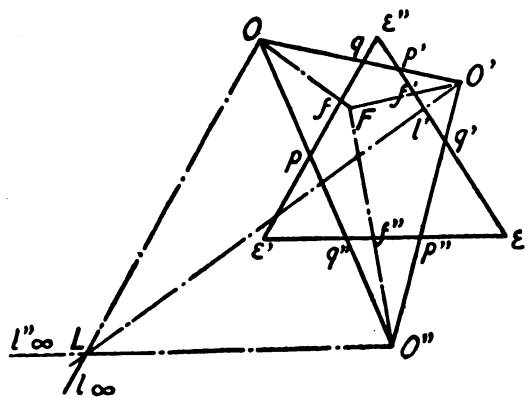


Figura 10.

dos proyecciones son los puntos l_∞ y l'_∞ del infinito de las series pq y $p''q''$.

Substituyendo en la fórmula anterior los valores correspondientes á este caso, resulta

$$\left(1 : \frac{fq}{fp}\right)\left(\frac{m'q'}{m'p'} : \frac{f'q'}{f'p'}\right)\left(1 : \frac{f''q''}{f''p''}\right) = 1,$$

ó sea

$$\frac{m'q'}{m'p'} = \frac{fq}{fp} \cdot \frac{f'q'}{f'p'} \cdot \frac{f''q''}{f''p''} = C,$$

y como lo mismo podemos escribir para los otros dos puntos límites, vemos que

$$\frac{lq}{lp} = \frac{l'q'}{l'p'} = \frac{l''q''}{l''p''} = C,$$

es decir, que: «los puntos límites dividen á los segmentos limitados por los pares de puntos fijos p y q, p' y q', p'' y q'', en pares de segmentos cuya razón es constantemente igual á la característica».

Si en vez de los puntos del infinito, eligiéramos los puntos medios de los segmentos pq, $p'q'$ y $p''q''$, podríamos hacer un razonamiento enteramente análogo, con sólo variar el signo de aquellas razones; luego cada punto límite se corresponde también con los puntos medios de los otros dos ejes singulares. Vemos que la construcción de los puntos límites puede hacerse por medio de los puntos del infinito ó de los puntos medios de los segmentos que en cada eje singular limitan sus puntos principales, y ni en uno ni en otro caso presenta dificultad alguna.

Determinado uno cualquiera de los puntos límites, tenemos el valor de la característica, y podemos, por tanto, construir ternos de puntos conjugados. Vamos, sin embargo, á hallar una expresión de aquella constante, en función de elementos que puedan deducirse inmediatamente de la posición relativa de los centros de proyección y sus planos respectivos. Observemos para ello (fig. 9), que

$$mq = 0q\,\frac{\operatorname{sen} m0q}{\operatorname{sen} 0mq}; \quad mp = 0p\,\frac{\operatorname{sen} m0p}{\operatorname{sen} 0mp};$$

$$m'q' = 0'q'\,\frac{\operatorname{sen} m'0'q'}{\operatorname{sen} 0'm'q'}; \quad m'p' = 0'p'\,\frac{\operatorname{sen} m'0'p'}{\operatorname{sen} 0'm'p'};$$

$$m''q'' = 0''q''\,\frac{\operatorname{sen} m''0''q''}{\operatorname{sen} 0''m''q''}; \quad m''p'' = 0''p''\,\frac{\operatorname{sen} m''0''p''}{\operatorname{sen} 0''m''p''},$$

y además

$$\text{sen } 0mq = \text{sen } 0mp; \quad \text{sen } 0'm'q' = \text{sen } 0'm'p';$$
$$\text{sen } 0''m''q'' = \text{sen } 0''m''p''.$$

Substituyendo estos valores en la expresión de C, hallada en la pág. 472, obtenemos

$$\left(\frac{0q}{0p}\cdot\frac{0'q'}{0'p'}\cdot\frac{0''q''}{0''p''}\right)\left(\frac{\text{sen } m0q}{\text{sen } m0p}\cdot\frac{\text{sen } m'0'q'}{\text{sen } m'0'p'}\cdot\frac{\text{sen } m''0''q''}{\text{sen } m''0''p''}\right) = C,$$

y como por el teorema de Ceva, aplicado al triángulo $00'0''$ y al punto M, sabemos que

$$\frac{\text{sen } m0q}{\text{sen } m0p}\cdot\frac{\text{sen } m'0'q'}{\text{sen } m'0'p'}\cdot\frac{\text{sen } m''0''q''}{\text{sen } m''0''p''} = 1,$$

resulta en definitiva para C el valor

$$C = \frac{0q}{0p}\cdot\frac{0'q'}{0'p'}\cdot\frac{0''q''}{0''p''},$$

en función de las distancias de cada centro á los puntos principales de su plano correspondiente, como nos habíamos propuesto.

Resumiendo todo lo anterior, vemos que la relación proyectiva entre las series situadas sobre los ejes singulares queda determinada si se conocen los seis puntos principales y la característica; y como ésta puede deducirse inmediatamente cuando se conoce un terno de puntos conjugados, queda también determinada aquella relación proyectiva cuando se dan los seis puntos principales y un terno de puntos homólogos. Determinada esta proyectividad en los tres ejes, es decir, en los tres planos de proyección, vemos que es ya posible, como pretendíamos, determinar ternos de puntos de

los ejes singulares por construcciones efectuadas en un sólo plano sobre el cual se han abatido los tres de proyección.

Como casos particulares notables, citaremos aquellos en que la característica tiene los valores -1 y $+1$. En el primero se corresponden los puntos medios de los tres segmentos pq, $p'q'$ y $p''q''$, pues

$$(-1)(-1)(-1) = -1;$$

y cada uno de ellos con los puntos del infinito de los otros dos ejes

$$(-1)(+1)(+1) = -1;$$

los puntos límites se confunden, según esto, con aquellos puntos medios. En el caso en que $C = +1$, los puntos del infinito de las tres series forman un terno

$$(+1)(+1)(+1) = +1;$$

además, cada uno de ellos se corresponde con los puntos medios de los segmentos de los otros dos ejes

$$(+1)(-1)(-1) = +1,$$

y los puntos límites son los del infinito.

II

Relación proyectiva entre haces de rectas homólogas.

Si tomamos en los planos S y S' dos haces de rectas, cuyos vértices sean puntos conjugados, de cualquier modo que establezcamos entre los rayos de estos dos haces una relación unívoca podremos considerar á éstos como proyecciones de una radiación de rectas, de vértice W, cuya ter-

cera proyección en el plano S'' será un haz de rectas cuyo vértice es el punto homólogo de los vértices de los dos haces dados.

Tres rayos correspondientes cualesquiera r, r' y r'', proyecciones de una recta R de la radiación W, cortan á los respectivos ejes singulares en puntos t, t' y t'', que forman un terno como proyecciones del punto T, traza de aquella recta con el plano de los tres ejes. Recíprocamente, tres puntos correspondientes, t, t' y t'' de los tres ejes singulares, unidos con tres puntos conjugados cualesquiera, w, w' y w'', dan tres rectas que son conjugadas, como proyecciones de la recta que une los puntos del espacio que tienen por proyecciones cada uno de dichos ternos. Como las series de puntos homólogos situados en los ejes singulares son proyectivas, si unimos cada punto t con el mismo w, cada punto t' con el mismo w', y cada punto t'' con el mismo w'', obtendremos tres haces proyectivos de vértices w, w' y w''.

Es decir, que «en tres sistemas planos proyectivos trilineales, tres haces de rectas correspondientes son proyectivos dos á dos».

Como, según vimos en la primera parte de este capítulo, si uno de los puntos de un terno es un punto principal, uno de los otros dos ha de serlo, ya contrario, ya correspondiente del anterior; si una de las rectas de un haz pasa por un punto principal, uno de los rayos conjugados con ella en los haces homólogos, habrá de cortar al eje singular de su plano en uno de los puntos principales de éste. En cada uno de los tres haces de rectas que forman un terno, hay dos rayos que pasan uno por cada punto principal, y podemos llamarlos rayos principales de aquellos haces. En el caso particular de ser los vértices de los haces w, w' y w'' tres puntos singulares, los rayos principales de cada haz se confunden en uno, que es el eje singular de su plano.

Aun pudiera uno de los haces tener por vértice uno de los dos puntos principales p ó q de su plano; en este caso, uno

de los otros dos haces homólogos, el del plano S', por ejemplo, tendrá necesariamente su vértice en uno de los puntos p' ó q', pudiendo éste ser correspondiente ó contrario del anterior: el tercer vértice no quedará determinado. Supongamos, primeramente, que dos vértices de dos haces homólogos son dos puntos principales correspondientes p' y q''; el tercer vértice puede ser un punto cualquiera del plano correspondiente (*). Para determinar el rayo del haz w correspondiente con dos cualquiera de los haces p' y q'', se toman arbitrariamente dos puntos correspondientes en estos rayos y se determina el que forma terno con ellos; éste, unido con el punto w, nos da el rayo buscado. Si los dos centros dados son dos puntos principales contrarios, q' y p'', por ejemplo, el tercer centro puede ser uno cualquiera del eje pq. Si los dos rayos homólogos r' y r'' se cortan en un punto del eje e, los dos planos proyectantes se confunden y r es una recta cualquiera del tercer plano; si esto no sucede, los planos proyectantes se cortan según $0'0''$ y la tercera proyección, r, es el eje singular pq.

De estas consideraciones se deduce un modo de determinar ternos de puntos conjugados de los tres ejes singulares, considerándolos como secciones producidas por estos ejes en los ternos de rectas conjugadas de tres haces homólogos. Según acabamos de ver, conviene tomar como vértices w, w' y w'' un terno de puntos que no pertenezcan á los ejes singulares; pueden tomarse para esto los tres puntos, uno de cada plano, superpuestos en el vértice V del triedro formado por los tres planos S, S' y S''. Estableciendo la proyectividad entre cada par de series de las que estudiamos, por tres pares de puntos homólogos, quedarán relacionados proyectivamente los haces por los pares de rayos que proyectan aquéllos pares de puntos, siendo ya fácil la resolución del pro-

(*) Aunque las construcciones explicadas para obtención de ternos de puntos homólogos dejan á este punto w indeterminado, la figura 2.ª nos hace ver que no puede ser otro que el 0.

blema en que nos ocupamos, por construcciones efectuadas únicamente en los planos de proyección.

PROBLEMAS AUXILIARES

Determinación de los puntos principales por construcciones efectuadas en los planos de proyección.

En todo lo anterior hemos supuesto conocida la posición de los puntos principales de cada uno de los planos en que se nos dan las dos proyecciones de una figura en el espacio. Si aquel dato nos faltara, no podríamos reconstruir la figura que formaban los planos y centros de proyección, al obtenerse éstas. Nos es preciso, por tanto, poder determinar la posición de aquellos puntos principales por construcciones efectuadas en los mismos planos de las figuras dadas, del mismo modo que hemos resuelto todos los demás problemas en esta Segunda Parte. Supondremos primeramente que conocemos uno de los dos puntos principales, y después nos ocuparemos del caso en que los dos nos sean desconocidos.

PROBLEMA I.—*Dado uno de los puntos principales,* q, *y cinco pares de puntos* a-a′, b-b′, c-c′, d-d′ *y* e-e′, *proyecciones de otros tantos* A, B, C, D *y* E, *determinar el punto principal,* p′ *del otro plano*. Si suponemos resuelto el problema y conocido el punto p', tendremos que

$$p' \,.\, a'b'c'd' \barwedge q \,.\, abcd,$$

y

$$p' \,.\, a'b'c'e' \barwedge q \,.\, abce,$$

por ser estos haces de rectas secciones del haz de arista 00′, cuyos planos pasan por los puntos dados A, B, C, D y E.

El lugar geométrico de los puntos p', vértices de ha-

ces $p'.a'b'c'd'$, proyectivos entre sí, y cuyos rayos pasan constantemente por a', b', c' y d', es una curva de segundo orden, $\Sigma_{p'}^{e'}$, que pasa también por estos cuatro puntos: para construir esta curva, basta proyectar desde a' los puntos b', c' y d' y determinar el cuarto rayo, $a'a'$, en la proyectividad

$$a'.a'b'c'd' \barwedge q.abcd,$$

con lo que obtendremos la tangente $a'a'$ á la cónica $\Sigma_{p'}^{e'}$ en el punto a', y ésta quedará definida por los cuatro puntos a', b', c', d' y la tangente en el primero.

Análogo razonamiento, aplicado á los haces $q.abce$ y $p'.a'b'c'e'$, permite construir el cuarto rayo $b'b'$ del haz

$$b'.a'b'c'e' \barwedge q.abce,$$

y determinar la cónica $\Sigma_{p'}^{d'}$ definida por los cuatro puntos a', b', c', e' y la tangente $b'b'$ en el segundo de ellos, sobre la que ha de hallarse igualmente el punto principal buscado p'.

Las cónicas $\Sigma_{p'}^{e'}$ y $\Sigma_{p'}^{d'}$ tienen comunes los tres puntos dados $a'b'c$, y además se cortan en otro, que es el p' buscado.

PROBLEMA II.—*Dados en las figuras* S *y* S′ *seis pares de puntos* a-a′, b-b′, c-c′, d-d′, f-f′ *y* g-g′, *proyecciones de otros tantos* A, B, C, D, F y G, *cuatro de los cuales,* A, B, C *y* D, *están en un plano* (*), *determinar los puntos principales de las dos figuras dadas.* Unamos el F con el O y llamemos Φ al de intersección de la recta así obtenida con el plano $ABCD$. Los dos puntos F y Φ tendrán confundidas sus proyecciones f y φ, y á éstas corresponderán en el plano S' dos puntos distintos f' y φ'. Este último nos es desconocido, pero puede determinarse por los procedimientos de la Geo-

(*) En una vista fotográfica pueden hallarse en un muro ó en las orillas de un estanque, lago, etc.

metría de la Posición, como homólogo del φ, en la homografía en que los puntos a, b, c, d, φ, son homólogos de los a', b', c', d', φ', como proyecciones de cinco puntos de un plano. Hallado ya este punto φ', como los O, F y Φ están en línea recta, habrán de estarlo igualmente los f' y φ' y tendremos una recta, la $f'\varphi'$, sobre la que ha de hallarse el punto principal buscado p'. Uniendo ahora O con G, obtendremos, como traza de la recta así obtenida con el plano $ABCD$, otro punto Γ y, repitiendo para éste los razonamientos que acabamos de hacer para el Φ, tendremos otra recta $g'\gamma'$, que con la $f'\varphi'$ nos determina por completo el punto p' buscado.

Repitiendo los mismos razonamientos para el otro centro O', llegaremos á determinar en el plano S dos rectas que, por su intersección, nos darán el otro punto principal q (*).

PROBLEMA III.—*Dados siete pares de puntos, proyecciones de otros tantos puntos cualesquiera* A, B, C, D, E, F *y* G, *determinar los dos puntos principales* q *y* p'.

La solución de éste problema, que es de tercer grado, presenta alguna dificultad, por lo que no entramos en su estudio. Puede verse una solución analítica en el trabajo *Die cubische Gleichung, von welcher die Lösung des Problems der Homographie von M. Chasles abhängt, von Hern O. Hesse zu Heidelberg* (**), y otra geométrica en el estudio del profesor *Rud. Sturm*, titulado *Das Problem des Projectivität* (***).

(*) Dr. Gino Loria.— *Vorlesungen über Darstellende Geometrie.*— Leipzig.—1907, pág. 209.

(**) *Journal... von Crelle.*—Tomo 62, 1850, pág. 188.

(***) *Mathematische Annalen.* - Tomo 1.°, 1869, pág. 543.

Programa de premios para el concurso del año 1909.

Artículo 1.° La Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid abre concurso público para adjudicar tres premios á los autores de las memorias que desempeñen satisfactoriamente, á juicio de la misma Corporación, los temas siguientes:

1.° «*Exposición clara y sencilla del Cálculo de las Probabilidades.*»

El libro ha de estar correctamente escrito y en estilo sencillo de índole didáctica y de vulgarización de esta importante rama de las Matemáticas.

Debe comprender los principios fundamentales de la misma y sus múltiples aplicaciones, expuestos de manera que sean inteligibles y de provechoso uso para las personas que sólo poseen los conocimientos de las matemáticas elementales. En todo caso, las fórmulas de análisis superior podrán quedar relegadas, así como las tablas numéricas más usuales, á un apéndice colocado al final de la obra. En el texto de ella convendrá, sin embargo, aclarar la doctrina con ejemplos numéricos discretamente elegidos.

Se quiere, en suma, poner al alcance de las personas de ilustración general, ó que no han hecho especiales estudios de la ciencia matemática, aquel «precioso instrumento de investigación y análisis, creado sí por los matemáticos, pero, mucho más que á estos, al jurisconsulto, al médico, al anticuario, al historiador, al político y al estadista necesario».

2.° «*Estudio de los electromotores de corriente alterna, monofásicos y polifásicos.*»

Deberá comprender la teoría, la comparación de los sistemas de motores y los trabajos y resultados originales del autor.

3.° «*Enumeración sistemática de los hongos parásitos de plantas cultivadas, observados en una comarca española.*»

En apoyo del texto deberá acompañar el autor las muestras de plantas atacadas por los hongos.

Art. 2.° Los premios que se ofrecen y adjudicarán, conforme lo merezcan las memorias presentadas, serán de tres clases: *premio* propiamente dicho, *accésit* y *mención honorífica.*

3.° El premio consistirá en un diploma especial en que conste su adjudicación; una medalla de oro, de 60 gramos de peso, exornada con el sello y lema de la Academia, que en sesión pública entregará el Sr. Presidente de la Corporación á quien le hubiere merecido y obtenido, ó á persona que le represente; retribución pecuniaria, al mismo autor ó concurrente premiado, de 1.500 pesetas; impresión, por cuenta de la Academia, en la colección de sus Memorias, de la que hubiere sido laureada, y entrega, cuando esto se verifique, de 100 ejemplares al autor.

4.° El *premio* se adjudicará á las memorias que no sólo se distingan por su relevante mérito científico, sino también por el orden y método de exposición de materias, y redacción bastante esmerada, para que desde luego pueda procederse á su publicación.

5.° El *accésit* consistirá en diploma y medalla iguales á los del premio y adjudicados del mismo modo; y en la impresión de la memoria, coleccionada con las de la Academia, y entrega de los mismos 100 ejemplares al autor.

6.° El *accésit* se adjudicará á las memorias poco inferiores en mérito á las premiadas y que versen sobre los mismos temas, ó, á falta de término superior con que compararlas, á las que reunan condiciones científicas y literarias aproximadas, á juicio de la Corporación, á las impuestas para la adjudicación ú obtención del premio.

7.° La *mención honorífica* se hará en un diploma especial, análogo á los de *premio* y *accésit*, que se entregará también en sesión pública al autor ó concurrente agraciado ó á persona que le represente.

8.° La *mención honorífica* se hará de aquellas memorias verdaderamente notables por algún concepto, pero que, por no estar exentas de lunares é imperfecciones, ni redactadas con el debido esmero y necesaria claridad para proceder inmediatamente á su publicación, por cuenta y bajo la responsabilidad de la Academia, no se consideren dignas de *premio* ni de *accésit*.

9.° El concurso quedará abierto desde el día de la publicación de este programa en la *Gaceta de Madrid* (*), y cerrado en 31 de Diciembre de 1909, hasta cuyo día se recibirán en la Secretaria de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, cuantas memorias se presenten.

10. Podrán optar al concurso todos los que presenten memorias que satisfagan á las condiciones aquí establecidas, sean nacionales ó extranjeros, excepto los individuos numerarios de esta Corporación.

11. Las memorias habrán de estar escritas en castellano ó latín.

12. Las memorias que se presenten optando al premio se entregarán en la Secretaría de la Academia, dentro del plazo señalado en el anuncio de convocatoria al concurso, y en pliegos cerrados, sin firma ni indicación del nombre del autor, pero con un lema perfectamente legible en el sobre ó cubierta que sirva para diferenciarlas unas de otras. El mismo lema de la memoria deberá ponerse en el sobre de otro pliego, también cerrado, dentro del cual constará el nombre del autor y las señas de su domicilio ó paradero.

13. De las memorias y pliegos cerrados, el Secretario de la Academia dará, á las personas que los presenten y entre-

---

(*) Se publicó en la *Gaceta* del día 8 de Enero de 1908.

guen, un recibo en que consten el lema que los distingue y el número de su presentación.

14. Los pliegos señalados con los mismos lemas que las memorias dignas de *premio* ó *accésit* se abrirán en la sesión en que se acuerde ó decida otorgar á sus autores una ú otra distinción y recompensa, y el Sr. Presidente proclamará los nombres de los autores laureados en aquellos pliegos contenidos.

15. Los pliegos señalados con los mismos lemas que las memorias dignas de *mención honorífica* no se abrirán hasta que sus autores, conformándose con la decisión de la Academia, concedan su beneplácito para ello. Para obtenerle se publicarán en la *Gaceta de Madrid* los lemas de las memorias en este último concepto premiadas, y, en el improrrogable término de dos meses, los autores respectivos presentarán en Secretaría el recibo que de la misma dependencia obtuvieron como concurrentes al certamen, y otorgarán por escrito la venia que se les pide para dar publicidad á sus nombres. Transcurridos los dos meses de plazo que para llenar esta formalidad se conceden sin que nadie se dé por aludido, la Academia entenderá que los autores de aquellas memorias renuncian á la honrosa distinción que legítimamente les corresponde.

16. Los pliegos que contengan los nombres de los autores no premiados ni con *premio* propiamente dicho, ni con *accésit*, ni con *mención honorífica*, se quemarán en la misma sesión en que la absoluta falta de mérito de las memorias respectivas se hubiere decidido. Lo mismo se hará con los pliegos correspondientes á las memorias agraciadas con *mención honorífica* cuando, en los dos meses de que trata la regla anterior, los autores no hubieren concedido permiso para abrirlos.

17. Las memorias originales, premiadas ó no premiadas, pertenecen á la Academia, y no se devolverán á sus autores. Lo que, por acuerdo especial de la Corporación, podrá devolvérseles, con las formalidades necesarias, serán los comprobantes del asunto en aquellas memorias tratado, como mode-

los de construcción, atlas ó dibujos complicados de reproducción difícil, colecciones de objetos naturales, etc. Presentando en Secretaría el resguardo que de la misma dependencia recibieron al depositar en ella sus trabajos como concurrentes al certamen, obtendrán permiso los autores para sacar una copia de las memorias que respectivamente les correspondan.

Madrid, 31 de Diciembre de 1907.

PUBLICACIONES RECIBIDAS DESDE 1.º DE JULIO DE 1907

(Continuación.)

Royal Dublin Society. — The Economie Proceedings of the... — Vol. I. — Jul.-Aug. 1907. Parts. 10-11. — Dublin.

Royal Dublin Society. — The Scientific Proceedings of the... — Vol. XI (N. S.) N.º 16-20. — July-August, 1907. — Dublin.

Royal Irish Academy. — Proceedings of the. - Volume XXVI, Section B, N.º 9; Section C, N.º 13 al 16. — Dublin, 1907.

Royal Dublin Society. — The Scientific Transactions of the... — Vol. XI (Ser. II). — VI. — The deurities and Spcific heats of some alloys of the Iron. — By. W. Brower, B. Sc. — Dublin, 1907.

Royal Society. — Proceedings of the... — Serie A, Vol. 79. N.º 531 al 534; B, N.º B 533, B 534.

Dublin University. — The... — Calendar for the jear, 1907-1908. — Vol. I. — Dublin, 1907.

Museum of Comparative Zoology at Harvard College. — Bulletin of the... — Vol. LI. — N.º 2, 3, & 4. — Cambridge, Mass, U. S. A.

Manchester Literary and Philosophical Society. Memoirs and Proceedings of the... — 1906-1907. — Vol. 51. Part. 3. — Manchester.

The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magasine and Journal of Science. — Sixth series. — N.º 79 al 82 (July to October, 1907). — London.

The Observatory. - A monthly rivieco of Astronomy. — N.º 385, July, 386, August; 388, October. — 1907, London.

Nature. - A wectky illustrated journal of Science. — N.º 1965, vol. 76, June 27, 1907; 1966; 1968; 1969. 1971 al 1981, August 8, October 24, 1907. London.

Terrestrial Magnetism and Almospheric Electricity.—Vol. XXII, N.° 1-2.—March-Juin 1907.—London, Cincinnati, Berlin.

The Astrophysical Journal.—Volume XXV Number 5; XXVI, 1; 2.

Natal Governnent Museum.—Colonny of Natal Second Report of the...—year Euding, 31 st December, 1905. -London, 1907.

Geological Survey of India. — Memoirs of the... — Palæontologia India.—Series XV.— Vol. V. Memoir N.° 2.—The Fauna of the Hymalayan Musehelkalk. — Plates. I to. XVII. By Carl Diechner, Ph. D.—Calcutta, 1907.

Geological Survey of India.—Records of the... Vol. XXXV. —Part. 2-3-1907. Calcutta, 1907.

Department of Agriculture in India.— Memoirs of the...—Chemical series, June, 1907, vol. I. N° 3; July, 1907, I, 4.—Entomological series, June, 1907, I, 2; 3; 4; Juli, 5.—Botanical series, April 1907, I, 6; July, 1907, 1, Part. 2.—Calcutta.

Howard, M. A. (Cantab.) A. R. C. S. (Lond.) F. C. S., F. L. S., Imperial Economie Botanist.— Bulletin N.° 4-1906.—Agricultural Research Institute, Pusa.—First Report on the Fruit Experiments at Pusa. - Calcutta, 1905.

Public Library, Museums, and National Gallery of Victoria. — For 1906. — Report of the Trustees of the... — With a Statement of Iricome and Expenditure for the financial jear 1905-6. — Melbourne.

Australiam Museum. – Records of the... - Edited by the curator.—Vol. VI. N.° 5. — Sydney, 18 th. July. 1907.

North C. M. Z. S. (Alfred J.) Australiam Museum Sidney.— Special Catalogue, N.° 1. — Nests and Eggs of Birds found breeding in Australia and Tasmania By...—Vol. II.—Part. II.—Sydney, 1907.

Earthquake Investigation Committee (Imperial).— Bulletin of the... —Vol. I. — N.° 3-4. — June-August, 1907. — Tokio, Japan.

Earthquake Investigation Committee. — Publications of the... — In foreign languages, N.° 23, N.° 24. — Tokio, 1907.

Sampachi Fukuzawa.—Vier Mathematische Abhandlungen Von... —Tokio, 1907.

American Academy of Medicine.—Bulletin of the... Vol. VIII.— N.° 4-5. August, 1907. — Octobre, 1907. — Easton Pt.

American Mathematical Society.—Transactions of the... — Volume 8. — Number 3.—July. 1907 —Lancaster and New York, 1907.

American Museum of Natural History.—Memoirs of the... —Volume XI. Part II.—The Chukchee Religion by W. Bogrras. — Leiden, 1907. New York.

American Museum of Natural History.— The American Museum Journal.— Volume VII. - Number 6.—October, 1907. - New York City.

United States Department of Agriculture. — Yearbook of the... — 1906.— Wáshington, 1907.

Bureau of Standards Department of Commerce and Labor. — Bulletin o the .. — Vol. 3. N.° 2.— Wáshington, 1907.

Pensilvania Museum and School of Industrial Art.—Thisty-first Annual Report, 1907. — Philadelphia.

Peabody Institute of the City of Baltimore. – Fortieth Anual Report June 1. 1907. — Baltimore.

University of California Publications — Bulletin of the Department of Geo logy. – Vol. 5. N.° 9. pp. 149-153, 155 170.—Pls. 13-14 Botany.– Vol. 2, N.° 14, pp. 309-315, Sept 27, 1907. Vol 3. N.° 14, pp. 343-368, Plate 34, 21 text. figures, Sept 28, 190. – Berkeley.

Gaceta Farmacéutica Española. — Revista. Año 10.°, núms. 117-118.— Barcelona, 1907.

España y América.—Revista. Año V, núms. 21-22-23 y 24.—Madrid, 1907.

Razón y Fe.—Revista. Tomo 19, núms. 3 4.—Madrid, 1907.

Revista de Medicina y Cirugia Prácticas. — Año 31, núms. 1001 á 1005. Madrid, 1907.

Revista de Montes.—Año 31, núms. 739 40-41 y 42.—Madrid, 1907.

Gaceta Médica Catalana.— Revista. Tomo 29, núms. 128 29 y 30.—Barcelona, 1907.

Gaceta Sanitaria de Barcelona. — Año 19, núms. 10-11.--Barcelona, 1907.

La Salud Pública. — Revista de Higiene y de Tuberculosis. Año III, núme ros 34-35.—Valencia, 1907.

Gaceta Médica del Sur de España.—Año 25, núms. 587-88 y 89.—Gra nada, 1907.

Sociedad Geográfica (Real).—Revista de Geografía Colonial y Mercantil. Tomo IV, núm. 10. Boletín. Tomo 49 (4.° trimestre 1907). — Madrid, 1907.

Institución libre de Enseñanza.—Boletín. Año 31, núms. 570 571.—Madrid, 1907.

Sociedad Española de Historia Natural (Real).—Boletín. Tomo 7.° núms. 6-7-8-9.—Memorias. Tomo I, núms. 21 y 22.—Madrid, 1907.

Revista de Farmacia —Año 51, núms. 9-10.—Barcelona, 1907.

Revista Minera, Metalúrgica y de Ingeniería.—Año 58, núms. 2.134 á 140. Madrid, 1907.

España Automóvil.—Revista. Año 1.°, núms. 6-7 y 8.—Madrid, 1907.

Madrid Científico. - Revista. Año 14, núms. 575 á 579.—Madrid, 1907.

Vida Marítima.—Revista de Navegación y Comercio. Año 6.°, núms 210 á 214.—Madrid, 1907.

La Farmacia Española.—Revista. Año 39, núms. 45 á 51. — Madrid, 1907.

Revista Española de Dermatología y Sifiliografía.—Año IX, núm. 105 106.— Madrid, 1907.

El Monitor de la Farmacia y de la Terapeútica. — Revista. Año 13, núms. 436 á 440.—Madrid, 1907.

(Continuará).

XXIV.— Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia tercera.

SEÑORES:

Prosigamos el estudio de la teoría de la Elasticidad por el método de Lamé y sus análogos.

Recordarán mis oyentes ó mis lectores, que este método se descompone en cuatro partes, en rigor, como en cuatro partes se descomponía el método de Cauchy.

1.° Estudio de las tensiones en cada punto de un sólido elástico.

2.° Estudio de las deformaciones para dicho punto.

3.° Expresión de dichas tensiones, en función de las cantidades que definen la deformación en general.

4.° Determinación de las ecuaciones generales de equilibrio.

Y comenzamos en la conferencia precedente la primera parte, ó sea el estudio de las tensiones.

Y decíamos: las tensiones para cada punto del sólido elástico, en las infinitas direcciones que irradian de dicho punto, ¿podrán ser arbitrarias?

Y demostrábamos que no podian serlo, y lo demostrábamos imaginando un poliedro infinitamente pequeño alrededor del punto en cuestión y buscando sus condiciones de equilibrio.

Pero precisando más el problema, agregábamos: en vez de un poliedro cualquiera, tomaremos dos de los más elementales, á saber; *un paralelepípedo* infinitamente pequeño, cuyas caras sean paralelas á los planos coordenados, y *un*

tetraedro infinitamente pequeño también, que luego definiremos, y al que daremos el nombre de tetraedro de Cauchy, porque dicen algunos autores, que fué el primero que lo imaginó en las teorías de la Física matemática.

Este paralelepípedo y este tetraedro, que por decirlo así, son clásicos en estas teorías, han de servirnos más adelante para obtener las ecuaciones del movimiento ó del equilibrio del sistema elástico; mas por el pronto hemos de aplicarlos tan sólo al estudio de la distribución de las tensiones alrededor de cada punto.

Ya empleamos el paralelepípedo, y obtuvimos relaciones notables entre las componentes de dichos esfuerzos para las tres caras principales del sólido.

Vimos, en efecto, según las notaciones establecidas en la conferencia anterior, que se tiene

$$X_y = Y_x; \quad X_z = Z_x; \quad Y_z = Z_y.$$

Que las representábamos, para abreviar, por

$$T_3, \; T_2, \; T_1.$$

Ahora pasemos al problema general de las tensiones.

***

Necesitamos acudir al tetraedro de Cauchy, que evidentemente nos va á resolver el problema general con facilidad suma.

Este tetraedro $OABC$ tiene tres caras: AOB, AOC COB, paralelas á los tres planos coordenados de las xy, de las xz y de las yz; advirtiendo que estos tres últimos planos no están representados en la figura 12. La cara restante ABC es arbitraria y su dirección está definida por tres cosenos directores, α, β, γ, de la normal n á dicha cara; es

decir: que α representa el coseno del ángulo que forma la normal n á la cara ABC con el eje de la x; β, el coseno del ángulo que forma dicha normal, con el eje de las y; y γ, el coseno del ángulo que forma con el eje de las z.

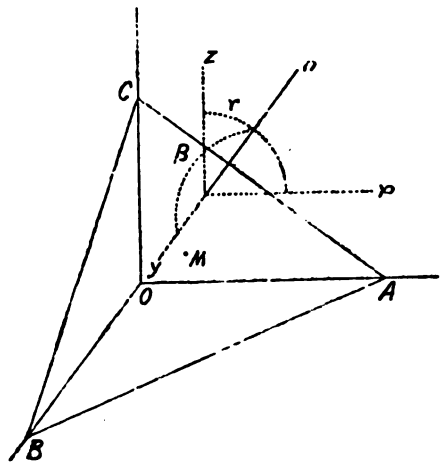


Figura 12.

Llamando n á la normal, tendremos, pues,

$$\alpha = \cos(n, x) \quad \beta = \cos(n, y) \quad \gamma = \cos(n, z),$$

como se indica en la figura.

En rigor, estos cuatro planos ponen en relación, para un punto cualquiera M, las tensiones sobre tres planos paralelos á los coordenados, con la tensión sobre un plano cualquiera ABC.

Y en efecto; si por el punto M trazamos cuatro planos paralelos á las cuatro caras de este tetraedro, como se ve en la figura 13, tendremos por dicho punto M trazados cuatro planos paralelos, según acaba de indicarse, á los de la figura 12.

Respecto á los AMB, AMC, CMB (fig. 13), bien claro

se ve este paralelismo y correspondencia; respecto al *PP*, decimos que es paralelo á la cara *ABC* de la figura 12, que es la cuarta cara del tetraedro.

Pero debemos recordar aquí lo que ya indicamos al tratar del poliedro en general, á saber: que los cuatro planos de la figura 13 que pasan por el centro *M* del tetraedro (un punto cualquiera: por ejemplo, el centro de gravedad), están infinitamente próximos á los cuatro planos indicados luego, admitiendo que *el sistema es continuo,* porque si en algún punto no lo fuese, para éste caería por su base todo lo que vamos diciendo, es evidente que la tensión sobre el plano *AMB* (fig. 13) será próximamente igual á la tensión sobre la cara *AOB* de la figura 12, y lo mismo pasa á las otras dos caras principales del tetraedro.

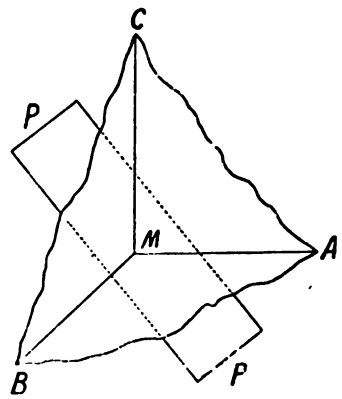


Figura 13.

De igual suerte, la tensión sobre la cara *ABC* de la figura 12 será próximamente la misma que sobre el plano *PP* de la figura 13.

De dónde se deduce que buscar la relación entre las tensiones correspondientes á las cuatro caras del tetraedro, es lo mismo que buscar la relación entre los cuatro planos de la figura 13, que son cuatro planos que pasan por un mismo punto *M*.

Mas, aun dejando fijos los tres planos paralelos á los coordenados, el plano *PP* puede variar en infinitas direcciones.

Luego *podemos establecer relaciones entre la tensión de un plano cualquiera, PP,* y *las de los tres planos paralelos á los coordenados.*

En breves palabras: una tensión cualquiera en función de

tres tensiones únicas. Esto dicho en términos generales, que ahora precisaremos.

***

Pero nada más fácil que establecer relaciones entre la tensión correspondiente á la cara *A B C* (fig. 12) y las tensiones de las otras caras.

No hay más que hacer lo que ya dijimos en la conferencia anterior: escribir las ecuaciones de equilibrio del tetraedro. Para las notaciones y para la marcha de los cálculos en esta parte, seguiremos el folleto ya citado de Mr. Sarrau, que es claro, sencillo y metódico.

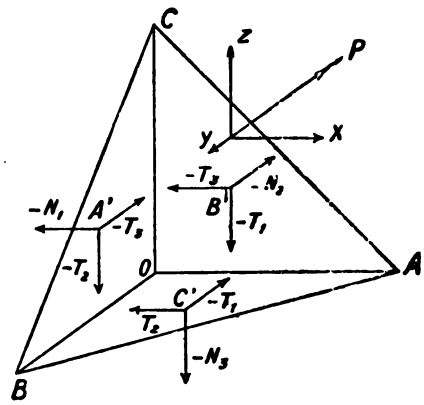


Figura 14.

Sea el teatraedro (fig. 14) *O A B C.*

Las áreas de las caras laterales, las representaremos por

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3,$$

perpendiculares, respectivamente, á los ejes x, y, z,

De suerte que si representamos por Ω el área de la cara ABC, recordando que los cosenos de los ángulos, que forma su normal con los ejes, los hemos representado por α, β,

γ, y observando que cada cara lateral es la proyección de Ω sobre el plano de dicha cara, tendremos evidentemente:

$$\omega_1 = \Omega\alpha, \quad \omega_2 = \Omega\beta, \quad \omega_3 = \Omega\gamma. \qquad (1)$$

Veamos ahora las fuerzas que actúan sobre las cuatro caras del tetraedro; así como la fuerza que actúa en su masa. Determinemos las componentes, paralelas á los tres ejes, de todas estas fuerzas, é igualemos á cero cada una de estas tres sumas.

De las fuerzas que actúan sobre la masa podemos prescindir, porque las componentes serán proporcionales al volumen, que es un infinitamente pequeño de tercer orden, puesto que las dimensiones lineales del tetraedro son de primero.

Y al hablar de las fuerzas que actúan sobre el volumen, lo mismo podemos referirnos á las fuerzas exteriores, que á las fuerzas de inercia, que también son proporcionales al volumen del tetraedro.

Sobre la cara OBC actúa una fuerza, cuyas componentes son:

$$+N_1, \quad +T_2, \quad +T_3,$$

y estas son las acciones, como hemos dicho tantas veces, *de la parte de la derecha sobre la izquierda.* Dichas acciones no están marcadas en la figura.

Pero las que nosotros necesitamos son las acciones sobre el tetraedro; es decir, de la parte de *la izquierda sobre la derecha*, de modo que serán

$$-N_1 - T_2 - T_3,$$

según se ve en la figura.

Del mismo modo, las fuerzas que actúan sobre la cara OCA serán

$$-N_2, \quad -T_1, \quad -T_3,$$

Y por fin sobre la cara AOB actuará una tensión, cuyas componentes serán

$$-N_3, \quad -T_1, \quad -T_2.$$

Por otra parte, sobre la cuarta cara ABC suponemos que actúa una fuerza P cuyas componentes representaremos por X, Y, Z.

Esta P es precisamente la tensión sobre dicha cara Ω.

De todas estas fuerzas que hemos enumerado, tenemos que tomar para cada ecuación las paralelas á cada uno de los ejes.

Por ejemplo:

Las paralelas al eje de las x serán $-N_1$, $-T_2$, $-T_3$ y X según se ve en la figura. Pero no olvidemos que estas son las tensiones por unidad de superficie, y que para tener la fuerza total sobre cada cara hay que multiplicar por el área de dicha cara, de suerte que las fuerzas que actúan paralelamente al eje de las X serán,

$$-N_1\omega_1, \quad -T_2\omega_3, \quad -T_3\omega_2, \quad X\Omega,$$

puesto que, como se ve en la figura, $-N_1$ corresponde á la cara ω_1; $-T_2$ corresponde á la cara ω_3; $-T_3$ corresponde á la cara ω_2. X corresponde á la cuarta cara del tetraedro Ω.

Sumando estas cuatro componentes, é igualando á cero, tendremos

$$-N_1\omega_1 - T_3\omega_2 - T_2\omega_3 + X\Omega = 0,$$

ó bien,

$$X\Omega = N_1\omega_1 + T_3\omega_2 + T_2\omega_3,$$

y dividiendo por Ω

$$X = N_1 \frac{\omega_1}{\Omega} + T_3 \frac{\omega_2}{\Omega} + T_2 \frac{\omega_3}{\Omega}.$$

Pero las ecuaciones (1) permiten substituir las relaciones de las áreas por los cosenos directores, de modo, que en definitiva tendremos para primera ecuación de equilibrio

$$X = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma.$$

Otro tanto podemos repetir respecto al eje de las y, aunque procederemos con más rapidez en la explicación.

Las tensiones paralelas á este eje, según se ve en la figura, son:

$$-T_3, \quad -N_2, \quad -T_1, \quad Y,$$

y estas tensiones, multiplicadas por las áreas, darán las componentes de los esfuerzos sobre las caras del tetraedro, paralelamente al eje de las y, que serán

$$-T_3\omega_1, \quad -N_2\omega_2, \quad -T_1\omega_3, \quad Y\Omega.$$

Tendremos, pues,

$$-T_3\omega_1 - N_2\omega_2 - T_1\omega_3 + Y\Omega = 0,$$

y también,

$$Y\Omega = T_3\omega_1 + N_2\omega_2 + T_1\omega_3,$$

ó dividiendo por Ω,

$$Y = T_3\frac{\omega_1}{\Omega} + N_2\frac{\omega_2}{\Omega} + T_1\frac{\omega_3}{\Omega},$$

que en virtud de las ecuaciones (1) se reduce á

$$Y = T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma,$$

y es la segunda ecuación de equilibrio.

Por último, para el eje de las z podremos hacer las mismas consideraciones y resultará:

Tensiones paralelas al eje de las z, $-T_2$, $-T_1$, $-N_3$, Z.

Para las fuerzas, multiplicando las tensiones anteriores por las áreas,

$$-T_2\omega_1, \quad -T_1\omega_2, \quad -N_3\omega_3, \quad Z\Omega,$$

y la suma de estas componentes, igualada á cero, dará

$$-T_2\omega_1 - T_1\omega_2 - N_3\omega_3 + Z\Omega = 0;$$

ó bien,

$$Z = T_2\frac{\omega_1}{\Omega} + T_1\frac{\omega_2}{\Omega} + N_3\frac{\omega_3}{\Omega},$$

y, finalmente,

$$Z = T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma,$$

que es la tercera ecuación de equilibrio.

***

En suma, las tres ecuaciones de equilibrio del tetraedro, serán:

$$X = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma,$$
$$Y = T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma,$$
$$Z = T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma.$$

Estas ecuaciones nos demuestran, que para cada punto definido por las coordenadas x, y, z y alrededor de dicho punto, las componentes de la tensión, es decir, X, Y, Z, dependen de seis cantidades, N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, que serán siempre las mismas para cada punto M, y de los tres cosenos directores α, β, γ de la normal al plano al cual se refiera la tensión.

Dado, pues, un plano cualquiera, las componentes de la

tensión, ó de otro modo, la tensión misma y su dirección, quedarán perfectamente definidas.

Pero entiéndase bien: quedarán definidas cuando se conozcan las N y T, y éstas no las conocemos todavía; de modo que el problema no queda completamente resuelto. Lo que hemos hecho ha sido expresar las incógnitas en función de las tres variables independientes α, β, γ y de las seis cantidades N y T.

Para resolver el problema por completo, y esto lo haremos mas adelante, será preciso que determinemos para cada punto las N y T en función de x, y, z, si el problema es de equilibrio, y en función de estas cantidades y de t, si es un problema dinámico de Elasticidad.

***

Aquí pudiéramos dar por terminado el estudio de las tensiones; pero, generalmente, los autores dan una ó varias representaciones gráficas de la distribución de tensiones alrededor de un punto M, y nos someteremos á este sistema, definiendo tres superficies de segundo grado, que pueden designarse con los nombres de *superficie directriz, elipsoide de tensiones* y *elipsoide de planos elásticos.*

Para cada punto, la posición y la magnitud de estas tres superficies será distinta en general; pero su naturaleza geométrica y analítica, por decirlo de este modo, será la misma. Sus coeficientes serán funciones de x, y, z, y es claro que deberán considerarse como constantes para cada punto que se elija, y distintos en valor numérico al pasar de un punto á otro.

Consideremos, pues, un punto del sólido, lo que de él digamos, pudiéramos decir de otro cualquiera, y estudiemos sucesivamente las tres superficies indicadas.

***

Superficie directriz, ó cuadrática directriz.—Sea M (fig. 15) un punto cualquiera del sólido elástico.

Hagamos pasar por este punto M un plano cualquiera, *pp;* sea MP la tensión correspondiente á dicho plano, y NA la normal al mismo.

Supongamos que por el punto M se trazan tres ejes paralelos á los ejes coordenados, Mx, My, Mz.

A estos ejes vamos á referir la superficie de que se trata, que la definiremos del siguiente modo.

Proyectemos la tensión MP sobre la normal al plano:

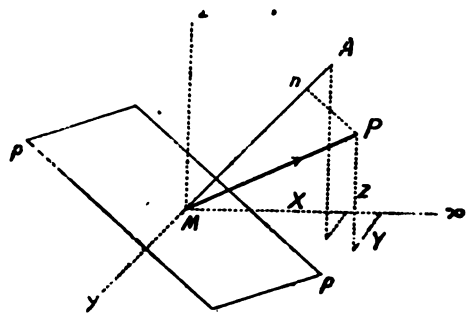


Figura 15.

dicha proyección será An, cuyo valor se obtiene proyectando sobre MA las tres componentes X, Y, Z de la tensión, que evidentemente formarán con la normal ángulos cuyos cosenos serán α, β, γ.

Tendremos, pues:

$$\text{proyección de } MP = Mn = X\alpha + Y\beta + Z\gamma =$$
$$= (N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma)\,\alpha + (T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma)\,\beta +$$
$$+ (T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma)\,\gamma,$$

ó multiplicando y ordenando

$$Mn = N_1\alpha^2 + N_2\beta^2 + N_3\gamma^2 + 2\,T_1\beta\gamma +$$
$$+ 2\,T_2\alpha\gamma + 2\,T_3\alpha\beta.$$

Y llamando N á esta componente de la tensión, resultará, por último,

$$N = N_1\alpha^2 + N_2\beta^2 + N_3\gamma^2 + 2\,T_1\beta\gamma + 2\,T_2\alpha\gamma + 2\,T_3\alpha\beta.$$

Fijemos bien las ideas. Pueden presentarse dos casos.

En la figura 15′, si descomponemos el plano pp en dos hojas para más claridad, una que vaya unida á la parte C del sólido, otra que vaya unida á la parte D, vemos que la parte D ejerce una tensión MP sobre la parte C, y que esta tensión ó esfuerzo es una tracción.

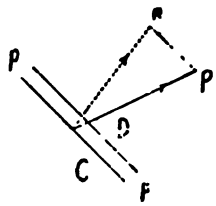


Figura 15′.

MP, como se ve en la figura 15, es positiva, y su proyección sobre la normal Mn, será positiva también; de modo que en la ecuación cuadrática anterior (decimos cuadrática porque es de segundo grado y homogénea en α, β, γ), N será una cantidad esencialmente positiva.

En cambio, en la figura 15″, al proyectar sobre la normal al plano, el polígono de las componentes X, Y, Z, la cantidad Mn resultará evidentemente negativa; de manera que el primer miembro de la cuadrática M, en este caso, será negativo también, y vemos que representa una compresión, es decir, que la parte D del sólido, trata de comprimir á la parte C.

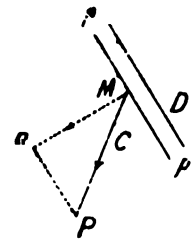


Figura 15″.

En resumen; en la ecuación de la cuadrática, N puede resultar positiva si el plano está sujeto á una tracción, ó puede resultar negativa si está sujeto á una compresión.

Comprendido esto, volvamos á la figura 15, en que sabemos que $Mn = N$.

Tomemos sobre la normal MA una longitud

$$MA = \frac{1}{\sqrt{\pm N}},$$

en cuyo valor tomaremos el signo + si N es positiva y el signo — si es negativa, con lo cual el radical será siempre real, así como la longitud MA.

Es decir, que determinamos el punto A tomando, sobre la normal Mn, *la inversa de la raíz cuadrada del valor numérico de N, siempre positivo.*

Es evidente que las tres coordenadas del punto A serán:

$$x = MA \,.\, \alpha; \quad y = MA \,.\, \beta; \quad z = MA \,.\, \gamma,$$

ó bien,

$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{\pm N}}; \quad y = \frac{\beta}{\sqrt{\pm N}}; \quad z = \frac{\gamma}{\sqrt{\pm N}};$$

de donde

$$\alpha = x\sqrt{\pm N}; \; \beta = y\sqrt{\pm N}; \; \gamma = z\sqrt{\pm N}.$$

Si substituímos estos valores de α, β, γ en la ecuación de la cuadrática, quedará una relación entre x, y, z, que son las coordenadas del punto A. Y como esta construcción podrá aplicarse á todos los planos pp y á todas las tensiones P, claro es que la superficie que resulte será el lugar geométrico de todos los puntos obtenidos por la construcción indicada.

Substituyendo estos valores de α, β, γ, tendremos:

$$N = N_1\left(x\sqrt{\pm N}\right)^2 + N_2\left(y\sqrt{\pm N}\right)^2 + N_3\left(z\sqrt{\pm N}\right)^2 +$$
$$+ 2T_1yz\left(\sqrt{\pm N}\right)^2 + 2T_2xz\left(\sqrt{\pm N}\right)^2 + 2T_3xy\left(\sqrt{\pm N}\right)^2,$$

ó bien, divididas por $\pm N$,

$$\pm 1 = N_1x^2 + N_2y^2 + N_3z^2 + 2T_1yz + 2T_2xz + 2T_3xy,$$

que es una ecuación de segundo grado, la cual definirá, por lo tanto, una de las superficies de segundo grado: el elipsoide, el hiperboloide de una hoja, el hiperboloide de dos hojas, los paraboloides, ó sus casos particulares.

De todas maneras, será una superficie en que la distancia de cualquier punto A al origen M será igual á la inversa de la raíz cuadrada de la proyección de la tensión sobre la recta MA, considerada tal proyección como positiva.

Hemos dicho que la cuadrática en x, y, z representa una superficie, y en rigor, no nos hemos expresado con exactitud. Porque en la ecuación precedente hay un doble signo, y, por lo tanto, hay dos ecuaciones:

$$+1 = N_1x^2 + N_2y^2 + N_3z^2 + 2T_1yz + 2T_2xz + 2T_3xy$$

y

$$-1 = N_1x^2 + N_2y^2 + N_3z^2 + 2T_1yz + 2T_2xz + 2T_3xy,$$

y esto, por elemental que sea, y pues estas lecciones son elementales, exige que nos detengamos algunos momentos.

Mientras la componente N de la tensión es positiva, es decir, en tanto que se trata de una tracción, la ecuación primera de las dos anteriores será la que exprese la ley que estamos estudiando. Y si para todas las direcciones de la tensión es positiva N, la primera ecuación será la única que deberemos tener en cuenta, y claro es que se reduce á un elipsoide. Así es que, para estos casos, no habrá más que una superficie indicadora.

Si constantemente N fuera negativa, es decir, que alrededor del punto no hubiera más que compresiones para todos los planos, la segunda ecuación sería la que prevalecería, y para el punto en cuestión veremos más adelante, que es un elipsoide el que determina la ley de la tensión ó, si se quiere, de las compresiones.

Pero ocurre un tercer caso, á saber: que en un mismo

punto del cuerpo, para ciertas direcciones, N sea positiva, y para otras negativa, y en esta hipótesis para cada punto hay que considerar las dos ecuaciones, que en algún modo vienen á completarse. Porque aplicada una sola, los puntos de la superficie son reales para ciertas direcciones de la normal al plano, ó para ciertas direcciones de éste; mas para otras direcciones, los puntos serían imaginarios, y precisamente para salvar esta dificultad hay que acudir á la ecuación complementaria, ó sea, á la cuadrática conjugada.

De todas maneras, estas ecuaciones representan superficies de segundo grado; es decir, elipsoides ó hiperboloides, prescindiendo del paraboloide, que puede considerarse como un caso particular.

Como aquellas superficies de segundo grado, se sabe que tienen tres planos principales para cada punto del cuerpo, podemos considerar trazados estos planos.

Ahora bien, si los tres planos coordenados del sistema se hubieran elegido paralelos á los planos principales del punto que se considera, la cuadrática en cuestión no hubiera contenido más que los cuadros de las variables; es decir, que la ecuación en x, y, z de la superficie hubiera sido

$$\pm 1 = N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2,$$

y, por lo tanto, hubiera resultado $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$.

De aquí se deduce esta consecuencia importante: Para cualquier punto de un sólido elástico, que cumpla con las condiciones de continuidad establecidas, hay tres planos perpendiculares entre sí, para los que las tensiones se reducen á fuerzas normales; es decir, á tracciones ó compresiones, pero en que no hay esfuerzos de deslizamiento, puesto que todas las T son iguales á cero.

Claro es que en otro punto cualquiera sucederá lo mismo; pero los planos principales tendrán en general direcciones distintas de las anteriores.

que es una ecuación de segundo grado, la cual definirá, por lo tanto, una de las superficies de segundo grado: el elipsoide, el hiperboloide de una hoja, el hiperboloide de dos hojas, los paraboloides, ó sus casos particulares.

De todas maneras, será una superficie en que la distancia de cualquier punto A al origen M será igual á la inversa de la raíz cuadrada de la proyección de la tensión sobre la recta MA, considerada tal proyección como positiva.

Hemos dicho que la cuadrática en x, y, z representa una superficie, y en rigor, no nos hemos expresado con exactitud. Porque en la ecuación precedente hay un doble signo, y, por lo tanto, hay dos ecuaciones:

$$+1 = N_1x^2 + N_2y^2 + N_3z^2 + 2T_1yz + 2T_2xz + 2T_3xy$$

y

$$-1 = N_1x^2 + N_2y^2 + N_3z^2 + 2T_1yz + 2T_2xz + 2T_3xy,$$

y esto, por elemental que sea, y pues estas lecciones son elementales, exige que nos detengamos algunos momentos.

Mientras la componente N de la tensión es positiva, es decir, en tanto que se trata de una tracción, la ecuación primera de las dos anteriores será la que exprese la ley que estamos estudiando. Y si para todas las direcciones de la tensión es positiva N, la primera ecuación será la única que deberemos tener en cuenta, y claro es que se reduce á un elipsoide. Así es que, para estos casos, no habrá más que una superficie indicadora.

Si constantemente N fuera negativa, es decir, que alrededor del punto no hubiera más que compresiones para todos los planos, la segunda ecuación sería la que prevalecería, y para el punto en cuestión veremos más adelante, que es un elipsoide el que determina la ley de la tensión ó, si se quiere, de las compresiones.

Pero ocurre un tercer caso, á saber: que en un mismo

punto del cuerpo, para ciertas direcciones, N sea positiva, y para otras negativa, y en esta hipótesis para cada punto hay que considerar las dos ecuaciones, que en algún modo vienen á completarse. Porque aplicada una sola, los puntos de la superficie son reales para ciertas direcciones de la normal al plano, ó para ciertas direcciones de éste; mas para otras direcciones, los puntos serían imaginarios, y precisamente para salvar esta dificultad hay que acudir á la ecuación complementaria, ó sea, á la cuadrática conjugada.

De todas maneras, estas ecuaciones representan superficies de segundo grado; es decir, elipsoides ó hiperboloides, prescindiendo del paraboloide, que puede considerarse como un caso particular.

Como aquellas superficies de segundo grado, se sabe que tienen tres planos principales para cada punto del cuerpo, podemos considerar trazados estos planos.

Ahora bien, si los tres planos coordenados del sistema se hubieran elegido paralelos á los planos principales del punto que se considera, la cuadrática en cuestión no hubiera contenido más que los cuadros de las variables; es decir, que la ecuación en x, y, z de la superficie hubiera sido

$$\pm 1 = N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2,$$

y, por lo tanto, hubiera resultado $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$.

De aquí se deduce esta consecuencia importante: Para cualquier punto de un sólido elástico, que cumpla con las condiciones de continuidad establecidas, hay tres planos perpendiculares entre sí, para los que las tensiones se reducen á fuerzas normales; es decir, á tracciones ó compresiones, pero en que no hay esfuerzos de deslizamiento, puesto que todas las T son iguales á cero.

Claro es que en otro punto cualquiera sucederá lo mismo; pero los planos principales tendrán en general direcciones distintas de las anteriores.

Y fíjense bien mis oyentes ó mis lectores: ésta es una propiedad del sistema; si hemos hablado de planos coordenados, ha sido para la demostración, es decir, para probar que en todo punto existe la propiedad indicada.

El teorema es éste: que en todo sólido elástico continuo hay tres direcciones de planos elásticos perpendiculares entre sí, para los cuales las componentes tangenciales T son nulas.

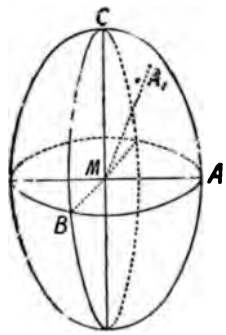


Figura 16.

La discusión del problema es mucho más sencilla poniendo la cuadrática directriz bajo esta última forma; y la discusión puede hacerse fácilmente combinando el signo del primer miembro con una combinación cualquiera de signos para N_1, N_2, N_3.

Supongamos que, para todas las direcciones del plano elástico, N es positiva; es decir, que en el punto no existen más que tracciones.

La ecuación en este caso será

$$+1 = N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2,$$

en que N_1, N_2, N_3 serán cantidades positivas, y representará evidentemente un elipsoide, $MABC$ (fig. 16).

Sus ejes serán, desde luego,

$$MA = \sqrt{\frac{1}{N_1}}; \quad MB = \sqrt{\frac{1}{N_2}}; \quad MC = \sqrt{\frac{1}{N_3}},$$

en que N_1 representará la tracción normal, según el eje de las x, sobre la cara MBC; N_2, la tracción normal sobre la cara AMC, y N_3, la tracción, normal también sobre la cara AMB.

MA_1 distancia entre el centro y un punto cualquiera A_1 del elipsoide, que es la recta MA de la figura 15, representará asi-

mismo la relación inversa de la raíz cuadrada de la proyección N sobre la recta AM de la tensión, que corresponde á un plano elástico perpendicular á dicha recta.

Todos los puntos son reales, y todo el elipsoide se aplica á los diversos planos que pasan por M. Aquí no hay excepciones, ni hay que acudir á superficies conjugadas, porque N siempre es positiva y la ecuación es única.

Continuemos examinando el caso en que la superficie indicatriz es un elipsoide.

Mediante dicha superficie, que suponemos trazada, porque *suponemos conocidas* las tres tensiones principales N_1, N_2, N_3, pueden resolverse gráficamente los principales problemas relativos á la determinación de tensiones.

Por ejemplo, para cada plano elástico determinar la dirección y la intensidad de la tensión que le corresponde, y á la inversa: dada la dirección de una tensión, determinar su intensidad y el plano correspondiente.

***

PRIMER PROBLEMA.—Dado el plano elástico, determinar la tensión por unidad de superficie. Los datos analíticos son los siguientes:

En primer lugar, la ecuación del elipsoide, que es

$$+1 = N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2.$$

En que las N son todas positivas y x, y, z son las coordenadas de un punto de la elipsoide.

Y en segundo lugar, las ecuaciones que determinan las componentes de la tensión, que hemos demostrado que eran

$$X = N_1 \alpha + T_3 \beta + T_2 \gamma,$$
$$Y = T_3 \alpha + N_2 \beta + T_1 \gamma,$$
$$Z = T_2 \alpha + T_1 \beta + N_3 \gamma.$$

Pero como hemos escogido para planos coordenados los tres planos principales correspondientes al punto que se considera, las tensiones tangenciales serán nulas; de modo que tendremos:

$$T_1 = 0, \qquad T_2 = 0, \qquad T_3 = 0.$$

Con lo cual, las tres ecuaciones anteriores se reducen á estas tres:

$$X = N_1 \alpha,$$
$$Y = N_2 \beta,$$
$$Z = N_3 \gamma.$$

Y ahora la construcción para resolver el problema es bien sencilla.

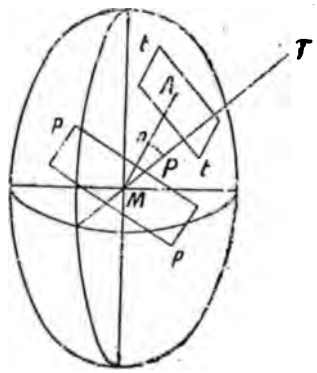


Figura 17.

Sea *pp* el plano elástico que se considera (fig. 17); la tensión por unidad que sobre él actúa, se determina por la siguiente construcción:

Por el centro del elipsoide, se traza la normal *MA* á dicho plano elástico.

En el punto *A*, en que encuentra al elipsoide, se traza asimismo el plano tangente *tt*.

Y por el centro *M* se baja una perpendicular, *MT*, á dicho plano *tt*.

Esta será la dirección de la tensión en el punto *M* y para el plano *pp*.

En efecto; se sabe por Geometría analítica que la ecuación del plano tangente en un punto *A*, cuyas coordenadas sean x_1, y_1, z_1, es para dicho elipsoide, deducida de

$$+1 = N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2,$$

la siguiente:

$$N_1 x x_1 + N_2 y y_1 + N_3 z z_1 = K,$$

siendo K una constante.

Pero las coordenadas del punto A, puesto que la normal NA al plano elástico forma con los ejes ángulos cuyos cosenos son α, β, γ, serán proporcionales á dichos cosenos; es decir,

$$\frac{x_1}{\alpha} = \frac{y_1}{\beta} = \frac{z_1}{\gamma} = k,$$

llamando k á la relación, para abreviar.

Y substituyendo estos valores de x_1, y_1, z_1 en la ecuación del plano tangente, resultará:

$$N_1 \alpha x + N_2 \beta y + N_3 \gamma z = \frac{K}{k}.$$

También se sabe por Geometría analítica, que los cosenos de los ángulos que forman la normal á este plano, es decir, MT, según la construcción indicada, con los ejes, son proporcionales á

$$N_1 \alpha, \quad N_2 \beta, \quad N_3 \gamma$$

y, por lo tanto, á X, Y, Z, que son iguales, según las ecuaciones fundamentales, á las cantidades precedentes.

En suma, la tensión en M para el plano pp coincide en dirección con la recta MT que hemos determinado.

En cuanto á la magnitud, fácilmente se halla.

Según la definición del elipsoide $MA = \frac{1}{\sqrt{N}}$, siendo N la proyección de la tensión sobre MA, y como MA es conocida, se deduce $N = \frac{1}{MA^2}$, que se puede construir fácilmente ó que se puede calcular. Tomando $Mn = N$, y tra-

zando por n un plano perpendicular á MA, el punto P en que corte á MT determinará la magnitud MP de la tensión.

***

SEGUNDO PROBLEMA. — Dada la dirección de la tensión, determinar el plano y la magnitud de ésta. No hay más que repetir la construcción anterior á la inversa.

Dada MT, se determinará un plano tt tangente al elipsoide y perpendicular á MT, problema conocido.

Se unirá el punto de contacto A con el centro M, y por M se trazará un plano pp perpendicular á MA. Este será el plano de tensiones.

Para determinar la magnitud de ésta, puesto que se conoce MA, se seguirá el mismo procedimiento que acabamos de explicar.

***

Hemos supuesto que el primer miembro es positivo, y que en el segundo miembro, N_1, N_2, N_3 son positivas también, con lo cual la ecuación representa un elipsoide.

Si el primer miembro fuera negativo, la ecuación sería siempre de la forma

$$-1 = A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2,$$

puesto que hemos escogido por planos coordenados los planos principales.

Pero A_1, A_2, A_3 serían negativas, porque si se hallan los ejes, estos serían

$$a = \frac{1}{\sqrt{-A_1}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{-A_2}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{-A_3}};$$

y como hemos cuidado de hacer las transformaciones de manera, que siempre las distancias del centro á un punto del elipsoide sean cantidades reales, pues por esa razón tomamos para los cálculos $\sqrt{\pm N}$, resulta que a, b, c deben ser reales, y, por lo tanto, A_1, A_2, A_3 deben ser negativas.

Representándolas por $-N_1$, $-N_2$, $-N_3$, substituyendo y cambiando signos, venimos á parar al caso anterior; es decir, que la superficie indicatriz es un elipsoide, sólo que en este caso todas las tensiones son presiones en vez de ser tracciones.

Cuanto hemos dicho para el primer elipsoide, puede repetirse para éste.

***

Si N unas veces es positiva y otras veces es negativa, para el primer caso deberemos tomar

$$+1 = A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2,$$

designando por A los coeficientes, que resultan al hacer la transformación de coordenadas, con el objeto de referir la superficie á sus planos principales.

Y deberemos tomar la ecuación

$$-1 = A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2$$

para todos los puntos en que N sea negativa.

Pero todo esto tiene una representación geométrica sumamente sencilla.

Tomemos la ecuación

$$+1 = A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2,$$

y admitamos todas las combinaciones posibles para los signos de A_1, A_2, A_3.

Supongamos los dos primeros positivos y el último negativo, y representando por N cantidades esencialmente positivas, para poner los signos en evidencia, tendremos:

$$+1 = N_1 x^2 + N_2 y^2 - N_3 z^2.$$

Dicha ecuación representa un hiperboloide de una hoja referido á sus planos principales.

Haciendo $z = 0$ se obtiene la intersección del plano de las xy con el hiperboloide, que será una elipse: su ecuación tendrá la forma

$$+1 = N_1 x^2 + N_2 y^2.$$

Análogamente, las intersecciones por los planos xz, yz serán dos hipérbolas:

$$+1 = N_1 x^2 - N_3 z^2,$$
$$+1 = N_2 y^2 - N_3 z^2,$$

que se obtienen haciendo $y = 0$, $x = 0$, en la ecuación general.

Hemos representado esta superficie en la figura 18, aunque sólo la parte del hiperboloide correspondiente al tiedro de las coordenadas positivas.

En dicha figura se indica la elipse AB y las hipérbolas AA', BB',

También se ha representado la parte Mab del cono asintótico.

Todas las rectas que, partiendo de M, corten á este hiperboloide, representarán la inversa de la raíz cuadrada de las componentes normales á los planos elásticos de las tensiones, en que dicha componente N será una cantidad positiva. Y, por lo tanto, indicarán fuerzas de tracción y serán aplicables los métodos gráficos, que hemos explicado para el

elipsoide, así como todas las demostraciones desarrolladas en este caso.

En cambio, una recta *MF*, que esté dentro del cono asintótico, no cortará al hiperboloide, y, en este caso, para

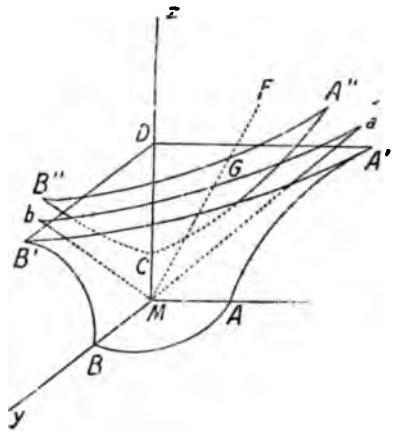


Figura 18.

obtener una superficie real como indicatriz, puesto que N sería negativa, habría que acudir á la segunda ecuación

$$-1 = A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2,$$

y tomando la misma combinación de signos que antes,

$$-1 = N_1 x^2 + N_2 y^2 - N_3 z^2,$$

ó bien,

$$1 = -N_1 x^2 - N_2 y^2 + N_3 z^2,$$

que representa un hiperboloide de dos hojas, puesto que $z = 0$ da una elipse imaginaria,

$$1 = -N_1 x^2 - N_2 y^2,$$

y además,

$$x = 0, \quad y = 0$$

dan dos hipérbolas,

$$1 = -N_2 y^2 + N_3 z^2,$$
$$1 = -N_1 x^2 + N_3 z^2,$$

en la cuales el eje real es el de las z.

Hemos representado en la misma figura 18 una parte de la hoja superior del hiperboloide, la que corresponde al triedro ya indicado.

La sección por el plano $x\ z$ es la hipérbola CA''; la intersección por el plano de las $y\ z$ es CB''.

La recta MF, que no cortaba al hiperboloide de una hoja porque estaba dentro del cono asintótico, corta en G á este hiperboloide de dos hojas.

El cono asintótico es el mismo, que para el hiperboloide de una hoja, y su ecuación será

$$0 = N_1 x^2 + N_2 y^2 - N_3 z^2.$$

Las construcciones, ya para determinar la tensión conociendo el plano, ya para determinar el plano conociendo la dirección del esfuerzo, son las mismas que para el elipsoide y también las demostraciones que allí presentamos.

En suma; así como, cuando para un punto dado y alrededor del mismo, todas son tracciones ó todas son compresiones, la superficie indicatriz es un elipsoide, cuando, por el contrario, para ciertos planos la tensión es tracción y para otros es compresión, la superficie indicatriz se compone de *dos superficies* de segundo grado conjugadas, que son un hiperboloide de una hoja y un hiperboloide de dos hojas.

Cada uno de ellos deja una región del espacio inútil y, por decirlo así, sin llenar, porque el esfuerzo resulta imaginario; y esta región es precisamente la que ocupa la superficie conjugada.

Por el punto M no puede trazarse ninguna recta que no

encuentre á una de las dos superficies; por consiguiente, todos los esfuerzos serán reales y todas las construcciones indicadas serán posibles.

Cuando la recta que pasa por M es una de las generatrices del cono asintótico, claro es que encuentra á las dos superficies en el infinito.

Es decir, que en la figura 15, MA será infinita.

Pero $MA = \frac{1}{\sqrt{Mn}} = \frac{1}{\sqrt{\pm N}}$; luego

$$N = \pm \frac{1}{\overline{MA}^2} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

De donde se deduce que para todos los planos perpendiculares á las generatrices del cono asintótico, la componente de la tensión sobre la normal á dicho plano es nula. Sobre dichos planos no existen más que fuerzas tangenciales.

***

Los métodos gráficos que acabamos de explicar, y las ecuaciones que hemos establecido, se prestan á una amplia discusión, pero no nos detendremos en ella; en primer lugar, por ser sumamente sencilla, y porque en rigor más bien son cuestiones de Geometría analítica, que de Física matemática.

En todos los casos, la interpretación física, ya de las construcciones geométricas, ya de los resultados analíticos, no ofrecen ninguna dificultad.

Claro es que los coeficientes N_1, N_2, N_3, en el caso general, serán desiguales en valor numérico; pero dos de ellos, ó los tres, pueden ser iguales, y esto trae consigo simplificaciones en las fórmulas y en las superficies que representan.

Por ejemplo, consideremos el caso en que todas las tensiones, alrededor del punto de que se trata, sean tracciones;

claro es, según hemos explicado, que la superficie indicatriz será una elipsoide; pues si N_1 y N_2 son iguales, el elipsoide será de revolución alrededor del eje de las z, y todos los planos que formen el mismo ángulo con el eje de revolución estarán evidentemente sometidos á tracciones iguales, y todas formarán un cono de revolución también alrededor del eje de las z.

Todavía puede suceder que se tenga $N_1 = N_2 = N_3$, y entonces la ecuación se convierte en

$$1 = N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2,$$

ó bien,

$$\left|\frac{1}{\sqrt{N_1}}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

de suerte que la superficie es una esfera cuyo radio será $\frac{1}{\sqrt{N_1}}$.

En estas hipótesis, la construcción que antes explicamos demuestra que todas las tensiones son iguales alrededor del punto, y que todas son normales al plano elástico correspondiente.

Si todos los puntos del sólido gozasen de esta propiedad, sería un caso análogo al de los líquidos ó los gases homogéneos, para los que existe el principio de igualdad de presiones ó tracciones. Pero la discusión completa de esta hipótesis exigiría un estudio especial, sobre todo para armonizar la actual teoría con la teoría cinética de los gases.

***

No debemos olvidar, que todo lo que hemos explicado en esta conferencia y en la anterior se refiere á un punto; mejor dicho, á cada punto del sólido elástico.

Las ecuaciones, las construcciones geométricas, las discusiones generales, son las mismas para todos los puntos del sólido; lo que hemos dicho para uno, pudiéramos decir para otro cualquiera: el punto que hemos escogido no es un punto particular, es un punto general.

Pero los resultados numéricos ó las magnitudes geométricas varían de un punto á otro.

Queremos decir que, por ejemplo, la ecuación

$$+1 = N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2,$$

no será la misma para los diferentes puntos del sistema. Al pasar de un punto á otro, si para el primero la superficie indicatriz era un elipsoide, aun suponiendo que para el segundo sea un elipsoide también, los coeficientes tendrán distinto valor numérico; de suerte que los ejes del segundo elipsoide tendrán distinta magnitud que los del primero, será, por ejemplo, la ecuación de dicha superficie,

$$+1 = N'_1 x^2 + N'_2 y^2 + N'_3 z^2.$$

Más aún; los nuevos ejes no serán paralelos á los anteriores.

De manera que si los planos coordenados quedan fijos de dirección y la ecuación del primer elipsoide era

$$+1 = N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2,$$

la del segundo será, en general,

$$+1 = N'_1 x^2 + N'_2 y^2 + N'_3 z^2 + 2T'_1 yz + 2T'_2 xz + 2T'_3 xy.$$

Todo lo cual es natural, porque los coeficientes N y T son funciones de x_0, y_0, z_0, y, por lo tanto, varían de un punto á otro, siendo x_0, y_0, z_0 las coordenadas del punto que se considera.

Más aún; tal pudiera ser la distribución de las fuerzas exteriores que actuasen sobre el sólido elástico, que para unos puntos la superficie indicatriz fuera un elipsoide de presiones; para otro punto, otro elipsoide de tracciones, y para otro, según hemos explicado, el conjunto de dos superficies de segundo grado: un hiperboloide de una hoja y un hiperboloide de dos hojas, conjugados.

Todo esto es evidente: no hay más que fijarse en que las N y T son funciones de x_0, y_0, z_0; es decir, de las coordenadas del punto que se considera, y que, al pasar de un punto á otro, ó sea, al cambiar de valor estas coordenadas, las N y las T, no sólo cambiarán de valor en general, sino que pueden cambiar también de signo, con lo cual se pasa de una superficie de segundo grado á otra de distinta naturaleza, por ejemplo, de un elipsoide á un hiperboloide.

Una discusión completa de todos estos casos sería interesante, pero no tiene cabida en un estudio elemental de esta materia.

Así como, sólo por tratarse de un estudio elemental, porque debe entenderse que me dirijo á principiantes, puede disculparse el que entre en ciertos pormenores.

Hemos explicado en esta conferencia la llamada cuadrática indicatriz y las superficies que la representan; pero esta representación analítica ó geométrica de la distribución de las tensiones alrededor de cada punto, no es única, y en la conferencia próxima explicaremos otros sistemas de representación, que tienen importancia y que quizás son más sencillos, que el que hemos explícado hasta aquí; el cual pudiera parecer algo artificioso, porque lo es, en cierto modo, el que sobre cada radio vector se tome la *relación inversa de la raíz cuadrada de la proyección sobre dicha recta, de la tensión correspondiente al plano normal á aquélla.*

No lo es, sin embargo, como explicaremos en la conferencia próxima, aunque la cuestión es de escasa importancia.

XXV.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia cuarta.

SEÑORES:

Al empezar la exposición de la teoría de la Elasticidad por el método de Lamé y sus análogos, dijimos que se partía ó se podía partir en este método de dos hechos experimentales.

Primero: del concepto de tensión para cada punto y para cada dirección de un plano, que pasase por dicho punto.

Segundo: de la existencia de una relación necesaria entre las deformaciones y los esfuerzos interiores.

Claro es que ambos principios pueden deducirse de diferentes hipótesis sobre la constitución de los cuerpos elásticos, y así lo hicimos en el curso anterior al completar la teoría de Cauchy; pero también pueden considerarse dichos principios como resultados puramente experimentales, y esto fué lo que hicimos nosotros de preferencia.

Sentados estos dos principios, ó estos dos hechos, anunciamos que habíamos de estudiar uno y otro en las conferencias sucesivas.

Y empezamos el estudio de las tensiones alrededor de un punto cualquiera.

Claro es, que como alrededor de cada punto se pueden trazar infinitas rectas, tendremos infinitas tensiones, cada una de ellas correspondiente á un plano, y respecto á éste, en general, será oblicua la tensión de que se trata, y tendremos alrededor de ese punto infinitos planos con infinitas orientaciones.

Dichas tensiones pueden referirse á un área infinitamente pequeña de los planos que les corresponden, y dividiendo cada tensión por su área, y pasando al límite, hallaremos las tensiones por unidad de superficie.

Y planteábamos este problema: ¿son arbitrarias todas las tensiones alrededor de un punto?

O dicho con más exactitud: ¿trazando alrededor de un punto tensiones arbitrarias, podremos imaginar un cuerpo sólido y un sistema de fuerzas, que correspondan á esta distribución arbitraria de tensiones?

Contestamos negativamente: admitiendo la continuidad en el sólido, las tensiones no pueden ser arbitrarias.

Hay *seis* cantidades para cada punto, que llamábamos N_1, N_2, N_3; T_1, T_2, T_3, de las cuales dependen todas las demás tensiones.

Y demostrábamos este importante teorema, fundándonos en que, cualquier poliedro infinitamente pequeño, que contuviese al punto en cuestión, debería estar en equilibrio bajo la acción de las tensiones que actuasen sobre sus diferentes caras.

Sentado tal principio, para desarrollarlo, buscábamos el equilibrio de un paralelepípedo y de un tetraedro, definidos convenientemente, y llegábamos por fin á una determinación analítica y á una representación geométrica de la distribución de esfuerzos alrededor de cada punto.

El resultado más importante era éste: que para cada punto de un sólido elástico existen tres planos perpendiculares entre sí, á que se da el nombre de *planos principales*, y que si se consideran como planos elásticos, la tensión que sobre cada uno de ellos actúa es normal á dicho plano.

O de otro modo: las tres intersecciones de estos tres planos forman tres ejes, y cada uno determina la dirección de la tensión, que corresponde al plano de los otros dos.

Para estos tres planos no hay, pues, fuerzas tangenciales; es decir, esfuerzos que actúen sobre dichos planos, tendiendo á producir deslizamientos.

Para los tres planos en cuestión no hay más que comprensiones ó tracciones.

Advirtiendo, como advertíamos, que para cada punto del cuerpo, la dirección de estos planos principales es, en general, distinta.

***

Dijimos al terminar la conferencia anterior, de la cual acabamos de dar un breve resumen, que la representación gráfica de la distribución de tensiones, que habíamos dado, por superficies de segundo grado, y asimismo la cuadrática indicatriz, no eran únicas; y que en esta conferencia expondríamos brevemente otros sistemas de representación geométrica y analítica.

Las ecuaciones generales que determinan para cada punto las componentes de la tensión correspondientes á cualquier plano que pase por dicho punto, y á que hemos dado, para abreviar, el nombre de plano elástico, son las siguientes:

$$X = N_1 \alpha + T_3 \beta + T_2 \gamma,$$
$$Y = T_3 \alpha + N_2 \beta + T_1 \gamma,$$
$$Z = T_2 \alpha + T_1 \beta + N_3 \gamma;$$

en las que las N y las T son componentes de tensiones sobre planos paralelos á los coordenados, y pasando por el punto; y α, β, γ son los cosenos directores de la normal al plano elástico correspondiente á la tensión, cuyas componentes son X, Y, Z.

Todo esto, para fijar las ideas, lo hemos representado en la figura 19.

x', y', z' son los ejes á que está referido el cuerpo.

M, el punto de éste que se considera; x, y, z, los ejes que pasan por M paralelamente á x', y', z'.

$p\,p$, un plano cualquiera pasando por el punto M.

Mn, la normal á este plano, definida por los tres cosenos α, β, γ.

M P, la tensión correspondiente al mismo plano *p p*.

Y, por fin, *X*, *Y*, *Z*, las tres componentes de la tensión *P*.

Dichas tres componentes están expresadas por las tres ecuaciones anteriores, en función de las seis cantidades *N*, *T*,

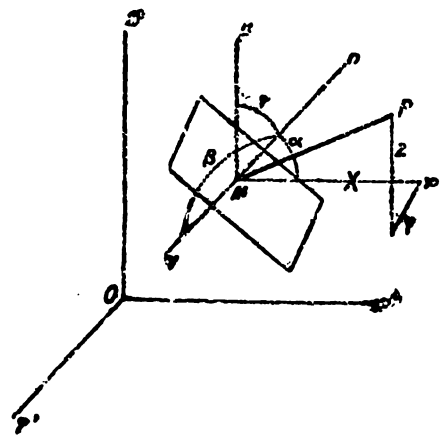


Figura 19.

que son constantes para cada punto, y que, en cierto modo, lo caracterizan; y además, en función de α, β, γ que definen la orientación del plano *p p*.

De suerte, que dado un plano cualquiera, podremos determinar por las tres ecuaciones anteriores la tensión que sobre él actúa por unidad de superficie, y para obtener el esfuerzo sobre un área sumamente pequeña, no habría más que multiplicar por dicha área la fuerza por unidad.

El resultado será la fuerza que actúa sobre el área expresada y que tiende á romper el cuerpo por presión, tracción ó deslizamiento.

Todo esto es perfectamente claro, y ruego que se me dispense, si insisto sobre cosas, que parecen elementales y que lo son en efecto.

De todo el estudio que hicimos en la conferencia anterior, hemos de aprovechar en ésta un resultado importante de aquélla.

De él podíamos prescindir y empezar de nuevo exponiendo otros métodos de otros autores; pero como son problemas de Geometría analítica, más bien que de Física matemática, procuraremos seguir el camino más corto para llegar al resultado.

Y el de la conferencia anterior, que vamos á utilizar en ésta, es el siguiente:

En cada punto de un sólido elástico existen tres planos principales rectangulares entre sí, y para los cuales las tensiones respectivas son normales á los mismos.

De modo que de las seis constantes N, T no quedan más que tres, N_1, N_2, N_3, y las otras, T_1, T_2, T_3, son nulas para este sistema de planos coordenados.

Según esto, haciendo

$$T_1 = 0,\ T_2 = 0,\ T_3 = 0,$$

en los valores generales de las componentes de la tensión,

$$\begin{aligned} X &= N_1 \alpha + T_3 \beta + T_2 \gamma, \\ Y &= T_3 \alpha + N_2 \beta + T_1 \gamma, \\ Z &= T_2 \alpha + T_1 \beta + N_3 \gamma, \end{aligned}$$

se reducirán estas ecuaciones á

$$\begin{aligned} X &= N_1 \alpha, \\ Y &= N_2 \beta, \\ Z &= N_3 \gamma. \end{aligned}$$

Tales valores en que la X, Y, Z resultan proporcionales á los cosenos directores de la normal á cualquier plano elástico, nos dan el medio de construir una superficie represen-

tativa de la intensidad de la tensión para sus diferentes direcciones.

En efecto; sea M (fig. 20) un punto cualquiera del cuerpo, y sean $x\,M\,y$, $y\,M\,z$, $z\,M\,x$ los tres planos principales correspondientes al punto M, los cuales tomaremos como planos coordenados para estudiar las tensiones alrededor del punto M.

Sea $M\,T$ la dirección de la tensión, y tomemos una longitud, $M\,T$, que represente dicha tensión.

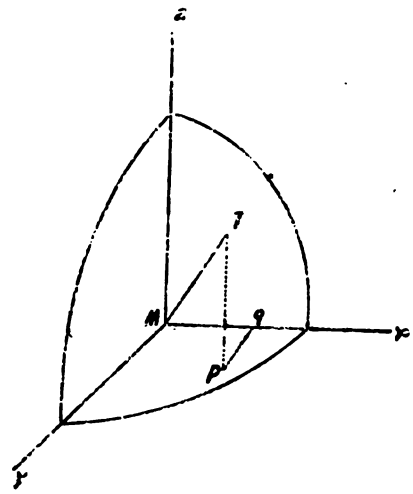


Figura 20.

El punto M tendrá tres coordenadas, $N\,P$, $P\,Q$, $M\,Q$, que serán precisamente las tres componentes X, Y, Z de dicha tensión.

Si hacemos esto mismo para todas las tensiones alrededor del punto M, el lugar geométrico de los puntos T será una superficie, que se demuestra inmediatamente que es un elipsoide.

En efecto; entre los tres cosenos α, β, γ existe la relación

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1;$$

y substituyendo por α, β, γ sus valores

$$\alpha = \frac{X}{N_1}, \beta = \frac{Y}{N_2}, \gamma = \frac{Z}{N_3},$$

deducidos de las ecuaciones anteriores, tendremos la ecuación

$$\frac{X^2}{N_1^2} + \frac{Y^2}{N_2^2} + \frac{Z^2}{N_3^2} = 1,$$

que será la ecuación de la superficie y que es, en efecto, la ecuación de un elipsoide referido á sus ejes.

Si llamamos, como siempre, x, y, z las coordenadas de un punto del elipsoide, cantidades que son iguales á X, Y, Z, tendremos, para la ecuación de la superficie,

$$\frac{x^2}{N_1^2} + \frac{y^2}{N_2^2} + \frac{z^2}{N_3^2} = 1.$$

A este elipsoide se le da el nombre de elipsoide de tensiones; porque, en efecto, si por el punto M se traza un haz de rectas, el elipsoide cortará en todas ellas longitudes, que representarán las tensiones correspondientes á cada una de estas direcciones.

Dicha representación es más sencilla, que la que explicábamos en la última conferencia. Cada vector da la tensión que le corresponde; pero, en cambio, no determina el plano elástico á que dicha tensión se refiere.

MT, en la figura 20, es una tensión; pero ¿cuál es el plano á que se aplica? La figura no lo dice, y el problema de las tensiones está representado de una manera incompleta.

Sin embargo, Lamé y los autores que adoptan este sistema, completan la precedente representación por medio de otra superficie de segundo grado.

Pudiéramos seguir un método general para determinarla;

mas preferimos dar desde luego su ecuación y demostrar sintéticamente la construcción geométrica aplicable á la determinación de cada plano elástico.

Sea la ecuación de segundo grado

$$\frac{x^2}{N_1} + \frac{y^2}{N_2} + \frac{z^2}{N_3} = \pm 1,$$

que podrá ser un elipsoide, un hiperboloide de una hoja ó

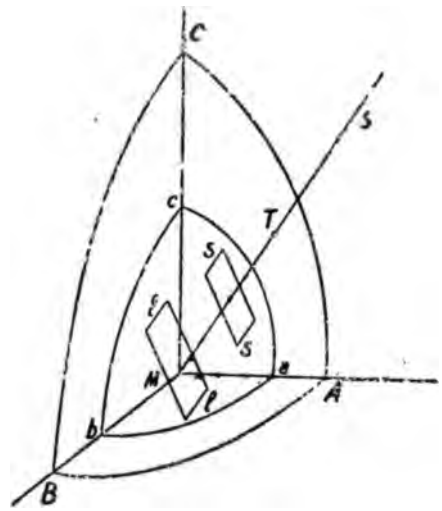


Figura 21.

un hiperboloide de dos hojas, referidos todos ellos á sus planos principales.

Y vamos á demostrar que, así como los vectores ó líneas radiales del primer elipsoide determinan las tensiones, los planos tangentes de esta segunda superficie determinan los planos elásticos.

Sea, figura 21, ABC el elipsoide de tensiones cuya ecuación hemos dicho que es

$$\frac{x^2}{N_1^2} + \frac{y^2}{N_2^2} + \frac{z^2}{N_3^2} = 1,$$

advirtiendo que no hemos representado, para no complicar la figura, más que la parte del elipsoide comprendido en el primer ángulo triedro.

Supongamos, para fijar las ideas, que la superficie, cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{N_1} + \frac{y^2}{N_2} + \frac{z^2}{N_3} = 1$$

representa también un elipsoide, es decir, que N_1, N_2, N_3 son cantidades positivas. Lo que digamos para este caso, pudiéramos decir para cualquiera otra combinación de signos, recordando además lo expuesto en la conferencia precedente á este propósito.

Sean, pues, en la figura 21,

ABC el elipsoide, cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{N_1^2} + \frac{y^2}{N_2^2} + \frac{z^2}{N_3^2} = 1,$$

y abc el elipsoide definido por

$$\frac{x^2}{N_1} + \frac{y^2}{N_2} + \frac{z^2}{N_3} = 1;$$

con estas dos superficies, el problema de las tensiones ó, mejor dicho, los dos problemas principales quedan resueltos inmediatamente.

PRIMER PROBLEMA.—Dada la dirección de la tensión MS, determinar su magnitud y el plano á que corresponde.

Si MS corta al primer elipsoide en T, y al segundo en t, trazando el plano tangente en t, que representaremos por ss, al elipsoide abc, la longitud de la tensión será MT, y la

dirección del *plano elástico* á que corresponde será *ss*. Bastará trazar por *M* un plano, *ll*, paralelo á *ss*, para tener el *plano elástico* á que corresponde la tensión *MT*.

En efecto, la ecuación del plano tangente al elipsoide *abc*, en un punto cuyas coordenadas sean x_1, y_1, z_1, se sabe que es

$$\frac{x_1 x}{N_1} + \frac{y_1 y}{N_2} + \frac{z_1 z}{N_3} = 1.$$

Pero las coordenadas del punto *t*, que son las que hemos llamado x_1, y_1, z_1, son proporcionales á las coordenadas del punto *T*, porque *M*, *t* y *T* están en línea recta; y además, las coordenadas del punto *T* sabemos que son *X*, *Y*, *Z*, ó bien sus valores $N_1 \alpha$, $N_2 \beta$, $N_3 \gamma$; luego

$$\frac{x_1}{N_1 \alpha} = \frac{y_1}{N_2 \beta} = \frac{z_1}{N_3 \gamma}$$

si á esta relación la llamamos *k*, tendremos:

$$x_1 = k \,.\, N_1 \alpha, \quad y_1 = k \,.\, N_2 \beta, \quad z_1 = k \,.\, N_3 \gamma;$$

y substituyendo en la ecuación del plano tangente, y dividiendo por *k*, y simplificando,

$$\frac{k \,.\, N_1 \alpha x}{N_1} + \frac{k \,.\, N_2 \beta y}{N_2} + \frac{k \,.\, N_3 \gamma z}{N_3} = 1;$$

es decir,

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \frac{1}{k};$$

pero se sabe, por Geometría analítica, que este plano tiene por perpendicular una recta cuyos cosenos directores son α, β, γ. Luego su normal es paralela á la normal del plano elástico correspondiente á *MT*.

Así, pues, *ss* es paralelo al plano elástico, y trazando

por M el plano ll paralelo á ss, éste será el plano elástico correspondiente á la tensión MT.

SEGUNDO PROBLEMA.—Dada la dirección del plano elástico, hallar la dirección y magnitud de la tensión correspondiente.

Según lo que acabamos de explicar, la construcción será ésta:

Si ll es el plano elástico dado, se trazará un plano ss tangente al segundo elipsoide y paralelo al plano dado.

Se unirá el punto de contacto t con el punto M y se buscará la intersección de la recta Mt con el primer elipsoide.

Si este punto es T, tendremos que MT será la magnitud de la tensión que corresponda al plano dado.

***

Pudiéramos, como en el primer sistema de representación, examinar una multitud de casos particulares:

Que el segundo elipsoide se convierta en el conjunto de dos superficies, á saber, un hiperboloide de una hoja y un hiperboloide de dos hojas.

Que el elipsoide de tensiones sea de revolución.

Que se convierta en una esfera.

Que los ejes de la segunda superficie sean los tres iguales en magnitud, ó que las superficies sean de revolución.

Que se trate de buscar las tensiones cuando coinciden con las generatrices del cono asintótico las normales á los planos elásticos.

Todos éstos son casos que no ofrecen dificultad de ningún género, y en los que, por lo tanto, no insistiremos.

***

Si para un sistema de ejes se han determinado en cada punto las seis constantes N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, fácilmente

se obtienen estas constantes para otro sistema cualquiera de ejes coordenados.

Es un problema elemental de Analítica.

Supongamos que á los ejes x, y, z se quiere substituir otros ejes x', y', z', que constituyan un sistema también rectangular; pues no habrá más que aplicar las fórmulas de transformación de coordenadas, que serán

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z', \end{aligned}$$

en cuyas fórmulas α_1, α_2, α_3 son los cosenos de los ángulos que forman con el eje antiguo de las x los tres ejes nuevos x', y', z'.

β_1, β_2, β_3, son, asimismo, los cosenos de los ángulos que forman con y los ejes x', y', z'.

γ_1, γ_2, γ_3, los cosenos de los ángulos que forman con z, siempre los tres nuevos ejes x', y', z'.

Conviene recordar que las α, β, γ satisfacen á seis ecuaciones, que son elementales en Analítica.

La nueva ecuación de la superficie indicatriz, en el primer sistema de los dos que hemos empleado, y que era

$$\pm 1 = N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2 + 2\,T_1 yz + 2\,T_2 xz + 2\,T_3 xy,$$

tomará otra forma, que se obtendrá evidentemente substituyendo por x, y, z sus valores en función de las nuevas coordenadas, y tendremos, por lo tanto, para la ecuación en x', y', z' de la nueva superficie indicatriz,

$$\begin{aligned} \pm 1 = {} & N_1(\alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z')^2 + N_2(\beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z')^2 + \\ & + N_3(\gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z')^2 \\ & + 2\,T_1(\beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z')(\gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z') \\ & + 2\,T_2(\alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z')(\gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z') \\ & + 2\,T_3(\alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z')(\beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z'), \end{aligned}$$

y desarrollando y ordenando por relación á z', y' x' tendremos:

$$\begin{aligned}
\pm 1 = {} & [N_1\alpha^2_1 + N_2\beta^2_1 + N_3\gamma^2_1 + 2T_1\beta_1\gamma +_1 \\
& + 2T_2\alpha_1\gamma_1 + 2T_1\alpha_1\beta_1]\, x'^2, \\
& + [N_1\alpha^2_2 + N_2\beta^2_2 + N_3\gamma^2_2 + 2T_1\beta_2\gamma_2 + \\
& + 2T_2\alpha_2\gamma_2 + 2T_3\alpha_2\beta_2]\, y'^2, \\
& + [N_1\alpha^2_3 + N_2\beta^2_3 + N_3\gamma^2_3 + 2T_1\beta_3\gamma_3 + \\
& + 2T_2\alpha_3\gamma_3 + 2T_3\alpha_3\beta_3]\, z'^2, \\
& + 2\,[N_1\alpha_2\alpha_3 + N_2\beta_2\beta_3 + N_3\gamma_2\gamma_3 + T_1(\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2) + \\
& + T_2(\gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3) + T_3(\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3)]\, y'z', \\
& + 2\,[N_1\alpha_1\alpha_3 + N_2\beta_1\beta_3 + N_3\gamma_1\gamma_3 + T_1(\beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3) + \\
& + T_2(\alpha_1\gamma_3 + \gamma_1\alpha_3) + T_3(\alpha_3\beta_1 + \beta_3\alpha_2)]\, x'z', \\
& + 2\,[N_1\alpha_1\alpha_2 + N_2\beta_1\beta_2 + N_3\gamma_1\gamma_2 + T_1(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) + \\
& + T_2(\gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\alpha_1) + T_3(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)]\, x'y'.
\end{aligned}$$

Si partiendo de los ejes x', y', z', hubiéramos obtenido directamente la ecuación de la superficie indicatriz, hubiéramos hallado, representando por N' y T', los nuevos coeficientes:

$$\begin{aligned}
\pm 1 = {} & N'_1 x'^2 + N'_2 y'^2 + N'_3 z'^2 + 2T'_1 y'z' + \\
& + 2T'_2 x'z' + 2T'_3 x'y',
\end{aligned}$$

de modo que, identificando esta última ecuación con la precedente, tendremos para N', T', los valores:

$$\begin{aligned}
N'_1 = {} & N_1\alpha^2_1 + N_2\beta^2_1 + N_3\gamma^2_1 + 2T_1\beta_1\gamma_1 + \\
& + 2T_2\gamma_1\alpha_1 + 2T_3\alpha_1\beta_1, \\
N'_2 = {} & N_1\alpha^2_2 + N_2\beta^2_2 + N_3\gamma^2_2 + 2T_1\beta_2\gamma_2 + \\
& + 2T_2\gamma_2\alpha_2 + 2T_3\alpha_2\beta_2, \\
N'_3 = {} & N_1\alpha^2_3 + N_2\beta^2_3 + N_3\gamma^2_3 + 2T_1\beta_3\gamma_3 + \\
& + 2T_2\gamma_3\alpha_3 + 2T_3\alpha_3\beta_3,
\end{aligned}$$

$$T_1 = N_1\alpha_2\alpha_3 + N_2\beta_2\beta_3 + N_3\gamma_2\gamma_3 + T_1(\beta_2\gamma_3 + \gamma_2\beta_3) +$$
$$+ T_2(\gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3) + T_3(\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3),$$
$$T'_2 = N_1\alpha_3\alpha_1 + N_2\beta_3\beta_1 + N_3\gamma_3\gamma_1 + T_1(\beta_3\gamma_1 + \gamma_3\beta_1) +$$
$$+ T_2(\gamma_3\alpha_1 + \alpha_3\gamma_1) + T_3(\alpha_3\beta_1 + \beta_3\alpha_1),$$
$$T'_3 = N_1\alpha_1\alpha_2 + N_2\beta_1\beta_2 + N_3\gamma_1\gamma_2 + T_1(\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2) +$$
$$+ T_2(\gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2) + T_3(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2).$$

Vemos, por lo tanto, que si por algún medio, que será naturalmente el de la resolución del problema de la Elasticidad, se conocen los valores de las N y T para cualquier punto, es decir, para todos ellos en función de x, y, z, cuando el cuerpo está referido á un sistema de ejes, se podrán conocer desde luego los valores de N, T para otros sistemas de ejes cualesquiera, con sólo aplicar las fórmulas anteriores, que dan las N', T' en función de las N, T y de los cosenos que definen la posición de los nuevos ejes con relación á los antiguos.

Y volvemos á repetir lo que dijimos anteriormente; todo lo dicho no constituye la solución del problema general: *determinación de las tensiones*, sino que reduce, por decirlo de este modo, la determinación de todas ellas á la determinación de las seis constantes N y T. Hemos reducido el número de incógnitas, y hemos hallado la ley de distribución alrededor de cada punto, pero nada más.

Luego será preciso resolver el problema de la Elasticidad, determinando, por los métodos que expondremos, las seis constantes expresadas.

*
* *

Terminaremos el estudio de las tensiones explicando un teorema muy notable, que traen todos los autores, que por otra parte es sumamente sencillo, y que pudiera utilizarse en

algún caso, á saber: la igualdad de las componentes normales recíprocas.

Sean (fig. 22) P, P_1 dos planos elásticos, es decir, dos planos ideales, trazados en el interior del cuerpo y sujetos á las acciones elásticas, que pasen por un punto M.

Sea Mn la normal al plano P, y Mn_1 la normal al plano P_1.

Sean, por último, MT la tensión correspondiente al plano P; y MT_1 la tensión que corresponde al plano P_1.

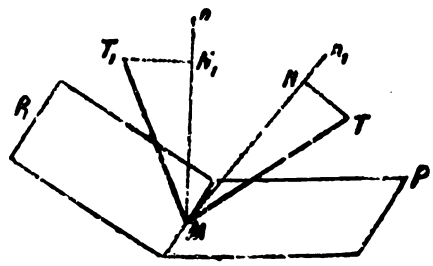


Figura 22.

El teorema consiste en lo siguiente:

Si cada tensión se proyecta sobre la normal correspondiente al otro plano, las dos proyecciones serán iguales.

Así: proyectando MT sobre Mn_1, tendremos MN, y proyectando MT_1 sobre Mn, tendremos MN_1.

Y vamos á demostrar que $MN = MN_1$.

La demostración es sumamente sencilla: las tres componentes de T sabemos que son,

$$X = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma,$$
$$Y = T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma,$$
$$Z = T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma.$$

Luego no hay más que proyectar el polígono formado por X, Y, Z sobre la normal Mn_1, que forma con los ejes ángulos cuyos cosenos designaremos por α_1, β_1, γ_1.

Tendremos, pues:

$$MN = X\alpha_1 + Y\beta_1 + Z\gamma_1,$$

ó bien

$$MN = (N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma)\,\alpha_1 + (T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma)\beta_1 + \\ + (T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma)\gamma_1,$$

ó desarrollando

$$MN = N_1\alpha\alpha_1 + N_2\beta\beta_1 + N_3\gamma\gamma_1 + T_1(\gamma\beta_1 + \beta\gamma_1) + \\ + T_2(\alpha\gamma_1 + \gamma\alpha_1) + T_3(\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1).$$

Si del mismo modo proyectásemos MT_1, ó sean sus componentes X_1, Y_1, Z_1, sobre Mn, cuyos cosenos directores son α, β, γ, con lo cual obtendríamos MN_1, se hallaría exactamente la misma expresión.

Pero este cálculo es inútil, porque el valor de MN es simétrico respecto á los dos grupos α, β, γ; α_1, β_1, γ_1, y así se ve que, invirtiendo α y α_1, y al mismo tiempo β y β_1, así como γ y γ_1, la expresión permanece invariable.

Con lo cual el teorema queda demostrado.

Y con esto damos por terminado el estudio de las tensiones.

Pasemos al de las deformaciones de los cuerpos elásticos, y éste será el objeto de la próxima conferencia.

Lo que de ésta nos queda, lo dedicaremos á recordar algunas ideas de Mecánica racional, que son elementales, pero que no está demás que mis oyentes recuerden, porque de ellas hemos de hacer uso frecuentemente en lo que sigue.

Diremos, pues, algo sobre la

Composición de rotaciones infinitamente pequeñas.

Se sabe, por Mecánica racional, que, cuando á un sistema de puntos se le dan movimientos infinitamente pequeños si-

multáneos, la posición final del sistema es la misma, que si todos estos movimientos se hubiesen dado á partir de la posición inicial, sumándolos después todos ellos; entendiendo la palabra suma en el sentido que ya se sabe, por ejemplo: sumando materialmente sobre cada eje las proyecciones de los desplazamientos parciales ó formando en el espacio paralelogramos iguales al paralelogramo de las fuerzas.

A este teorema se le da el nombre de *superposición de movimientos infinitamente pequeños.*

En el fondo, es lo mismo, que cuando en una función de diversas variables, x, y, z, se dan incrementos infinitamente pequeños á las variables independientes, dx, dy, dz, á partir de los valores iniciales. Representando por Adx, Bdy, Cdz estos incrementos parciales, se obtiene el incremento total sumándolos todos ellos; de modo que,

$$\text{incremento total} = Adx + Bdy + Cdz.$$

El resultado sólo diferirá del verdadero en infinitamente pequeños de orden superior.

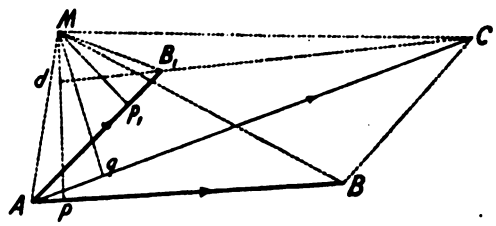


Figura 23.

Pues estos principios vamos á aplicar á la composición de rotaciones.

Sea A (fig. 23) un punto de un sólido.

Supongamos que á este sólido se le comunica un movimiento de rotación infinitamente pequeño alrededor del eje

AB, y otro movimiento de rotación simultáneo alrededor de AB_1, infinitamente pequeño también.

Por lo que hemos dicho antes, en vez de ser simultáneas las dos rotaciones, podemos suponer que son sucesivas, superponiendo los resultados.

Recuérdese, además, que la rotación alrededor de un eje se define *por el arco que describe cualquier punto que dista del eje la unidad;* y agreguemos que toda rotación estará definida por lo que en las últimas conferencias del curso precedente llamábamos un *vector.*

Es decir: la rotación alrededor de AB se definirá trazando AB y tomando sobre esta recta una longitud igual al valor de la rotación.

Supongamos que es esta misma longitud AB, que debemos considerarla como infinitamente pequeña, puesto que la rotación lo es.

También se puede tomar cantidades proporcionales para todas las rotaciones.

Por ejemplo: AB puede tener por valor ω, siendo ω una cantidad finita, y para obtener la verdadera rotación infinitamente pequeña, habrá que multiplicar AB por un infinitamente pequeño fijo, que llamaremos dt.

En algunos problemas podrá ser el tiempo infinitamente pequeño de la rotación instantánea.

Del mismo modo la rotación alrededor de AB_1 tendrá por valor el producto de AB_1 por dt.

En suma:

rotación alrededor de AB ..... ωdt,
rotación alrededor de AB_1 ..... $\omega_1 dt$.

Y ambas rotaciones están simbolizadas por las dos rectas

$$AB = \omega \ldots\ldots \quad AB_1 = \omega_1.$$

Claro es que cualquier punto que diste de AB la unidad,

describirá el arco infinitamente pequeño ωdt en la primera rotación; y cualquier punto que diste la unidad de AB_1 describirá otro arco infinitamente pequeño, $\omega_1 dt$.

En cuanto al sentido de las rotaciones, puede elegirse arbitrariamente, pero ha de ser siempre el mismo para todas ellas.

Por ejemplo, de *derecha á izquierda*, para un observador que tuviera los pies en A y el cuerpo en la dirección del vector AB.

Comprendido todo esto, que no es más que recordar lo que de seguro saben mis oyentes, diremos:

Que las dos rotaciones AB y AB_1 equivalen con infinitamente pequeños de orden superior, á una rotación infinitamente pequeña alrededor de AC, diagonal del paralelogramo formado por AB, AB_1.

Es decir, que AC, llamándola Ω, representará el vector de la *rotación resultante y única* equivalente á las otras dos, y el cuerpo efectuará una rotación infinitamente pequeña, que consistirá en que el punto que dista la unidad del eje AC describirá un arco infinitamente pequeño, $\Omega\, dt$.

Esto es lo que se llama la composición de rotaciones infinitamente pequeñas, que pasan por un punto.

Y como lo que hemos dicho para dos rotaciones pudiéramos decirlo para un número cualquiera, resulta que diversas rotaciones infinitamente pequeñas alrededor de un punto, equivalen á una rotación única, cuyo *eje* ó *vector* se obtiene componiendo por la regla del paralelogramo de las fuerzas todos los ejes ó vectores componentes.

La demostración es también elemental; vamos, sin embargo, á recordarla, reduciéndola á su forma más sencilla.

Y claro es que basta demostrar el teorema para dos rotaciones.

Para ello recordaremos un teorema elemental de Geometría.

Si desde el punto M (fig. 23), que para fijar las ideas, su-

ponemos que está fuera del ángulo BAB_1, trazamos rectas MA, MB, MB_1, MC, formaremos tres triángulos, que tendrán por vértice M y por bases los lados AB, AB_1, y la diagonal AC del paralelogramo, y el teorema consiste en que el área del triángulo que corresponde á la diagonal es igual á la suma de las áreas de los que corresponden á los dos lados; es decir,

$$\text{área } MAC = \text{área } MAB + \text{área } MAB_1.$$

En efecto; el área del triángulo MAB es, representando por Mp la perpendicular á la base:

$$\text{área } MAB = \frac{AB \times Mp}{2},$$

y suponiendo que Mp corte en d al lado B_1C

$$\text{área } MAB = \frac{AB \times Mp}{2} = \frac{AB\,(Md + dp)}{2} = \frac{AB \times Md}{2} + \frac{AB \times dp}{2}.$$

Pero

$$\frac{AB \times Md}{2} = \frac{B_1C \times Md}{2} = \text{área } MB_1C$$

y

$$\frac{AB \times dp}{2} = \text{área } \frac{ABCB_1}{2} = \text{área } AB_1C.$$

De donde resulta:

$$\text{área } MAB = \text{área } MB_1C + \text{área } AB_1C$$

y

$$\text{área } MAB + \text{área } MAB_1 = \text{área } MB_1C + \text{área } AB_1C + MAB_1.$$

Pero éstos tres triángulos forman precisamente el triángulo MAC; luego

$$\text{área } MAB + \text{área } MAB_1 = \text{área } MAC,$$

y siendo Mp, Mp_1, Mq las tres perpendiculares á las líneas AB_1 AB_1, AC, tendremos:

$$\frac{AB \times Mp}{2} + \frac{AB_1 \times Mp_1}{2} = \frac{AC \times Mq}{2}$$

ó bien

$$AB \times Mp + AB_1 \times Mp_1 = AC \times Mq.$$

Recordando que se llama *momento* de un vector respecto á un punto, el producto del vector por la perpendicular bajada sobre él desde dicho punto, podremos decir, que la ecuación anterior nos demuestra: que en un paralelogramo de vectores MB, MB_1, para un punto cualquiera, que esté en el plano de ambos y fuera del ángulo, *el momento de la resultante es igual á la suma de los momentos de las componentes.*

Si el punto, estando en el plano, se hallase dentro del ángulo, entonces el momento de la resultante seria, numérica-

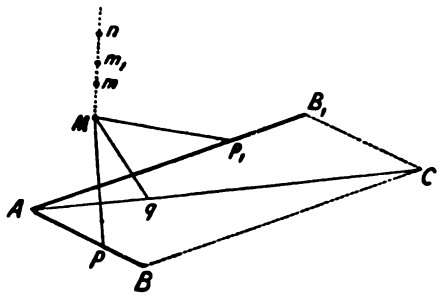


Figura 24.

mente, igual á la diferencia de los momentos de las componentes.

Y pasemos ya á la composición de rotaciones.

Sean (fig. 24, que supondremos en perspectiva), AB, AB_1 los vectores de dos rotaciones infinitamente pequeñas, aun-

que hayamos exagerado ambas longitudes para claridad de la figura.

Y sea AC la resultante del paralelogramo.

Cuando un cuerpo sólido gira alrededor de un eje, al cual suponemos que está invariablemente unido, basta para fijar la nueva posición del cuerpo, determinar la de uno de sus puntos; y para simplificar el problema, escogeremos un punto M en el plano del paralelogramo, y á este punto le someteremos á las dos rotaciones $AB = \omega$ y $AB_1 = \omega_1$.

Prescindimos aquí del factor infinitamente pequeño dt, que suponemos comprendido en ω y ω_1.

Haciendo girar el cuerpo alrededor de AB, el punto M, cuya perpendicular sobre AB representaremos por p, trazará un arco infinitamente pequeño, Mm, que se confundirá con una recta infinitamente pequeña perpendicular al plano del paralelogramo.

La longitud de dicha recta Mm será igual al producto del ángulo de rotación ω por la perpendicular $Mp = p$. De suerte que tendremos

$$Mm = \omega p.$$

Asimismo, la rotación alrededor de AB_1 estará presentada, partiendo siempre de la posición inicial, por la recta infinitamente pequeña Mm_1, cuyo valor será, representando la perpendicular Mp_1 á AB_1 por p_1,

$$Mm_1 = \omega_1 p_1.$$

Ambas rotaciones, para el punto M, parten de la posición inicial de éste y se superponen; de modo que tomando $m_1 n = Mm$, tendremos

$$Mn = p\,\omega + p_1\,\omega_1.$$

Pero si al punto M le damos una rotación alrededor de AC igual á $AC \,.\, q$, siendo q la perpendicular á AC trazada

desde M, el punto M, por esta rotación única, vendrá á la misma posición que antes; porque en virtud del lema que hemos demostrado,

$$Mn = \omega p + \omega_1 p_1 = AB \,.\, p + AB_1 \,.\, p_1,$$

es igual á

$$AC \,.\, q.$$

En efecto; según el lema $\omega p + \omega_1 p_1 = AC \,.\, q$.

De manera, que las dos rotaciones infinitamente pequeñas alrededor de AB y AB_1 traen al punto M á la misma posición que la rotación única AC.

Como lo mismo podemos decir de otros dos puntos cualesquiera del plano del paralelogramo (uno de los cuales pudiera ser A), resulta por fin que el plano del paralelogramo, y por consiguiente el cuerpo á que va unido, viene á parar á la misma posición por las dos rotaciones ω y ω_1 simultáneas ó consecutivas, que por la rotación única $\Omega = C$ que representa la diagonal del paralelogramo.

De aquí resulta, que las rotaciones infinitamente pequeñas alrededor de ejes que pasan por un punto, se componen y descomponen del mismo modo que las fuerzas.

Por lo tanto, refiriendo la rotación alrededor de un eje cualquiera, que pasa por el origen O (fig. 25), á los tres ejes coordenados x, y, z, podrá descomponerse en tres rotaciones, p, q, r, alrededor de dichos ejes coordenados.

Esto nos permite resolver el siguiente problema, del cual hemos de hacer aplicación en la conferencia próxima.

Se da un eje cualquiera, J, que no está representado en la figura 25, pero cuyas componentes son, según los ejes, p, q, r.

Se da un punto, M, perteneciente á un sólido ó á un sistema.

Este punto M tiene una rotación infinitamente pequeña, J, alrededor de dicho eje, y es claro, que si x, y, z representan las coordenadas de M, al terminar la rotación, estas coordenadas habrán variado; y se desea conocer dichas variaciones.

En suma, se trata de hallar la variación de las coordenadas de un punto, por virtud de una rotación infinitamente pequeña alrededor de un eje que pase por el origen.

Todo está reducido á conocer la posición final del punto

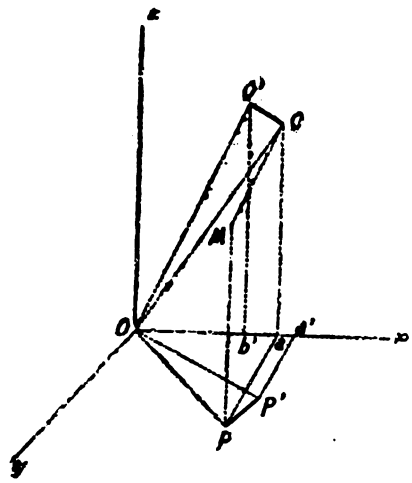


Figura 25.

M por virtud de la rotación J y á proyectar este punto sobre los ejes.

Pero en virtud de lo que demostramos antes, tanto da determinar la posición final del punto M por la rotación J como por las tres rotaciones p, q, r, efectuadas á partir de la posición inicial M.

Estudiemos estas tres rotaciones.

Empecemos por determinar la variación de x por virtud de las tres rotaciones p, q, r.

La rotación alrededor del eje de las x, como se efectúa en un plano perpendicular á éste, no alterará el valor de x.

En la figura 25, M se proyecta en a sobre el eje de las x, antes y después del giro alrededor de dicho eje.

Apliquemos la rotación alrededor del eje de la y. Lo mismo da estudiar la rotación q del punto M alrededor del eje de las y, que la de su proyección Q sobre el plano de las xz alrededor de O.

Q describirá alrededor de O un arco QQ', infinitamente pequeño y de derecha á izquierda, si suponemos que éste es el sentido directo de las rotaciones.

La longitud QQ' será igual á la rotación q por el radio OQ, de suerte que

$$QQ' = OQ \,.\, q.$$

Y tendremos que proyectarla sobre el eje de las x para ver la variación que experimenta $Oa = x$.

El ángulo que forma QQ' con el eje de las x es el mismo que el que forma OQ con el eje de las z, es decir, OQa.

De suerte que siendo b' la proyección de Q' sobre x, tendremos $ab' = QQ' \times \cos OQa = OQ \times q \times \frac{z}{OQ} = qz$.

Pero evidentemente será una variación negativa, como se ve en la figura; de modo que tendremos:

$$\text{variación de } x \text{ por la rotación } q = -qz.$$

Análogamente podemos calcular la variación de x por la rotación de M alrededor del eje de las z.

Da lo mismo considerar la rotación de M alrededor de z que la de su proyección P sobre el plano de las x y alrededor de O, y tendremos, repitiendo los razonamientos anteriores, variación x por la rotación $r = aa' = PP' \cos OPa = OP \times r \times \frac{y}{oP} = ry$, y esta variación es, evidentemente, positiva.

Luego la variación de x por virtud de las tres rotaciones componentes, ó sea de la rotación J, será, reuniendo las dos variaciones parciales con sus signos:

$$\text{variación } x = ry - qz.$$

Si hubiéramos elegido el sentido contrario para la rotación, los signos serían los contrarios.

De igual suerte podemos calcular las variaciones de y, asi como las variaciones de z; pero, según explicábamos en las conferencias del curso anterior, no hay más que aplicar á la fórmula hallada las dos substituciones circulares

$$(p\,q\,r)$$
$$(x\,y\,z);$$

de modo que obtendremos para las variaciones que produce una rotación J cuyas componentes son p, q, r, sobre las coordenadas x, y, z de un punto, las tres expresiones siguientes, en que δx, δy, δz son dichas variaciones,

$$\delta x = ry - qz,$$
$$\delta y = pz - rx,$$
$$\delta z = qx - py.$$

Se supone que la rotación es de derecha á izquierda para un observador colocado en la dirección del vector.

Todo lo que precede, pertenece á la Mecánica racional, pero son fórmulas de uso tan frecuente, que no creo que el haberlas recordado haya sido completamente inútil.

La regla nemotécnica para retenerlas de memoria es bien sencilla.

En el segundo miembro de cada fórmula, entran las dos coordenadas distintas de la que contiene el primero.

Por ejemplo, en variación z, el segundo miembro contiene

las otras dos coordenadas x, y; y respecto á las componentes de las rotaciones, entran también las dos primeras p y q; pero alternadas con las x, y: es decir, la segunda con la primera, q con x; y la primera con la segunda, p con y.

Lo mismo podemos decir de los otros dos términos. En δy entran las otras dos, z, x, que son última y primera; y en las rotaciones, también la última y primera r, p, y alternadas.

Finalmente, para pasar de la primera fórmula á las otras, no hay más que aplicar, como hemos dicho, las substituciones circulares; y para pasar de la última á las primeras, estas mismas substituciones circulares, invertidas.

No ha de olvidarse tampoco lo que hemos dicho, respecto al sentido de la rotación.

***

Como para el estudio de las deformaciones hemos de tomar por guía el trabajo de Mr. Sarrau, á que nos hemos referido varias veces, así como las notaciones de este autor, aplicaremos desde luego estas últimas á las fórmulas que preceden, substituyendo:

á $\delta x, \delta y, \delta z$..... u_1, v_1, w_1;

á x, y, z..... h, k, l

y á p, q, r..... p_1, p_2, p_3

Además, supondremos ahora, como el autor citado, que las rotaciones directas son de izquierda á derecha; para lo cual, deberemos cambiar los signos de las últimas fórmulas.

Con lo que tendremos

$$u_1 = p_2 l - p_3 k,$$
$$v_1 = p_3 h - p_2 l,$$
$$w_1 = p_1 k - p_2 h.$$

Estas fórmulas significan que cuando un punto, cuyas coordenadas son h, k, l, gira alrededor de los tres ejes coordenados, verificando las rotaciones infinitamente pequeñas p_1, p_2, p_3 alrededor de x, y, z y de izquierda á derecha, las proyecciones del punto, sobre los ejes, sufre tres desplazamientos, u_1, v_1, w_1, cuyos valores son los que expresan las fórmulas anteriores.

XXVI.—Mareómetros y mareógrafos de sifón.

POR EDUARDO MIER Y MIURA.

7.—Cálculo aproximado de las correcciones para los mareómetros y mareógrafos del Atlántico.

Claro es que cálculos análogos á los precedentemente establecidos para el mareógrafo de Alicante, pueden efectuarse para los de Cádiz y Santander, pero teniendo el piso del edificio de este último la cota de $+ 2^m,684$ y sólo la de $+ 0^m,825$ el suelo del de Cádiz, y correspondiendo en éste menores oscilaciones al nivel del mar que en aquél, como nuestro objeto principal es demostrar la posibilidad de emplear los mareómetros de sifón en todo el litoral español, eligiremos, para nuestro estudio, el mareógrafo de Santander, que resulta en condiciones mucho peores.

La menor cota observada en las aguas del mareógrafo de Santander durante diez y seis años es de $-5^m,472$; pero nosotros supondremos que puede llegar á bajar hasta $-5^m,70$, y en vez de la cota máxima observada $+ 0^m,0812$, admitiremos la de $+ 0^m,30$, con los cuales números, siendo como hemos dicho $+ 2^m,684$ la cota del piso del mareógrafo, resul-

tará que, cuando más bajas estén las aguas, distarán verticalmente de él $8^m,384$, y cuando menos, $2^m,384$.

A la oscilación total admitida de 6 *m*, corresponde próximamente otra en las superficies de mercurio de $\frac{6}{13,3} = 0,^m451$, de modo que sobrará con que tengan 60 centímetros de largo las ramas del tubo del mareómetro; pudiendo deducirse de este dato de cálculo que no hay medio alguno de que aquél deje de funcionar aun en las más bajas mareas, puesto que estableciéndole de modo que su parte inferior esté á unos 75 cm. del suelo, la superior no llegará á quedar más que unos $8,384 + 0,75 + 0,60 = 9^m,734$ sobre las más bajas aguas.

Además, se infiere de los números precedentemente calculados que, en bajamar viva, la diferencia de nivel entre la superficie libre del mercurio, y la de las aguas del mar, no llegará ni á $9^m,20$, pudiendo adoptarse este número, como un límite máximo de los valores de D, en la expresión de las correcciones por presión barométrica.

Calculando ésta, tomando valores medios entre los extremos que para t, B' y D resultan realmente en Santander, cual antes lo efectuamos para Alicante, obtendremos:

$$D = 6\,m$$

$$B' = 750$$

$$t = 16^\circ$$

$$P = \frac{2\,D\,B'}{16000 + 64\,t - D} = \frac{9000}{16954} = 0^{mm},53;$$

y como para esa temperatura de 16° corresponde, en las tablas que hemos calculado, la escala 13,318, resultará una corrección media por presión barométrica de unos:

$$+ 7^{mm}.$$

Como las temperaturas extremas observadas en Santander son $+34^{\circ},40$ y $-3^{\circ},80$, y las presiones, $778^{mm},42$ y $732^{mm},54$, exagerando estos datos, poniéndonos en las peores condiciones, seguramente la mayor corrección del género de las que ahora examinamos será inferior á la calculada á continuación.

$$P = \frac{2 \times 9,2 \times 780}{16000 - 64 \times 4 - 9,2} = \frac{14352}{15734,8} = 0,^{mm}91,$$

$$0,^{mm}91 \times 13,234 = 12^{mm}.$$

Cometeríase, por lo tanto, un error de 5^{mm} al adoptar la corrección constante de 7^{mm} que antes señalamos; pero téngase en cuenta que para llegar á tal error se necesitan circunstancias especialísimas y extremadas en la temperatura, la presión barométrica y la situación de las aguas, que difícilmente concurrirán una sola vez y contados instantes en veinte ó más años, no debiendo olvidarse que en los mareógrafos ordinarios, no ya de esa manera tan excepcional, sino de continuo, sólo el error debido á la inercia llega, como más adelante veremos, á valer algunos centímetros, con la notable y decisiva diferencia de que en nuestra mano está el calcular cuánto vale la corrección expresada, con un error completamente despreciable; mientras que las inexactitudes que de la inercia dependen es punto menos que imposible estimarlas en su variable valor.

Por otra parte, aun sin calcular en cada caso la corrección debida á la altura barométrica, fácil es encerrar el error cometido entre límites totalmente despreciables.

Obsérvese, para conseguir esto, que según atestigua la fórmula de esa correccion, las variaciones que menos influjo tienen, son las que experimentan las temperaturas, ya por la forma en que éstas entran en su denominador, ya por influir en sentido contrario en el valor de la escala, puesto que

al paso que ésta crece con t, disminuye en cambio el valor de P, por aumentar su denominador.

Las otras dos cantidades variables que entran en la fórmula que da el valor de P, que son B' y D, pueden variar cuando más: la primera entre 730 y 780^{mm} y la segunda entre $9^m,2$ y $3^m,2$, advirtiéndose desde luego que las mayores alteraciones que su producto, y el valor de P, por lo tanto, experimenta, corresponden á las del menor factor D, puesto que poniendo aquél bajo la forma:

$$(3,2 + v)(700 + v') = 2240 + 700\,v + 3,2v' + vv',$$

si bien v' puede variar entre 30 y 80 y v sólo entre 0 y 6; el factor que multiplica á esta última variable es unas 200 veces mayor que el coeficiente de v'.

Atendiendo á esto puede tomarse como guía, para la corrección que ha de introducirse, el valor del desnivel D, ó del que exista entre las superficies del mercurio en las dos ramas del mareómetro, íntimamente ligado con aquél, y aceptar la siguiente tabla, en que al lado de cada valor de m está el correspondiente de la corrección que ha de emplearse, procediéndose para las lecturas intermedias por una interpolación mental, cual se acostumbra ordinariamente á hacer.

Valores de la lectura. — $^1/_2\,m$.	Valor de la corrección debida á la presión barométrica.
10 cm.....	+ 3 mm
15 —	+ 4
20 —	+ 6
25 —	+ 7
30 —	+ 8
35 —	+ 9
40 —	+ 11
45 —	+ 12

Para demostrar la bondad de esta tabla, tomemos un ejemplo á capricho, para comprobarle, entre los que hemos calcu-

lado, y supongamos que se ha hecho la lectura $m = 34$ centímetros y observado la temperatura de 2°. Con arreglo á este último número dan las tablas $e = 13{,}259$ para la escala, y correspondiendo próximamente á los 17 cm. una corrección de 5 mm. podremos escribir:

$$a = 0{,}34 \times 13{,}259 + 0{,}005 = 4{,}^{m}513$$

y veremos cuán poco puede variar la corrección aceptada, 5 mm., de la verdadera.

Los casos extremos que para ese desnivel y esa temperatura pueden ocurrir son cuando

$$B' = 730 \text{ y } B' = 780,$$

y fácil es ver que:

$$\begin{array}{llll} \text{para } B' = 730 & P = 0^{mm},38 & P \times e = 5^{mm},04 \\ \text{» } B' = 780 & P = 0^{mm},41 & P \times e = 5{,}44 \end{array}$$

es decir, un error que cuando más no llega á valer medio milímetro de altura de las aguas.

8. – Determinación de las cotas del nivel de las aguas.

Los cálculos que hemos hecho marcan el camino que ha de seguirse, bien para hallar con toda precisión ó ya con errores algo mayores, pero despreciables, el valor de las alturas de las columnas de agua a, es decir, de las $q\ D$ de la figura 1.ª

Para obtener de esa cifra las cotas que el nivel del mar D tiene, con relación á un plano cualquiera de comparación, hay que efectuar tan sólo un sencillísimo cálculo.

Sea el plano elegido el 00, que pasa por los ceros de las dos escalas en que leemos las alturas $m\ t$ y $p\ v$ (fig. 1.ª) que

luego restamos para determinar $p\ m$, base de todo el cálculo. Evidentemente la cantidad buscada:

$$xD = qD - xq;$$

y claro es que siendo qD lo que hemos llamado a y $qx = vp$,

$$xD = a - vp;$$

luego con restar de los valores de a, calculados como ya indicamos, el de la lectura hecha en la rama del tubo en U que sigue hasta el mar, obtendremos la cota deseada.

9. – De algunas correcciones que pueden despreciarse desde luego.

Habrá quien observe que hemos prescindido, en cuanto precede, de los errores que puedan producir los meniscos que el mercurio pudiera formar en las dos ramas del tubo en u, y así ha sido ciertamente; pero como en cuanto los tubos tienen de 2,5 á 3 cm. de diámetro interior, las depresiones que en sí llevan esos meniscos desaparecen, y de 3 cm. ó más pueden ser los tubos empleados en los mareómetros, no hay para qué ocuparse de estas depresiones.

Además, aun cuando existieran esos meniscos por usar diámetros inferiores, como influyen próximamente en el mismo sentido en ambas ramas, al hacer la resta de ambas lecturas, el mareómetro está en el mismo caso que el barómetro de Gay-Lussac, en el que generalmente se admite la compensación de esos errores, que, por otra parte, si en ello hay gusto, puesto que no existe conveniencia ni necesidad, pueden estimarse, tomándose el trabajo de medir las flechas de ambos meniscos y usando la conocida tabla de Delcros.

Tampoco hemos mencionado las correcciones que las lecturas han de sufrir por la influencia de la temperatura en las

escalas, aumentando ó disminuyendo el valor de sus divisiones; porque verificándose estas variaciones de una manera simultánea en ambas, por sí solas desaparecen, al hacer la resta que da el valor m empleado en los cálculos.

En las observaciones á que dan lugar los estudios astronómicos y los de la gravedad por medio del péndulo, admítese como corriente, que poniendo entre las dos rayas de una escala de Füss, que á veces distan entre sí un milímetro, otro trazo de unas cuantas décimas de milímetro de ancho, el observador estima á ojo, en estas mismas reducidísimas unidades, la distancia que al eje del tal trazo separa de la inmediata raya y no fuera, por lo tanto, caso maravilloso ni inaudito que pretendiéramos que á la simple vista pudieran estimarse las alturas de las columnas de mercurio en décimas de milímetro; pero mejor será, aun cuando esto aumente el precio de los aparatos, si se busca gran precisión en ellos, emplear en una y otra rama los conocidos nonios, que de ordinario se utilizan con análogo fin en los barómetros.

Podrá cometerse así un error de lectura en cada rama, inferior á una décima de milímetro, y claro es que, al restar ambas, según el signo de aquéllos sea, aparecerán restados ó sumados en el resultado.

Esto último supondremos, por creer que es el camino más seguro para evaluar debidamente la precisión de un instrumento, que aparece encubierta muchas veces bajo aparatosos resultados, cuando se acude al socorro de las repeticiones y al del cálculo de probabilidades. De ese modo, podremos afirmar que conocemos m con un error que no excede de $0{,}2^{mm}$, y podremos escribir:

números exactos $a = m.\,e + Pe$

ídem aproximados $a \pm E = e\,(m \pm \varepsilon) + Pe;\ \varepsilon < 0{,}2^{mm}$

despreciando por ahora el error de Pe, del que ya hemos hablado bien largamente.

El error debido á las lecturas, será:

$$E = \pm \varepsilon e < \pm 0{,}2^{mm} e;$$

y como ya antes indicamos que en todas las costas de nuestra Península:

$$e < 13{,}448,$$

resulturá que:

$$E < 0{,}^{m}0002 \times 13{,}488 = 0{,}^{m}0026976;$$

luego no excederá seguramente el máximo error cometido de $2{,}7^{mm}$ de altura de agua, número que por su pequeñez es absolutamente despreciable, dada la naturaleza de la cantidad medida, aun sin compararla con los errores veinte veces mayores que los mareógrafos ordinarios dan.

X.—Reducción de las dos lecturas de los mareómetros á una sola, y amplificación de la escala.

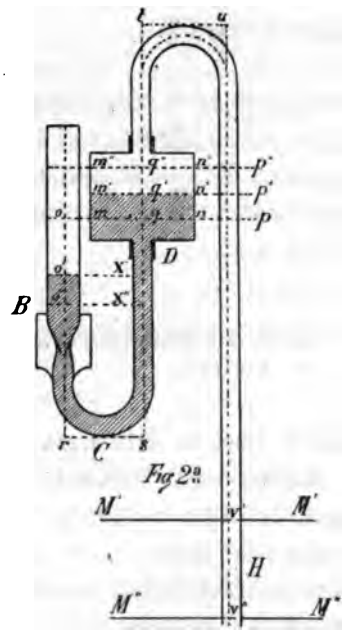
Como es condición inseparable de nuestra naturaleza el acoger con prevención todo lo nuevo, esmerándonos en encontrar defectos, sin cuidarnos de los que existan en lo que por bueno nos han dado y como tal hemos aceptado, podrá quizás decirse que la lectura única de los mareómetros ordinarios venimos á substituirla por dos, haciendo de este modo más enojosa la observación, y podrá también afirmarse que la escala con que las variaciones del nivel del líquido se acusan en ambas columnas de mercurio, que se acerca á $\frac{1}{27}$, es excesivamente grande, y aun cuando en todo lo que precede queda demostrado que, con esta escala y todo, las condiciones de precisión son excelentes, y aunque el uso de dos lecturas, á las compensaciones que entre sí establecen unen la comprobación recíproca que dan, con

todo y con eso, demostraremos que esa escala de las lecturas puede reducirse enormemente y que también es hacedero substituir por una sola ambas observaciones.

Las consideraciones por las cuales hemos llegado á la igualdad:

$$a = m.\ e + P.\ e$$

son completamente independientes de la forma y de las dimensiones que las dos ramas del tubo en *u* tengan, así es que seguirán verificándose cuando demos á éstas la forma que tienen en la figura 2.ª, en la que suponemos la existencia de una ancha cubeta, *D*, en la rama que comunica con el mar.



El mercurio, cuando el mareómetro está sin cargar, tiene la posición de equilibrio, en la que las dos superficies *o* y *m n* vienen á ser prolongación la una de la otra, y una vez cargado, siendo *M' M'* el nivel de las aguas del mar, toman aquéllas la situación *o'* y *mn'*, cambiándose éstas por las *m''n'* y *o''* cuando las aguas descienden á *M'' M''*; pero en todas las posiciones, las columnas de azogue de alturas $q'x', q''x''$... equilibran á las correspondientes de agua de mar $p'v', p''v''$..., pudiéndose escribir que:

$$a = p'v' = q'x'.\ e + P.\ e = (q'q + q\,x')\,e + Pe =$$
$$= (q'q + oo')\,e + Pe$$
$$a = p''v'' = q''x.''\ e + Pe = (q''q + q\,x'')\,e + Pe =$$
$$= (q''q + oo'')\,e + Pe,$$

puesto que en todas las posiciones, las alturas de mercurio ro', ro''... se hacen equilibrio con las sx', sx''...; las de agua tq', tq''..., con las up', up''..., y las $q'x', q''x''$... de mercurio, con los de agua $p'v, p''v''$...; siendo lícito, por lo tanto, escribir la fórmula general:

$$a = (q'q + oo')e + Pe;$$

y observar que, indefectiblemente, como la cantidad de mercurio en que disminuye la rama AB es precisamente la misma en que aumenta la cubeta si designamos por R el radio de ésta y por r el de aquélla:

$$oo'.\pi r^2 = qq'.\pi R^2 \; o' \; qq' = oo' \frac{r^2}{R^2}$$

valor que, llevado á la expresión general, la convierte en:

$$a = \left(oo' + oo' \frac{r^2}{R^2}\right)e + Pe = oo'\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)e + Pe,$$

y como la suma calculada entre paréntesis es una cantidad fija, resulta que la escala aparece multiplicada en realidad por una constante, transformándose por lo tanto.

Con tal de que $r = 1\ cm$ y $R = 4$, aparecerá que:

$$a = oo'\left(1 + \frac{1}{16}\right)e + Pe = oo' \frac{17}{16} e + Pe,$$

que para el valor medio de e 13,3 da

$$a = oo'.14{,}13 + Pe,$$

indicando las oscilaciones de oo' no ya la fracción $\frac{1}{26{,}6}$ de las que experimenta el agua del mar, sino la $\frac{1}{14{,}13}$, próximamente.

11.– Conversión de las lecturas mareométricas en cotas.

Para deducir de esos valores de a los correspondientes á las cotas del mar, observaremos que tomando el plano $omnp$ como superficie de comparación, las diversas cotas pv', pv''... son los resultados de las restas $p'v' - pp'$, $p''v'' - pp''$... pudiendo escribir en general:

$$c = a - pp' = a - oo' \frac{r^2}{R^2},$$

y aquí conviene observar que eligiendo á r suficientemente pequeño con relación á R, pueden construirse mareómetros en que esa corrección $oo' \frac{r^2}{R^2}$ sea completamente despreciable.

En uno de los mareómetros de cubeta que hemos construído, tiene ésta un diámetro de 150 mm., mientras que es de 3,5 el del tubo en que se leen las oscilaciones y con arreglo á éstos datos:

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{3{,}5^2}{150^2} = \frac{1}{1837},$$

de modo que, aun cuando oo' llegara á valer $0^m{,}5$, resultaría una corrección despreciable de $\frac{0{,}5}{18{,}37}\, 0^m{,}0003$, pudiendo adoptarse los valores de a como cotas, con la plena seguridad de que jamás se llega á cometer por esto un error de 3 décimas de milímetro en el nivel deducido para el agua.

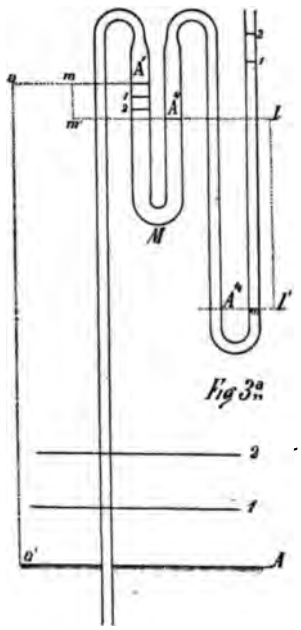
12. - Aumento de la escala por medio de tubos auxiliares.

De la expresión general:

$$a = oo'\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)e + Pe,$$

se deduce que sean los que quieran los valores de r y R, jamás podrá conseguirse observar en la rama AB del mareómetro oscilaciones que lleguen á valer siquiera $\frac{a}{e}$, y como e es siempre superior á 13, parece que no es fácil aumentar la escala en que los líquidos del mareómetro den sus indicaciones, y así es, en efecto, si éstos no sufren alguna variación.

Pero unamos á la rama libre A'' del aparato otro segundo tubo, en U, A''', figura 3, llenándole en parte con otro líquido distinto del mercurio, y con esa sencilla transformación podremos disponer de la escala que se nos antoje, dentro de muy apartados límites.



Para la posición que indica la figura, en que el nivel del líquido auxiliar llega á A''', fácil es ver, que haciéndose equilibrio las dos columnas de agua de mar que están sobre la horizontal aA' y las dos del líquido indicador que están por cima de $A''l$, así como las de mercurio que resultan en la parte inferior y las otras dos que quedan por debajo de $A'''l$, solamente restan: la columna de agua de mar aa', la de mercurio de altura mm' y la del líquido auxiliar ll', que entre sí equilibran sus esfuerzos, compensando una parte del que á aa' corresponde el que en sentido contrario establece la mm', y la otra parte restante el que es propio de la ll', cuya acción se suma con la del mercurio.

De un modo general, si d_m, d_a y d_l representan respectivamente las densidades del mercurio, del agua y del líquido auxiliar, claro es que la parte x de aa' que equilibra la

altura de mercurio mm', estará dada por la proporción inversa:

$$\frac{x}{mm'} = \frac{d_m}{d_a}, \text{ de donde } x = mm' \frac{d_m}{d_a};$$

así como la parte y que á ll' corresponde se deducirá de la

$$\frac{y}{ll'} = \frac{d_l}{d_a}, \text{ que da } y = ll' \frac{d_l}{d_a},$$

valores de x é y que sumados dan:

$$aa' = x + y = mm' \frac{d_m}{d_a} + ll' \frac{d_l}{d_a};$$

y para otra posición distinta:

$$a_1 a'_1 = m_1 m'_1 \frac{d_m}{d_a} + l_1 l'_1 \frac{d_l}{d_a},$$

que restada miembro á miembro de la anterior produce la igualdad:

$$(a a' - a_1 a'_1) = (m m' - m_1 m'_1) \frac{d_m}{d_a} + (ll' - l_1 l'_1) \frac{d_l}{d_a},$$

que liga las variaciones de la altura de la columna de agua de mar con las de mercurio y con las del líquido auxiliar. Para relacionar estas últimas variaciones con las primeras será preciso eliminar las que corresponden al mercurio $(mm' - m_1 m_1')$ y para ello basta con fijar algo la atención, sobre la figura 3.ª, en lo que sucede cuando varía el nivel $a'A$ de las aguas del mar.

Supongamos, por ejemplo, que ese nivel sube. Como consecuencia inmediata de esta subida, bajará el mercurio en el tubo A', ascenderá en el A'' y el líquido auxiliar también subirá en A'', ó en otros términos, habrá bajado la horizontal $a A'$ y habrán subido las $m' l$ y $A''' l'$.

Si atribuímos, para simplificar los cálculos, igual diámetro á los tubos A' y A'', claro es que el nivel del mercurio en el primero habrá bajado tanto como haya subido en el segundo, y la variación de altura experimentada por la columna de mercurio, $mm' - m_1 m'_1$ será el doble de uno de aquellos dos cambios de nivel, que representaremos por α; de modo que:

$$(mm' - m_1 m'_1) = 2\alpha.$$

Por atra parte, la altura de la columna de liquido auxiliar si designamos por β lo que haya subido el nivel en el tubo A''', cuando la horizontal $A''\,l$ ha subido también la altura α, habrá experimentado un cambio representado por $\beta - \alpha$, y podremos establecer que:

$$ll' - l_1 l_1' = \beta - \alpha.$$

Y como precisamente la cantidad de líquido auxiliar que ha desaparecido del tubo A'' es la misma que ha pasado al A''', si r y R son los radios respectivos de esos tubos, evidente es que:

$$\beta \pi r^2 = \alpha \pi R^2 \quad \text{ó} \quad \alpha = \beta \frac{r^2}{R^2}.$$

Este valor de α substituido en las igualdades anteriores da:

$$(m\,m' - m_1\,m'_1) = 2\,\beta \frac{r^2}{R^2},$$

$$(l\,l' - l_1\,l'_1) = \beta \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

que á su vez producen la:

$$(aa' - a_1\,a'_1) = \beta \left(2\,\frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{d_m}{d_a} - \frac{r^2}{R^2}\,\frac{d_l}{d_a} + \frac{d_l}{d_a}\right) =$$

$$= \beta \left(\frac{r^2}{R^2}\left(2\,\frac{d_m}{d_a} - \frac{d_l}{d_a}\right) + \frac{d_l}{d_a}\right),$$

y si se designa por ν la variación de nivel que ha experimentado el agua del mar, como:

$$(a a' - a_1 a'_1) = \nu + \alpha = \nu + \beta \frac{r^2}{R^2},$$

se tendrá, finalmente:

$$\beta = \nu \left(\frac{r^2}{R^2} \left(2 \frac{d_m}{d_a} - \frac{d_l}{d_a} - 1 \right) + \frac{d_l}{d_a} \right),$$

que relaciona las variaciones del nivel en el mar con las del líquido auxiliar en el tubo A''', expresando la proporcionalidad entre ambas.

Se llegaría á obtener el valor 1 para la escala, cuando todos los líquidos tuvieran idéntica densidad, hecho que, si bien comprueba la bondad de la fórmula, en realidad no cabe aprovechar para nada útil, toda vez que si se usara el instrumento como mareómetro, se descargaría desde luego, y si se colocara muy bajo, para que esto no sucediera, tratando de darle otras aplicaciones especiales, quedaría reducido su papel al que pudiera desempeñar un sencillo tubo, indicador de nivel.

Pero, al mismo tiempo, evidencia esa fórmula la verdad de cuanto precedentemente asegurábamos, al sostener que, por medio de tubos auxiliares podría conseguirse observar oscilaciones en los mareómetros muy superiores á $\frac{1}{13}$ de las que el nivel de las aguas experimentara, porque claro es que empleando líquidos auxiliares de mínima densidad, y dando convenientes valores á r y R, el coeficiente de la escala, por el que aparece multiplicada β, en la fórmula anterior, puede llegar á tener valores muy inferiores á 13.

Si en la rama A''' (fig. 3) echáramos suficiente líquido auxiliar, evidente es que podríamos conseguir que siempre, por baja que estuviere la superficie de nivel del mercurio, resultara más alta que ella la del líquido auxiliar A'''.

En este caso, en vez de equilibrar la columna aa' de agua á las de mercurio y de líquido auxiliar, se sumaría la acción de esta última con la de la primera, para compensar el efecto de la segunda, pudiendo llegarse por análogas consideraciones á las antes expuestas á establecer las igualdades

$$aa' = mm' \frac{d_m}{d_a} - ll' \frac{d_l}{d_a},$$

$$a_1 a'_1 = m_1 m'_1 \frac{d_m}{d_a} - l_1 l'_1 \frac{d_l}{d_a},$$

$$(aa' - a_1 a'_1) = (mm' - m_1 m'_1) \frac{d_m}{d_a} - (ll' - l_1 l'_1) \frac{d_l}{d_a}.$$

Y designando, como antes, por α el cambio de nivel del mercurio en uno de los dos tubos A' ó A'', supuestos de igual radio, para una bajada de nivel del agua

$$mm' - m_1 m_1' = 2\alpha,$$

así como representando por β el descenso de nivel en el tubo auxiliar:

$$ll' - l_1 l_1' = \alpha - \beta,$$

que nos conducirían á la misma relación antes hallada entre ν y β, toda vez que esta última diferencia $ll' - l_1 l_1'$, habría de restarse, en vez de sumarse, como antes.

En general, por lo tanto, las variaciones de nivel están enlazadas entre sí por la relación:

$$\nu + \alpha = 2\alpha \frac{d_m}{d_l} + (\beta - \alpha) \frac{d_l}{d_a},$$

que con la

$$\beta r^2 = \alpha R^2$$

permite eliminar β ó α, según convenga, y referir las variaciones de nivel del agua á las del líquido auxiliar ó á las del mercurio.

13.—Aplicación de los tubos auxiliares en un caso especial.

Para hacer resaltar más fácilmente cuanto acabamos de indicar, hagamos la hipótesis de que el líquido auxiliar sea también agua del mar ($d_l = d_a$), aunque no sea favorable, y en tales condiciones como:

$$v = \left\{ 2 \frac{r^2}{R^2} \left(\frac{d_m}{d_a} - 1 \right) + 1 \right\} \beta,$$

asignanda á $\frac{dm}{d_a}$ el valor medio 13,3, resultará que:

$$v = \left(24{,}6 \frac{r^2}{R^2} + 1 \right) \beta.$$

Para que las variaciones de nivel en el mareómetro sean la $\frac{1}{n}$ parte de las que experimente el agua del mar, bastará con que r y R sean tales que:

$$24{,}6 \frac{r^2}{R^2} + 1 = n,$$

ó sea que

$$24{,}6 \frac{r^2}{R^2} = n - 1 \text{ ó } R^2 = \frac{24{,}6}{n-1} r^2,$$

$$R = r \sqrt{\frac{24{,}6}{n-1}},$$

fórmula que aplicada, por ejemplo, al caso en que se de-

seara obtener en el mareómetro variaciones tres veces menores, nada más, que en el mar, nos daría la relación

$$R = 3{,}51\ r;$$

es decir, que si r vale, por ejemplo, 1 cm., bastaría con que el radio del tubo más grueso, que contiene el mercurio, tuviera un diámetro de 7 cm. próximamente.

14.—Mareómetros para grandes profundidades.

Las anteriores fórmulas se prestan á una curiosa discusión acerca de los valores y signos de las cantidades que en ellas intervienen, que omitimos, tanto por creer que no es de resultados más prácticos que las consideraciones ya apuntadas, cuanto por el deseo de abreviar este trabajo.

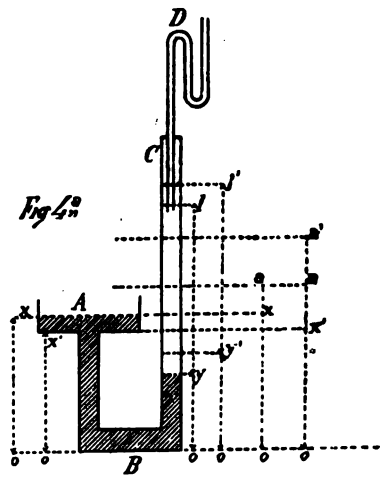
Y por eso mismo aquí daríamos fin á este estudio teórico si no quisiéramos salir al reparo de alguna objeción que, con visos de fundada, pudiera hacerse acerca de la utilidad de los mareómetros de sifón.

No sería difícil encontrar quien dijera que los mareómetros eran aparatos sencillos, baratos y muy precisos; siendo una verdadera lástima que el propio modo de ser de las cosas limitara su empleo en tales términos que, sólo en contados lugares pudieran establecerse, ya que su teoría exige que la parte más alta del sifón no pueda estar sobre las aguas arriba de unos 10 metros.

Basta con esta altura, como hemos demostrado, dando preferencia al estudio del mareómetro de Santander, por esa misma razón, para que los mareómetros de sifón puedan emplearse en todas nuestras costas, tal y como los hemos descrito; pero aun prescindiendo de esta consideración, para destruir por completo la censura antes apuntada, bueno será que demostremos que utilizando el principio de los citados mareómetros y sin más que uno ó varios tubos, del mismo ó

diferente diámetro, y un poco de mercurio, pueden medirse los desniveles de un líquido, esté á la profundidad que quiera, y aunque resulte la parte más alta del sifón, no ya 10 metros sobre las más bajas aguas, sino 20, 30 ó más; demostración que haremos á la ligera por considerarla de interés casi nulo para el establecimiento de mareógrafos en España.

Sumerjamos en el mar un tubo *A B C* (fig. 4.ª) provisto de una cubeta *A*, y lleno en su parte inferior de mercurio, y situémosle á tal profundidad que las más bajas aguas no lleguen, ni con mucho, á descubrir la boca de aquélla; echemos agua en el tubo estrecho *CB*, ú otro líquido de poca densidad y obtendremos un mareómetro sencillo y barato, que puede usarse cualquiera que sea la profundidad de la bajamar.



La teoría y cálculo de los resultados de esos aparatos son análogos á los que ya hemos expuesto, quizás con sobrada pesadez; así es que analizaremos los que corresponden al tipo de cubeta que hemos empleado, siguiendo un procedimiento algo distinto en la forma, siquiera para conseguir alguna variedad, al par que de este modo resulte demostrada la facilidad con que estos estudios pueden tratarse.

Siendo, como siempre, d_m la densidad del mercurio, d_a la del agua del mar y d_l la del líquido auxiliar, B' la presión barométrica en *a a*, superficie del mar, y *B* la que en *l* existe, y tomando como origen el plano *oo'*, podremos establecer para la posición de equilibrio de las superficies *a, x, y, l*:

$$B' + ax\frac{d_a}{d_l} + ox\frac{d_m}{d_l} - B - oy\frac{d_m}{d_l} - ly\frac{d_l}{d_l} = o,$$

ó sea, suponiendo para abreviar, $d_a = d_l$

$$(ao - xo) = ly - (ox - oy)\frac{d_m}{d_a} + B - B',$$

para otra posición de equilibrio a', x', y', l', se obtendría

$$(a'o - x'o) = l'y' - (ox' - oy')\frac{d_m}{d_a} + B - B',$$

de la cual, restando miembro á miembro la anterior, se deduce, teniendo en cuenta que $l'y' = ly$, por no variar la cantidad de líquido poco denso del tubo C,

$$(a'o - ao) + (xo - x'o) = \{(ox - ox') + (oy' - oy)\}\frac{d_m}{d_a},$$

ó

$$a'a + xx' = xx' . e + yy'e,$$

y como

$$xx'\pi R^2 = yy'\pi r^2 \, (R : \text{radio de } A;\ r \text{ el de } C),$$

$$aa' = \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)yy' . e = ll' . e\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right),$$

despreciando la corrección xx', que, como ya demostramos, puede hacerse completamente inofensiva.

Esa última fórmula, igual, como debía ser, á la que obtuvimos para los mareómetros de cubeta, demuestra que las fluctuaciones de la superficie l son proporcionales á las del nivel a y marca la escala de proporcionalidad.

Todo el razonamiento que hemos hecho es en su fondo independiente de la altura constante ly; de modo que teóricamente puede establecerse el mareómetro á la profundidad

que se quiera, y sin otras limitaciones en la práctica que las que en sí lleven las dimensiones de los tubos empleados.

El hecho es que por medio de la disposición *A B C* (figura 4.ª) ú otra análoga, las variaciones de los niveles *a a'*..... se refieren á las de los *l l'*..... y situando aquí, cual la figura indica, mareómetros de los descriptos, podrá hacerse la necesaria lectura, en uno de sifón, siendo evidente que en vez de disponer, cual se ha supuesto, para facilitar la explicación, que el tubo inferior del mareómetro penetre en el *C*, pueden y deben constituir ambos un solo tubo.

Para hacer un estudio detenido, tanto de las diversas formas que la parte sumergida de los mareómetros puede tener, como de los distintos flúidos auxiliares (líquidos y gases) que es posible emplear; así como de las combinaciones diversas á que se prestan las distintas disposiciones que, tanto dentro, como fuera del agua, pueden emplearse, necesitaríamos llenar páginas y páginas, en las que después de todo ni se encontrarían grandes utilidades para la instalación de mareómetros en España, ni novedades de importancia, ya que el caso de los mareómetros sumergidos es en su fondo igual al de los expresados en este escrito con toda prolijidad, pudiendo generalizarse para ellos las fórmulas establecidas.

De algunas variantes de poca importancia, que en la disposición de los mareómetros indicadores pueden establecerse en casos particulares, nos ocuparemos brevemente al describir algunos de los diversos tipos de aparatos que la aplicación de esta teoría permite idear fácilmente.

XXVII.—Fundamento teórico de la Fototopografía.

POR JOSÉ MARÍA TORROJA.

PARTE TERCERA

Orientación de tres proyecciones de una figura en el espacio.

I

Problema general.

En la Parte Primera de este Trabajo hemos estudiado las relaciones que ligan las tres proyecciones de una figura en el espacio obtenidas desde tres centros 0, 0′ y 0″ sobre tres planos S, S' y S'', suponiendo que tanto estos planos como aquellos centros estaban en la posición en que se obtuvieron las proyecciones. Puede darse el caso de que sólo se nos den estas proyecciones acompañadas de sus puntos principales, pero no la posición relativa de los elementos de cada proyección respecto á las demás, y proponernos el problema de colocar las tres proyecciones dadas de una figura, en una posición tal, que puedan ser proyecciones de otra figura en el espacio.

Claro está que al resolver el problema así enunciado, la posición de los nuevos centros, respecto de sus correspondientes planos de proyección, será, en general, distinta de la que ocupaban los elementos análogos que sirvieron para determinar las figuras dadas S, S' y S''.

Ante todo, observemos que el vértice del triedro formado por los tres planos de proyección se corresponde consigo mismo en los tres planos, por confundirse en él el punto en

el espacio y sus tres proyecciones. Luego lo primero que hay que hacer para orientar tres proyecciones es elegir tres puntos homólogos cualesquiera y superponerlos; lo cual equivale á fijar un punto por el que han de pasar los tres planos de proyección. Como podemos elegir para esto uno cualquiera de los infinitos ternos de puntos homólogos, hay infinitos modos de colocar tres proyecciones dadas en posición orientada.

Elegidos ya y superpuestos los puntos que forman un terno, hay que mover los planos hasta colocarlos en una posición tal que las aristas del triedro que forman determinen en cada par de haces contrarios dos series iguales. Si tenemos los planos colocados de modo que cumplan estas condiciones, estarán en posición orientada, es decir, habrá una figura en el espacio de la cual pueden aquéllas ser proyecciones. En efecto, por ser perspectivos los haces q y p', un par de puntos homólogos cualesquiera m y m' de los planos S y S' que están sobre dos rayos homólogos de aquellos haces, estarán en el plano que estos rayos determinan, plano que por pasar por q y por p' contiene los centros 0 y 0'; luego las rectas $0m$ y $0'm'$ se cortan en un punto M, cuya tercera proyección es el punto m'' del tercer plano; pues así resulta de las construcciones que para hallarlo hemos explicado en la Parte Primera.

No debe, sin embargo, deducirse de aquí que esa figura en el espacio, que acabamos de decir tiene por proyecciones las tres dadas, sea semejante á la que realmente existió y fue reproducida, pero esto no empece á la solución de nuestro problema, en el que sólo queremos colocar los planos en una posición «en que puedan verificarse las construcciones explicadas en la Segunda Parte para obtener ternos de puntos homólogos».

El problema que ahora hemos de resolver es el siguiente: dados dos haces planos de rectas q y p', por ejemplo, y en el plano de cada uno de ellos un punto v y v' (fig. 11), tra-

zar por v una recta que corte al haz q, según una serie congruente con la que otra cierta recta, que pasa por v', produce en el haz p'.

Este problema puede resolverse de multitud de maneras: comenzaremos por explicar la solución dada por el profesor Dr. Guido Hauck (*), y que ha servido de base á otras publicadas posteriormente. Tomemos los pares de rayos rectangulares homólogos de los dos haces, y designemos por α y β las coordenadas de v respecto á dos de esos rayos qm y qn, como ejes, y α' y β' las de v' respecto á $p'm'$ y $p'n'$. Para

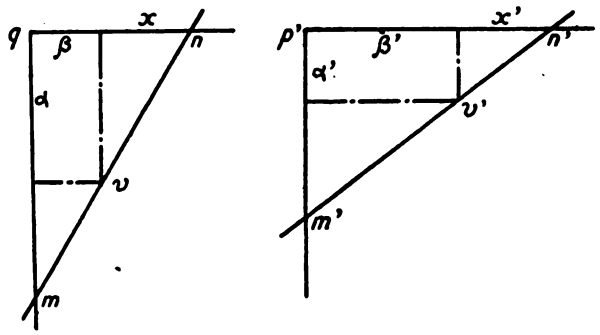


Figura 11.

determinar las trazas n y n' de las rectas buscadas con los ejes de abscisas, tenemos las ecuaciones

$$\frac{x}{\beta} = \frac{x'}{\beta'} \quad \text{y} \quad x^2 + \alpha^2 = x'^2 + \alpha'^2$$

ó sea

$$x^2 - x'^2 = \alpha'^2 - \alpha^2.$$

Estas relaciones nos permiten construir x y x' como hipotenusa y cateto, respectivamente, de un triángulo rectángulo, cuyo otro cateto es conocido; en efecto, construyamos la expresión $\sqrt{\alpha'^2 - \alpha^2}$ como cateto de un triángulo rectángulo, y

(*) *Journal..... von Crelle*, t. XCVII, pág. 262.

como el ángulo agudo adyacente á este cateto en el triángulo buscado es conocido, por ser su seno igual á $\frac{\beta'}{\beta}$ podemos, según se ve en la figura 12, determinar las magnitudes x y x' que, transportadas sobre qn y $p'n'$, determinan las rectas buscadas. Por el mecanismo de la figura vemos que el problema sólo será posible cuando $\alpha' > \alpha$ y $\beta > \beta'$, condición que puede gráficamente comprobarse, viendo si ninguno de los rectángulos de lados α y β uno y α' y β' otro, está comprendido completamente en el otro al colocar el ángulo mqn sobre el $m'p'n'$. El problema, cuando es posible, tiene dos soluciones, correspondientes á los dos modos como pueden superponerse dos ángulos iguales. Para determinar la zona que puede ocupar el punto v' en el plano en que está dado p' para un punto determinado v, del plano de q, basta trazar por v dos rectas paralelas á qm y qn, y v' podrá ocupar una posición cualquiera en el ángulo plano completo que no contiene el punto q.

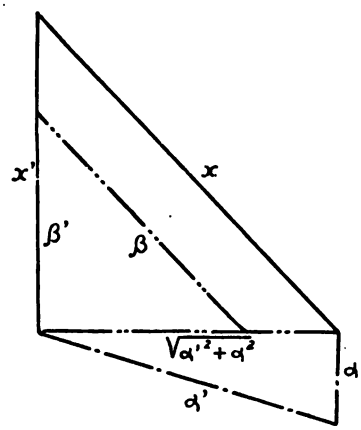


Figura 12.

Podemos resolver el problema en que acabamos de ocuparnos sin acudir, como lo hizo el Dr. Hauck, á la determinación de los pares de rayos conjugados perpendiculares.

Notemos para ello que si tuviéramos en un mismo plano los haces de vértices q y p', con los puntos v y v', y moviéramos uno de los haces, el p', por ejemplo, hasta que el punto v' viniera á coincidir con el v, tendríamos resuelto el problema con tal que, sin dejar de estar confundidos estos puntos, los haces estuvieran en posición perspectiva, pues

el eje perspectivo pasaría por v y v' y produciría en los haces q y p' dos series iguales. Veamos cómo podemos lograr que se cumpla esta última condición.

Supongamos el problema resuelto y sean qa y $p'a'$ (figura 13) los dos rayos homólogos confundidos. Las distancias

$$qv = \delta \quad \text{y} \quad p'v' = \delta'$$

son conocidas, y en el triángulo qvp' vemos que

$$\frac{\delta'}{\delta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta'}, \qquad (1)$$

y tenemos, por tanto, determinada la razón de los senos de los ángulos θ y θ' que forman los rayos homólogos qa y $p'a'$, con los qv y $p'v'$, también homólogos por hipótesis, y que podemos tomar como rayos orígenes para la medida de ángulos en los haces.

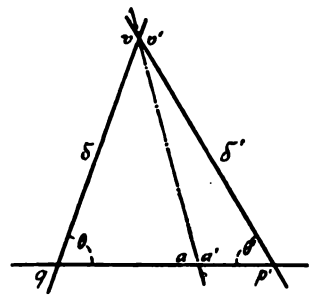


Figura 13.

Pero la condición de ser homólogos los rayos qa y $p'a'$, exige que sus coeficientes angulares, $\operatorname{tg}\theta$ y $\operatorname{tg}\theta'$, satisfagan á la ecuación de la proyectividad que, cuando se toman como de referencia dos rayos homólogos, como en el caso presente hemos hecho, tiene la torma

$$\operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\theta' + m\operatorname{tg}\theta + n\operatorname{tg}\theta' = 0, \qquad (2)$$

como vimos en otro lugar (página 383).

Estas dos ecuaciones nos permiten hallar los valores de los ángulos θ y θ', que forman, con los rayos conocidos qv y $p'v'$, los rayos buscados qa y $p'a'$; construídos éstos, basta hacer girar los haces alrededor del punto en que se confunden los v y v', hasta que qa y $p'a'$ se superpongan: el eje

perspectivo de los dos haces, colocados en esta posici pasará por v-v' y dará las series iguales pedidas.

Vamos á detallar algo esta solución. Pongamos en la ec ción (1) los valores de senθ y senθ' en función de las t gentes

$$\frac{\delta'}{\delta} = k = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta'} = \frac{\dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}}{\dfrac{\operatorname{tg}\theta'}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta'}}},$$

elevando al cuadrado

$$k^2 = \frac{\operatorname{tg}^2\theta(1+\operatorname{tg}^2\theta')}{\operatorname{tg}^2\theta'(1+\operatorname{tg}^2\theta)};$$

de la (2) deducimos

$$\operatorname{tg}\theta' = -\frac{m\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta+n},$$

y, substituyendo este valor en la ecuación anterior, da siguiente:

$$\operatorname{tg}^2\theta\left(1+\frac{m^2\operatorname{tg}^2\theta}{(\operatorname{tg}\theta+n)^2}\right) = k^2(1+\operatorname{tg}^2\theta)\frac{m^2\operatorname{tg}^2\theta}{(\operatorname{tg}\theta+n)^2},$$

ó sea

$$\operatorname{tg}^2\theta\,(\operatorname{tg}\theta+n)^2 + m^2\operatorname{tg}^4\theta = k^2m^2\operatorname{tg}^2\theta + k^2m^2\operatorname{tg}^4\theta.$$

Esta ecuación tiene un factor, $\operatorname{tg}^2\theta$ y, por tanto, dos rai iguales á cero, que corresponden á las dos posiciones en pueden superponerse los rayos homólogos qv y $p'v'$, re ciéndose á una recta el triángulo qvp' del caso general y constituyendo solución de nuestro problema, porque el perspectivo que se obtenga, no pasará, en general, po punto v-v'.

Suprimiendo aquel factor en la última ecuación, ésta se reduce á

$$\operatorname{tg}^2\theta + 2n\operatorname{tg}\theta + n^2 + m^2\operatorname{tg}^2\theta = k^2m^2\operatorname{tg}^2\theta + k^2m^2,$$

ó sea,

$$[1 + m^2(1-k^2)]\operatorname{tg}^2\theta + 2n\operatorname{tg}\theta + n^2 - k^2m^2 = o;$$

de donde

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - (n^2 - k^2m^2)[1 + m^2(l - k^2)]}}{1 + m^2(1-k^2)} =$$

$$= \frac{-n \pm \sqrt{(k^2m^2 - n^2)(1-k^2) + k^2}}{1 + m^2(1-k^2)},$$

y restituyendo el valor de k, y haciendo

$$\delta^2 - \delta'^2 = \delta_1^2,$$

se convierte en

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-n\delta^2 \pm m\sqrt{(\delta'^2m^2 - \delta^2n^2)\delta_1^2 + \delta^2\delta'^2}}{\delta^2 + m^2\delta_1^2}.$$

Notemos ahora que, si en la expresión (3), hacemos

$$\theta = \theta_1 = \frac{\pi}{2},$$

resulta

$$\operatorname{tg}\theta'_1 = -m;$$

y, análogamente, para

$$\theta' = \theta'_2 = \frac{\pi}{2},$$

tenemos

$$\operatorname{tg}\theta_2 = -n:$$

esto nos da la interpretación geométrica de los valores de los coeficientes numéricos m y n que, cambiados de signo, no son otra cosa que los coeficientes angulares de los rayos de cada haz, homólogos de los que en el otro son perpendiculares á los de referencia qv ó $p'v'$. Substituyendo estos valores en la expresión última de $\operatorname{tg}\theta$, tenemos para ésta el valor definitivo,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg}\theta_2 \mp \operatorname{tg}\theta'_1 \sqrt{(\delta'^2 m^2 - \delta^2 n^2)\,\delta_1^2 + \delta^2\delta'^2}}{\delta^2 + m^2\delta_1^2}.$$

Los dos valores, que proceden del doble signo, son las dos soluciones que tiene el problema, según que los haces proyectivos q y p' se coloquen sobre el plano de modo que sean acordes ó discordes los sentidos de giro de sus rayos homólogos.

Resuelto este problema auxiliar, podemos ya orientar las tres proyecciones, procediendo del modo siguiente: Cortemos un par de haces contrarios q' y p'', por ejemplo, por dos rectas cualesquiera l' y l'', que den series iguales, y determinemos la recta l, homóloga de las dos anteriores. Elíjanse en l' y l'' un par de puntos homólogos v' y v'' y el conjugado con ellos, v, sobre la recta l, de modo que estén en la posición favorable ya indicada. Aplíquese la solución del problema auxiliar á los haces p' y q para los puntos v' y v, y por otra parte, á los haces q'' y p para los puntos v'' y v. Finalmente, llévense los tres planos S, S' y S'' á una posición en que se superponga cada par de las series iguales citadas, y éstas formarán las tres aristas del triedro qué queríamos construir.

Hemos visto que el problema auxiliar tiene dos soluciones, y como hay que aplicarlo á tres pares de haces, resultan, en total, ocho maneras distintas de poner en posición orientada tres proyecciones. Hay que tener en cuenta, sin

embargo, que de estas soluciones sólo son útiles aquellas en que la suma de los ángulos formados por cada par de series situadas en un plano que han de constituir los ángulos planos del triedro, sea menor que cuatro rectos y además que cada uno de ellos sea menor que la suma de los otros dos.

II

Orientación de tres proyecciones, colocándolas paralelas á una recta.

Un caso particular muy notable de la orientación de proyecciones en que nos estamos ocupando, es aquel en que los tres puntos conjugados que se confunden en el vértice del triedro, son puntos del infinito, y los planos S, S' y S'' se colocan, por tanto, paralelos á una recta.

Observemos, ante todo, que tres rectas cualesquiera r, s' y t'', que no formen un terno de homólogas en tres sistemas trivalentes trilineales, contienen un solo terno de puntos conjugados; y que cada uno de los puntos de este terno se obtiene por intersección de la recta dada en su plano, con la homóloga de las otras dos dadas. Si aplicamos este procedimiento á las tres rectas del infinito de los planos S, S' y S'', veremos que existe siempre un terno de puntos del infinito que son homólogos, y, en general, uno solo. Según el modo que hemos explicado para determinar cada uno de los puntos del terno común á tres rectas no homólogas, los puntos del infinito de las rectas límites de cada plano, son los que forman el terno de puntos impropios homólogos. Cada recta límite se determina por dos de sus puntos, homólogos de dos pares de puntos del infinito de los otros dos planos; pero basta para nuestro objeto determinar una sola de ellas, por ejemplo, la del plano S, trazar los rayos de los haces p y q paralelos á ella y determinar en los haces q'' y p'' respectivamente, los rayos homólogos de éstos: las direcciones de

las dos rectas últimamente obtenidas son conjugadas con la de aquella recta límite.

Elegidos ya estos tres puntos impropios w, w' y w'' para confundirlos en el vértice del triedro, hay que trazar en cada plano dos rectas paralelas, de modo que cada par de series situadas sobre haces contrarios sean superponibles.

Tracemos en el plano S dos rectas cualesquiera e' y e'' paralelas á su recta límite; como las series de puntos conjugados de dos rectas arbitrariamente elegidas en dos de los planos son siempre proyectivas, esto sucederá con las que han de producir series iguales en los haces p y q'', y como ade-

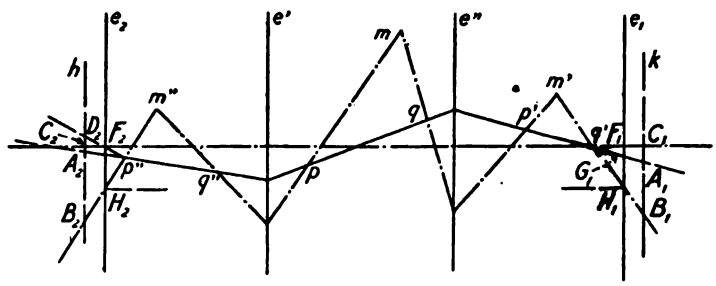


Figura 14.

más en este caso se corresponden sus puntos del infinito, las series son semejantes; todo se reduce á elegir entre las paralelas á la recta límite, l'', la que produzca una serie igual á la e'; por una cuarta proporcional, podemos determinar esta recta en el plano S'' y superponerla á la e', con lo que tendremos la arista de intersección de los planos S y S''. Idéntico camino nos lleva á determinar la de S y S'. Réstanos sólo obtener las dos rectas e_1 y e_2 que produzcan en los haces q' y p'', respectivamente, series idénticas dispuestas de modo que al girar S' alrededor de e'' y S'' alrededor de e', puedan confundirse. Tracemos para esto dos rectas cualesquiera h y k, paralelas á e' y e'', y que intercepten entre los ejes singulares $p'q'$ y $p''q''$ y un par de rayos homólogos $m'q'$ y $m''p''$, seg-

mentos iguales A_1B_1 y A_2B_2 (fig. 14); tracemos por q' una perpendicular á estas rectas, que las cortará en los puntos C_1 y C_2; tómese á partir de A_2 una magnitud $A_2D_2 = A_1C_1$, únase D_2 con p'', y por el punto F_2 de intersección de esta recta con la C_1C_2 trácese una paralela á e', que será la recta e_2, una de las que buscábamos. Para encontrar la otra basta trazar la H_2H_1 perpendicular á e_1', y el punto H_1 pertenece á la recta e_1 (*). Esta construcción puede justificarse con gran sencillez. Bastará probar que $G_2H_2 = G_1H_1$, puesto que las series e_2 y e_1 son semejantes. Pero

$$\frac{F_2\,G_2}{A_2\,D_2} = \frac{F_2\,H_2}{C_2\,B_2} \quad \text{y} \quad \frac{F_1\,G_1}{A_1\,C_1} = \frac{F_1\,H_1}{C_1\,B_1};$$

y, por construcción,

$$\frac{F_2\,H_2}{C_2\,B_2} = \frac{F_1\,H_1}{C_1\,B_1} \quad \text{y} \quad A_2\,D_2 = A_1\,C_1,$$

luego

$$F_2\,G_2 = F_1\,G_1,$$

y como

$$F_2\,H_2 = F_1\,H_1,$$

tenemos

$$F_2\,H_2 - F_2\,G_2 = F_1\,H_1 - F_1\,G_1,$$

ó sea

$$G_2\,H_2 = G_1\,H_1,$$

que es lo que nos proponíamos probar.

(*) Esta construccion gráfica se debe al Profesor alemán Dr. G. Hauck. (Loc. cit.)

III

Orientación de tres proyecciones con una recta común.

Podemos particularizar aún más y orientar las tres figuras de modo que sus planos pasen por una recta, confundiéndose en ésta tres series iguales, como sucedía en el caso 6.° que estudiamos en la Primera Parte.

Los tres ejes singulares han de estar, como en los casos anteriores, en el plano de los tres centros y cortar al eje único en la traza de éste con aquel plano. Para satisfacer la primera de estas condiciones, puesto que la superposición de las series del eje obliga á cumplir la segunda, observemos que al girar cada plano alrededor de la recta común, su eje singular describe un cono de revolución; si trazamos un plano cualquiera que pase por el vértice común de estos conos, cortará á cada uno de ellos según dos generatrices, reales ó imaginarias; podremos, pues, tomar en este plano una generatriz de cada cono, cuando las seis sean reales, y tendremos ya orientadas las tres proyecciones. Como cada uno de los planos está determinado por el eje y una generatriz de uno de los conos, si cortamos éstos por un plano que pase por la recta común, las tres proyecciones estarán en un solo plano.

Claro es que si dos ejes singulares forman el mismo ángulo con esta recta, los conos correspondientes se confundirán, y se confundirán igualmente dos de los planos, dando lugar al caso 10 estudiado en la Parte Primera de este Trabajo.

IV

Relaciones entre las diversas figuras del espacio, correspondientes á unas mismas proyecciones.

Cualquiera que sea la forma en que se orienten las tres proyecciones dadas, variando el terno de puntos que, por su

yuxtaposición, ha de constituir el vértice del triedro, las figuras en el espacio que determinan son homográficas entre sí por corresponder á los puntos, rectas y planos de una de ellas, otros homólogos de cualquiera de las otras.

Para que dos de las figuras en el espacio obtenidas sean semejantes, basta que las radiaciones que determinan una de ellas sean iguales á las relativas á la otra, y para esto, que permanezca invariable la posición relativa de cada centro y la proyección que le corresponde; puesto que, si tal circunstancia se verifica, los triángulos $OO'O''$ que les corresponden serán semejantes entre sí por tener iguales sus ángulos homólogos y su plano formará ángulos iguales con los planos correspondientes de proyección. Si los suponemos colocados en dos posiciones paralelas, las radiaciones respectivas tendrán paralelas sus rectas y planos homólogos, y, por tanto, lo serán también todos los pares de rectas de las figuras en el espacio que determinan, y éstas serán homotéticas.

Vamos á buscar el lugar geométrico de los puntos de cada plano, que pueden ser vértices de triedros en los que se cumple esta condición.

En la figura 15 hemos representado los tres centros O, O' y O'', los tres planos respectivos de proyección AVB, BVC y CVA, que suponemos colocados en posición orientada, y las tres proyecciones x, x' y x'' de un punto X; si construímos un triángulo semejante al $O\,O'\,O''$, lo colocamos en $oo'O''$ y trasladamos á él las magnitudes $op = OP$, $oq = OQ$, $o'p' = O'P'$, $o'q' = O'Q'$, lo que equivale á trasladar paralelamente á sí mismos los sistemas O-S y O'-S' en las direcciones de las rectas OO'' y $O'O''$ respectivamente, obtendremos un nuevo triedro, $v.\,abc$, de caras paralelas á las del anterior y vértice v, situado en el plano AVB; las dos figuras en el espacio que tienen sus proyecciones sobre las caras de cada uno de estos triedros, son homotéticas: pues, por permanecer fija la radiación O'', los puntos correspondientes de una y otra están sobre rectas

que pasan por O'', y por ser la radiación o paralela á la O,

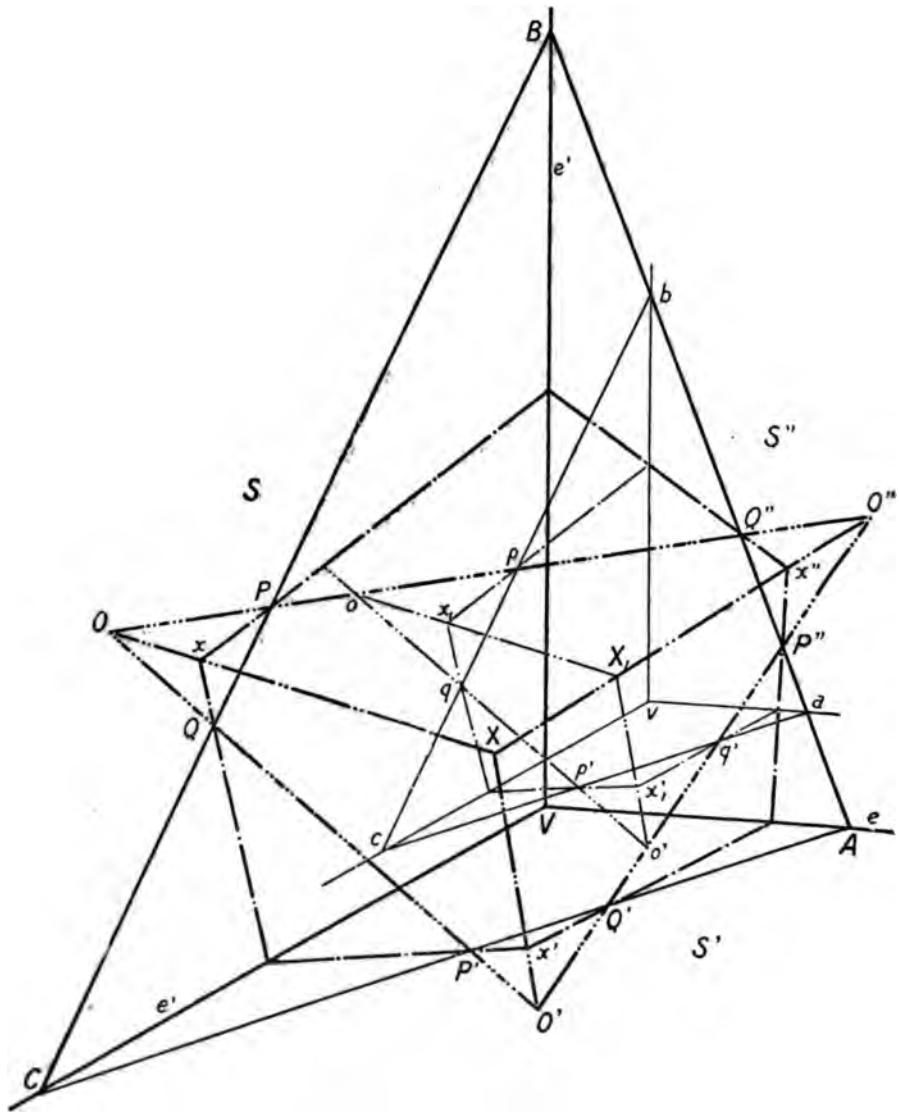


Figura 15.

y la o' á la O', las rectas homólogas serán paralelas como intersecciones de pares de planos paralelos dos á dos.

Ya que se cumple la condición pedida de semejanza, vamos á ver cuál es el lugar geométrico de los puntos v en el plano S''.

Todos los triángulos cqp' que podemos formar por las construcciones anteriores, son homotéticos con el CQP', por tener sus lados paralelos á los de éste, y como el lugar de los puntos q es la paralela á OO'', trazada por Q, y el de los puntos p' la paralela á $O'O''$, que pasa por P', el punto de intersección de estos dos lugares geométricos será el centro de homotecia, y en la recta que lo una con el punto fijo C, habrán de estar todos los puntos c, homólogos de éste.

Los triángulos abc, son igualmente homotéticos entre sí y con el ABC, por tener sus lados paralelos, y, como tienen superpuestos los lados ab, el centro de homotecia correspondiente no puede ser otro que el de intersección de este lado con la recta Cc, lugar de los vértices c.

Los tetraedros $v.abc$ y $V.ABC$, de que estos triángulos forman parte, serán igualmente homotéticos y tendrán el mismo centro de homotecia: luego el lugar de los vértices v será, en el plano S'', una recta, Vv.

Un razonamiento análogo podríamos hacer para cada uno de los otros dos planos S' y S'', y deducir, en definitiva, que: «El lugar geométrico de los puntos de cada uno de los planos de proyección que, junto con sus homólogos de los otros dos planos, pueden superponerse para formar los vértices de los triedros correspondientes á figuras en el espacio que sean homotéticas entre sí, es una línea recta, determinada como acabamos de indicar».

En los razonamientos anteriores se ha supuesto fija la posición de cada centro respecto de su correspondiente plano de proyección, y el problema que precede equivale al siguiente: «Dadas tres figuras planas, proyecciones de una en el espacio, y la posición, respecto de cada una de ellas, de su centro correspondiente, colocarlas de modo que

sean proyecciones de una cierta figura, que resultará semejante á la que existió y fué reproducida.»

Este problema tiene, para cada terno de puntos elegido como vértice, una solución única, en lugar de las ocho que tenía el caso general estudiado en el párrafo primero de esta Tercera Parte.

PUBLICACIONES RECIBIDAS DESDE 1.° DE JULIO DE 1907

(Continuación.)

España en Africa. — Revista. Año 3.°, núms. 13 á 15. — Barcelona, 1907.

Ingeniería.— Revista. Año 3.°, núms. 93 á 97. — Madrid, 1907.

El Siglo Médico. — Año 54, núms 2.812 á 818.—Madrid, 1907.

El Magisterio Español.— Periódico. Año 41, núms. 3.148 á 161. — Madrid, 1907.

Revista de Obras Públicas.— Año 55, núms. 1.675-677 y 678 á 681.— Madrid, 1907.

Oficina Central de la Sección Meteorológica del Estado de Yucatán.— Boletín mensual. Año Meteorológico de 1906 á 1907, Diciembre 1906.— Mérida de Yucatán, 1907.

Instituto general y Técnico de San Isidro.— Discurso leído en la distribución de premios á los alumnos del ..... por el catedrático Dr. D. Julián Apraiz.— Madrid, 1907.

Instituto de Reformas Sociales. — Proyecto de ley sobre casas baratas.— Tecnicismo del capítulo III (Seguro). Informe del vocal D. José Maluquer y Salvador.— Madrid, 1907.

Ministerio de Fomento.— Memoria acerca del Estado de la Industria en la provincia de Albacete en el año 1906.— Madrid, 1907.

Secretaría de Agricultura, Industria y Comercio. — Boletín Oficial. Vol 3, núm. 5.— Habana, 1907.

Revista Centro Farmacéutico Uruguayo.—Organo de la Sociedad de su nombre.—Tomo 14, núm. 10.—Montevideo (Uruguay).

Instituto general y técnico de Zaragoza.— Memorias del..... en el curso de 1904 á 1905. Id., del id., núms. 1905 á 1906. —Zaragoza, 1905 y 1906.

Asociación de Peritos Industriales. — Boletín tecnológico de la..... Año 3.°, núm. 29.

(Continuará).

XXVIII.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia quinta.

SEÑORES:

Hemos dicho varias veces, que al exponer el método de Lamé y sus análogos, dividiríamos nuestro estudio en las siguientes partes:

1.° Estudio de las tensiones.

2.° Estudio de las deformaciones elásticas.

3.° Expresión de las tensiones en función de las deformaciones.

4.° Determinación de las ecuaciones del equilibrio, ya en el interior del cuerpo, ya en la superficie, si el sistema no es indefinido.

5.° Substitución en estas ecuaciones de las tensiones del sistema, expresadas en valores de las deformaciones.

La integración de estas últimas ecuaciones resolverá el problema de la Elasticidad.

De estos diferentes puntos, hemos tratado ya el primero, y en esta conferencia empezaremos el

2.—Estudio de las deformaciones.

El problema de las deformaciones de un sistema elástico, es caso particular de otro problema más general, el de *la transformación de los sistemas.*

Dado un *sistema de puntos,* continuo ó discontinuo, en que cada punto M está definido por sus tres coordenadas rectangulares x, y, z, se transforma dicho sistema en otro, cuando

se determina *un segundo sistema de puntos*, tal, que cada uno de ellos corresponde de *una sola manera* con otro punto determinado del primer sistema.

A la vez, este problema se enlaza con una teoría relativamente moderna, que es la teoría de los *ensambles ó conjuntos*, teoría delicada, de gran importancia y en la cual no hemos de entrar en estas conferencias.

Nos contentaremos con definir la transformación de los sistemas, como la hemos definido, aunque precisando más los términos.

Toda transformación de figuras ó de sistemas geométricos ó analíticos, supone una ley de transformación.

Si al punto M del primer sistema (fig. 26), cuyas coorde-

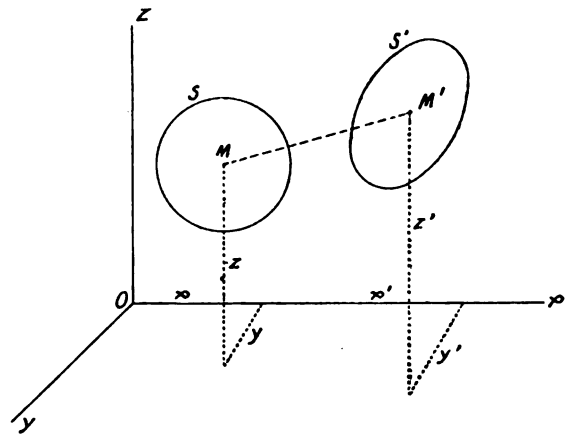


Figura 26.

nadas son x, y, z, corresponde un punto M' (x, y, z) del segundo, será preciso que tres ecuaciones determinen x', y', z' en función de x, y, z; de modo que deberán darse las tres relaciones:

$$x' = \varphi_1 (x, y, z),$$
$$y = \varphi_2 (x, y, z),$$
$$z = \varphi_3 (x, y, z),$$

las cuales expresarán, por decirlo de este modo, la ley de la transformación, y fijarán para cada punto M del primer sistema, el punto M' del segundo. En efecto, substituyendo en los segundos miembros en vez de x, y, z sus valores, las funciones $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ determinarán x', y', z'; es decir, el punto correspondiente á M'. Estas funciones φ tendrán la misma forma analítica para todos los pares de puntos; por eso decíamos que expresan la ley de la transformación.

Pero es preciso, que las φ sean funciones *uniformes*; es decir, que para cada grupo x, y, z no den más que un sólo grupo de valores para x', y', z'.

Si las φ contuvieran, por ejemplo, un radical, no servirían para nuestro objeto; porque á cada punto del primer sistema corresponderían varios puntos del segundo, y la transformación no sería del orden sencillo, y si se nos permite la palabra, *inequívoco*, que estamos estudiando.

Las consideraciones que preceden se aplican lo mismo á los sistemas de un número limitado de puntos, ó ilimitado pero *discreto*, es decir, separados unos de otros, que á los sistemas continuos.

Algunos autores rechazan la continuidad en los cuerpos elásticos. Otros parten de la discontinuidad, mas para los cálculos admiten una continuidad artificial, por decirlo así, rellenando los huecos por sistemas continuos. Hoy, como ya hemos dicho varias veces, se estudian particularmente las transformaciones y deformaciones de los sistemas continuos, y esto es lo que haremos nosotros.

*
* *

En la teoría de la Elasticidad no hemos de considerar las transformaciones de los sistemas en general, al menos por ahora, sino las *deformaciones*, las cuales son, en cierto modo, transformaciones, pero *infinitamente pequeñas*.

Es decir, que cada punto, al deformarse el sólido no va á parar á una distancia finita de su posición primitiva, sino á una distancia infinitamente pequeña.

Así, cada punto M (fig. 27), recorre una línea infinitamente pequeña al deformarse el cuerpo, y ocupa una posición M' infinitamente próxima á la primitiva, y esto, para todos los puntos del sólido elástico. De manera, que el sistema S se transforma todo él en un sistema infinitamente próximo, S'.

Esto simplifica extraordinariamente las fórmulas de trans-

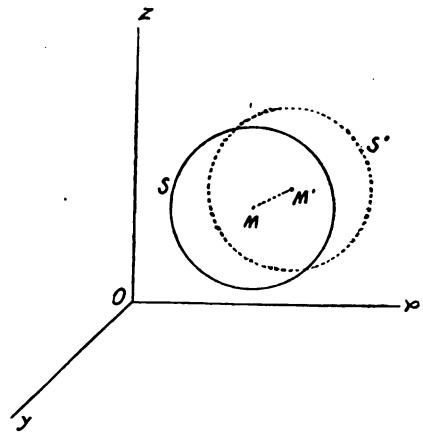


Figura 27.

formación de un sistema en otro, y simplifica las funciones φ como veremos inmediatamente.

***

Hemos hablado en términos generales de las deformaciones, y hemos dicho que las tensiones era preciso expresarlas en función de las deformaciones; pero tales términos son vagos y hasta vulgares.

Las deformaciones son infinitas, porque hay infinitos pun-

tos, y la deformación de cada punto M está definida por las tres componentes de la recta infinitamente pequeña MM' que describe M al deformarse el sistema.

Algo así nos sucedía al estudiar las tensiones. También alrededor de cada punto habría infinitas tensiones. Y aquí, si consideramos un elemento infinitamente pequeño del sistema, antes y después de la deformación, como en el elemento primitivo había infinitos puntos, y cada uno de ellos describirá su trayectoria infinitamente pequeña, también tendremos un número infinito de deformaciones parciales; de donde resulta al parecer una verdadera confusión.

Tratándose de las tensiones, vimos que, aun siendo infinitas para cada punto, estaban enlazadas por un orden tal, que todas ellas dependían de seis cantidades ó constantes, propias de dicho punto, y de los tres cosenos directores del plano elástico.

Pues aquí hemos de hacer una cosa análoga: ordenar en cierto modo estas infinitas deformaciones parciales, y ver si existe para todas ellas y en cada elemento del cuerpo, leyes fijas de deformación, y hasta si podemos determinarlas todaen función de un número finito de las mismas ó de constantes relativas al punto.

Este va á ser precisamente el objeto de la presente conferencia y de las inmediatas; y una vez más ruego que se me dispense si me detengo en pormenores y en explicaciones de carácter elemental. No se olvide, que de carácter elemental son estas lecciones.

De carácter elemental son; pero es mi propósito, que sin perder este carácter, sirvan *de preparación* suficiente para estudiar las ramas más elevadas y más modernas y transcendentales de la Física matemática.

***

Sea M, fig. 28, un punto cualquiera del sólido elástico, y vamos á estudiar las deformaciones en un espacio infinitamente pequeño alrededor de dicho punto M.

No establecemos otra hipótesis que la de la continuidad en el sistema.

Supongamos, que á causa de las fuerzas que actúan sobre dicho sistema, el punto M viene á parar á la posición M' describiendo un camino MM' infinitamente pequeño y que puede suponerse rectilíneo.

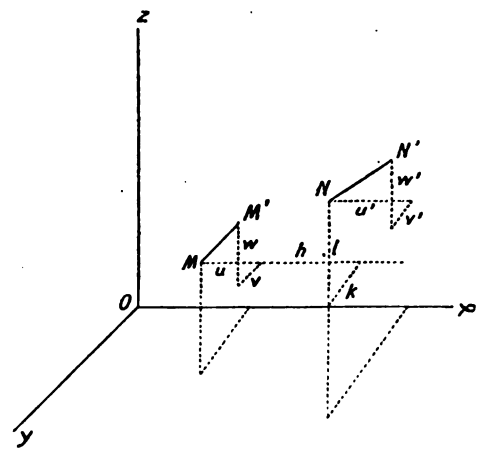


Figura 28.

A las componentes de este desplazamiento las designaremos por u, v, w, paralelamente á los ejes x, y, z.

Consideremos otro punto N del sólido, infinitamente próximo á M.

La recta MN, que no está trazada en la figura, tendrá por componentes h, k, l. De manera que si M fuera el origen de coordenadas, y por él trazásemos tres ejes paralelos á Ox, Oy, Oz, podríamos decir que h, k, l eran las coordenadas del punto N, tomando M por origen.

El punto N también experimentará un desplazamiento,

trasladándose de N á N' y teniendo por componentes u', v', w'.

Supongamos que el problema elástico está resuelto, por cualquier medio que sea; pues esto quiere decir que para cualquier instante, las tres componentes del desplazamiento de un punto serán funciones determinadas de las coordenadas de dicho punto.

De suerte que tendremos,

$$u = \varphi_1 (x, y, z),$$
$$v = \varphi_2 (x, y, z),$$
$$w = \varphi_3 (x, y, z).$$

Estas funciones φ serán para cada problema, es decir, para cada cuerpo y cada sistema de fuerzas, funciones perfectamente determinadas, ó suponemos que lo sean.

No podemos decir cuáles serán en cada caso, hasta no resolver el problema; pero podemos afirmar su existencia, y podemos hacer esta afirmación fundamental, mejor dicho, esta hipótesis, *que si el problema es determinado, estas funciones serán funciones continuas*. Es lo único que podemos establecer respecto al carácter de dichas funciones.

Si para el punto M, las componentes del desplazamiento están determinadas en funciones de sus coordenadas por las ecuaciones

$$u = \varphi_1 (x, y, z),$$
$$v = \varphi_2 (x, y, z),$$
$$w = \varphi_3 (x, y, z);$$

á su vez, para el punto N, las componentes del desplazamiento de este punto se obtendrán poniendo en las ecuaciones anteriores las coordenadas de dicho punto N, que son

$$x + h, y + k, z + l;$$

y tendremos, por lo tanto,

$$u' = \varphi_1 (x + h, y + k, z + l),$$
$$v' = \varphi_2 (x + h, y + k, z + l),$$
$$w = \varphi_3 (x + h, y + k, z + l).$$

Tales ecuaciones resolverían el problema para todos los puntos del cuerpo, y concretando más, para los puntos infinitamente próximos á M en el espacio que le rodea. No hay más que substituir á h, k, l los valores correspondientes á este punto.

No conocemos las lunciones φ_1, φ_2, φ_3; pero así y todo podemos deducir las leyes generales de la deformación infinitamente pequeña alrededor de cualquier punto.

Desarrollemos por la serie Taylor, despreciando los términos de orden superior; es decir, desde los términos en h^2, k^2, l^2, kl, hl, kl, en adelante.

Claro es que aquí hacemos una nueva hipótesis, que se repite en la mayor parte de los problemas de la Física matemática, á saber: que las funciones φ pueden desarrollarse por la serie de Taylor, y que en ésta pueden despreciarse desde el grupo de segundo orden en h, k, l inclusive en adelante.

Aceptando esta hipótesis tendremos

$$u' = \varphi_1 (x_1 y_1 z_1) + \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{du}{dz} l,$$
$$v' = \varphi_2 (x_1 y_1 z_1) + \frac{dv}{dx} h + \frac{dv}{dy} k + \frac{dv}{dz} l,$$
$$v'' = \varphi_3 (x_1 y_1 z_1) + \frac{dw}{dx} h + \frac{dw}{dy} k + \frac{dw}{dz} l,$$

que con mayor brevedad pueden escribirse así:

$$
\begin{aligned}
u' &= u + \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{du}{dz} l, \\
v' &= v + \frac{dv}{dx} h + \frac{dv}{dy} k + \frac{dv}{dz} l, \qquad (a) \\
w' &= w + \frac{dw}{dx} h + \frac{dw}{dy} k + \frac{dw}{dz} l.
\end{aligned}
$$

Tenemos, pues, *aproximadamente*, las componentes de los desplazamientos alrededor de un punto M del cuerpo; ó sea las componentes de los desplazamientos de un punto N cualquiera infinitamente próximo á M definido por sus coordenadas h, k, l con relación á M.

Estos desplazamientos u, v, w vemos que dependen de los desplazamientos u, v, w del punto M y de nueve cantidades,

$$
\begin{aligned}
&\frac{du}{dx} \quad \frac{du}{dy} \quad \frac{du}{dz}, \\
&\frac{dv}{dx} \quad \frac{dv}{dy} \quad \frac{dv}{dz}, \qquad (I) \\
&\frac{dw}{dx} \quad \frac{dw}{dy} \quad \frac{dw}{dz},
\end{aligned}
$$

que son funciones de x, y, z, es decir, que dependen del punto M que se considere, pero que una vez determinado éste deben considerarse como constantes para todos los puntos que rodean á dicho punto M.

En suma: para todo desplazamiento alrededor de M, las únicas variables independientes son h, k, l.

Se ve por lo dicho que los resultados anteriores no deben considerarse *sino como aproximaciones*, porque suponemos que la serie de Taylor es convergente y que pueden despreciarse todos los términos que hemos despreciado.

Agregaremos aún, que los coeficientes $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$..... son can-

tidades muy pequeñas, porque en los cuerpos elásticos, las deformaciones lo son con relación á las magnitudes primitivas; y dichos coeficientes no significan otra cosa que estas relaciones: lo que aumenta, por ejemplo, u con relación á x.

Y esta observación tiene su importancia, porque si el sistema fuese discontinuo, habría que comparar los expresados coeficientes con los valores de h, k, l para calcular el orden de los términos que se desprecian.

Tratándose, como aquí tratamos, de sistemas continuos, h, k, l pueden ser tan pequeños como se quiera, y en cambio, los coeficientes de que se trata, aunque muy pequeños, son cantidades finitas.

***

Hemos dicho que las ecuaciones

$$u' = u + \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{du}{dz} l,$$

$$v' = v + \frac{dv}{dx} h + \frac{dv}{dy} k + \frac{dv}{dz} l,$$

$$w' = w + \frac{dw}{dx} h + \frac{dw}{dy} k + \frac{dw}{dz} l,$$

nos determinan las componentes del desplazamiento de un punto cualquiera N (fig. 28), cuyas coordenadas con relación al punto M que hemos elegido, son h, k, l.

Estos valores u', v', w' vemos, en resumen, que dependen de los nueve coeficientes expresados $\frac{du}{dx}$....., que son funciones de las coordenadas de M, y, por lo tanto, deben considerarse como constantes para todas las deformaciones alrededor de M.

Y analíticamente, está resuelto el problema; pero conviene

estudiar la descomposición del desplazamiento NN' en movimientos diversos y sencillos, que le lleven del punto de partida N á la posición final N'.

Para facilitar dicho estudio, y por razones que se verán inmediatamente, es decir, por la sencillez de los resultados, substituiremos á las nueve constantes $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$..... que constituyen el último cuadro que hemos formado, otras nueve constantes, que serán las siguientes:

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{dv}{dy}, \quad \frac{dw}{dz},$$

$$\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz}, \quad \frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}, \quad \frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy},$$

$$\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}, \quad \frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}, \quad \frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}.$$

Para abreviar la escritura, y para la simetría de los cálculos, cada uno de estos términos los representaremos por una letra, y en la forma siguiente, adoptando siempre, como hemos dicho, las notaciones de Mr. Sarrau.

Tendremos, pues,

$$a_1=\frac{du}{dx}, \quad a_2=\frac{dv}{dy}, \quad a_3=\frac{dw}{dz},$$

$$2b_1=\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz}, \quad 2b_2=\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}, \quad 2b_3=\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy},$$

$$2p_1=\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz} \quad 2p_2=\frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}, \quad 2p_3=\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}.$$

De estas ecuaciones podremos deducir facilísimamente las nueve derivadas del grupo *(I)*, y tendremos:

$$a_1 = \frac{du}{dx}, \quad a_2 = \frac{dv}{dy}, \quad a_3 = \frac{dw}{dz},$$

$$b_1 + p_1 = \frac{dw}{dy}, \quad b_2 + p_2 = \frac{du}{dz}, \quad b_3 + p_3 = \frac{dv}{dx},$$

$$b_1 - p_1 = \frac{dv}{dz}, \quad b_2 - p_2 = \frac{dw}{dx}, \quad b_3 - p_3 = \frac{du}{dy}.$$

Y con esto podremos substituir al grupo (I) el grupo (II), que se compondrá de las nueve constantes $a, b, p,$ constantes, decimos, siempre con relación al punto M:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{matrix} \qquad \text{(II)}$$

Substituyendo los valores de las nueve derivadas del cuadro (1) en las ecuaciones (a), tendremos:

$$\begin{aligned} u' &= u + a_1 h + (b_3 - p_3) k + (b_2 + p_2) l \\ v' &= v + (b_3 + p_3) h + a_2 k + (b_1 - p_1) l \\ w' &= w + (b_2 - p_2) h + (b_1 + p_1) k + a_3 l; \end{aligned}$$

y ordenando convenientemente,

$$\begin{aligned} u' &= u + p_2 l - p_3 k + a_1 h + b_3 k + b_2 l, \\ v' &= v + p_3 h - p_1 l + b_3 h + a_2 k + b_1 l, \\ w' &= w + p_1 k - p_2 h + b_2 h + b_1 k + a_3 l. \end{aligned}$$

Estas tres ecuaciones nos demuestran que el desplazamiento NN' puede conseguirse por tres movimientos infinitamente pequeños, representados por estos tres grupos de las ecuaciones anteriores.

$$1.^{er}\text{ grupo}\begin{cases}u\\v\\w\end{cases}\quad 2.^{\circ}\text{ grupo}\begin{cases}p_2\,l-p_3\,k\\p_3\,h-p_1\,l\\p_1\,k-p_2\,h\end{cases}\quad 3.^{er}\text{ grupo}\begin{cases}a_1\,h+b_3\,k+b_2\,l\\b_3\,h+a_2\,k+b_1\,l\\b_2\,h+b_1\,k+a_3\,l\end{cases}$$

Veamos la significación geométrica de cada uno de estos tres grupos, y representémoslos, para más claridad, en la figura 29, considerando tan sólo el desplazamiento NN'.

PRIMER GRUPO.—Es evidente que u, v, w representan una traslación igual y paralela á la del punto M de las figuras 28 y 29, de suerte que, por este primer movimiento, N habrá venido á N_1 (fig. 29).

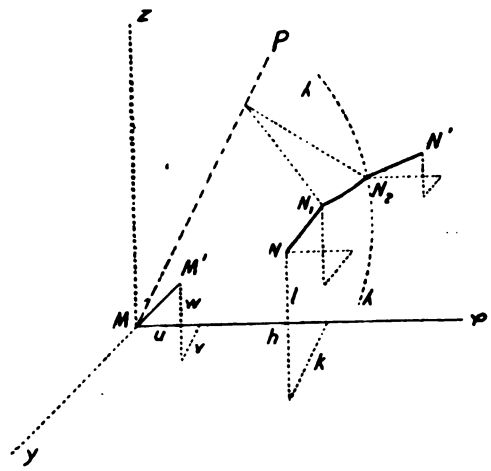


Figura 29.

SEGUNDO GRUPO.—Para simplificar, representaremos los tres desplazamientos paralelos á los tres ejes por u_1, v_1, w_1, es decir:

$$u_1 = p_2\,l - p_3\,k,$$
$$v_1 = p_3\,h - p_1\,l,$$
$$w_1 = p_1\,k - p_2\,h.$$

Pero sabemos por lo expuesto al final de la conferencia

anterior, que estas tres expresiones son las componentes paralelas á los ejes del desplazamiento producido por una rotación infinitamente pequeña alrededor de un eje P, cuyas rotaciones componentes son p_1, p_2, p_3, y en que las coordenadas del punto que gira son h, k, l.

En vez de hacer girar en la figura el punto N, hemos hecho girar el punto N_1; pero esto, sabemos por la teoría de los movimientos infinitamente pequeños, que sólo produce errores infinitamente pequeños de orden superior.

La primera traslación, paralela á MM', trajo al punto N á N_1.

Esta rotación lleva el punto N_1 á la posición N_2, posición que corresponde, según acabamos de explicar, á la superposición de estos dos movimientos:

traslación..... u, v, w,

rotación..... u_1, v_1, w_1.

TERCER GRUPO.—Las tres componentes, paralelas á los ejes de este tercer movimiento, infinitamente pequeño, las representaremos, para abreviar, por u_2, v_2, w_2, y tendremos:

$$u_2 = a_1 h + b_3 k + b_2 l,$$
$$v_2 = b_3 h + a_2 k + b_1 l,$$
$$w_2 = b_2 h + b_1 k + a_3 l.$$

La interpretación de estas ecuaciones es sencilla é ingeniosa; pero séame permitido aquí un pequeño paréntesis, para recordar ciertas nociones elementales de Geometría analítica.

***

Se sabe que la ecuación

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2b_1 yz + 2b_2 zx + 2b_3 xy = k$$

representa una superficie de segundo orden, referida á su centro. De segundo orden, por ser *dos* las dimensiones de todos sus términos; referida á su centro, porque si x, y, z satisfacen á la ecuación $-x$, $-y$, $-z$, satisfacen también.

Mientras las a, b, y λ sean constantes fijas, dicha ecuación representará una sola superficie; pero si λ varía, representará la misma ecuación una serie de superficies de segundo grado, que serán homotéticas, es decir, semejantes, semejantemente colocadas, y en que el origen será el centro de semejanza, como se demostraría con suma facilidad haciendo pasar por el origen una recta, determinando las intersecciones con dos de estas superficies, y viendo que la relación de ambos segmentos ó de sus componentes es una cantidad constante dependiente tan sólo de las a, b, y λ.

Pero esto nos importa poco para nuestro objeto.

Sólo advertiremos que, dejando fijas a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, y determinando λ convenientemente, se puede hacer pasar una de estas superficies por el punto N.

En efecto; si la superficie ha de pasar por el punto N, cuyas coordenadas son h, k, l, dichas coordenadas han de satisfacer á la ecuación de la superficie, y tendremos para determinar λ, la ecuación de condición

$$a_1h^2 + a_2k^2 + a_3l + 2b_1kl + 2b_2lh + 2b_3hk = \lambda.$$

Dando á λ el valor que indica el primer miembro, la superficie pasará por N.

En la figura, la hemos representado esquemáticamente por $\lambda\,\lambda$, y no la hemos hecho pasar por N, sino por N_2, porque, según hemos dicho tantas veces, tratándose de movimientos infinitamente pequeños, pueden calcularse desde el origen N y luego, superponerse; ó calcularse para N_1 ó para N_2, que es lo que hemos hecho nosotros para irlos superponiendo.

Veamos ahora cómo se determinan geométricamente u_2,

v_2, w_2, que son las tres componentes del movimiento que representa este tercer grupo.

Consideremos la superficie de segundo grado, cuya ecuación sea la ya indicada

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2b_1yz + 2b_2zx + 2b_3xy = \lambda,$$

determinando λ por la condición de que dicha superficie pase por el punto N_2 ó, mejor dicho, por el punto N, que para el cálculo de dicha constante λ da próximamente lo mismo.

Para ello basta substituir en vez de x, y, z las coordenadas h, k, l del punto N, y tendremos:

$$a_1h^2 + a_2k^2 + a_3l^2 + 2b_1kl + 2b_2hl + 2b_3hk = \lambda.$$

Si en el punto N, ó si se quiere, en el punto N_2 trazamos el plano tangente á dicha superficie, representándolo por $t\,t$, la ecuación de este plano, se sabe por Geometría analítica que será, designando, para abreviar, por f el primer miembro de la ecuación,

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_N (x - h) + \left(\frac{df}{dy}\right)_N (y - k) + \left(\frac{df}{dz}\right)_N (z - l) = 0;$$

y de la misma ecuación se deduce, en general,

$$\frac{df}{dx} = 2a_1x + 2b_2z + 2b_3y,$$

$$\frac{df}{dy} = 2a_2y + 2b_1z + 2b_3x,$$

$$\frac{df}{dz} = 2a_3z + 2b_1y + 2b_2x;$$

y poniendo en vez de x, y, z las coordenadas h, k, l para referir estos coeficientes al punto N que se considera,

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_N = 2\,(a_1 h + b_3 k + b_2 l),$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right)_N = 2\,(b_3 h + a_2 k + b_1 l),$$

$$\left(\frac{df}{dz}\right)_N = 2\,(b_2 h + b_1 k + a_3 l).$$

Substituyendo en la ecuación del plano tangente y dividiendo por 2, resultará:

$$(a_1 h + b_3 k + b_3 l)\,(x - h) + (b_3 h + a_2 k + b_1 l)\,(y - k) + \\ + (b_2 h + b_1 k + a_3 l)\,(z - l) = 0,$$

ó bien

$$(a_1 h + b_3 k + b_2 l)x + (b_3 h + a_2 k + b_1 l)y + (b_2 h + b_1 k + a_3 l)z = \\ = a_1 h^2 + a_2 k^2 + a_3 l^2 + 2b_1 kl + 2b_2 hl + 2b_3 hk.$$

Pero los coeficientes de x, y, z son las componentes u_2, v_2, w_2, del tercer grupo; y el segundo miembro es el valor de λ que corresponde á esta superficie, según determinamos hace un momento. Luego la ecuación del plano tangente toma esta forma sencilla:

$$u_2\,x + v_2\,y + w_2\,z = \lambda,$$

ó dividiendo por $\sqrt{u^2_2 + v^2_2 + w^2_2}$,

$$\frac{u_2}{\sqrt{u^2_2 + v^2_2 + w^2_2}}\,x + \frac{v_2}{\sqrt{u^2_2 + v^2_2 + w^2_2}}\,y + \\ + \frac{w_2}{\sqrt{u^2_2 + v^2_2 + w^2_2}}\,z = \frac{\lambda}{\sqrt{u^2_2 + v^2_2 + w^2_2}}.$$

Ahora bien, los coeficientes de x, y, z son los cosenos di-

rectores de la recta $N_2\ N'$, y representándolos por α_1, β_1, γ_1, tendremos para la ecuación del plano tangente

$$\alpha_1 \,.\, x + \beta_1 \,.\, y + \gamma_1 \,.\, z = \frac{\lambda}{\sqrt{u^2{}_2 + v^2{}_2 + w^2{}_2}}.$$

Pero según se sabe por Geometría analítica, ésta es la ecuación de un plano cuya normal tiene por cosenos directores α_1, β_1, γ_1 y que dista del origen una longitud

$$\frac{\lambda}{\sqrt{u^2{}_2 + v^2{}_2 + w^2{}_2}}$$

que, para abreviar, representaremos por p.

En suma; la normal al plano tangente $t\,t$ tiene la misma dirección que $N_2\ N'$; ó de otro modo, el tercer desplazamiento $N_2\ N'$ es normal á la superficie $\lambda\ \lambda$ en el punto N_2: ó si se quiere, toda esta figura puede transportarse al punto N.

En cuanto á la magnitud del desplazamiento $N_2\ N'$, la última ecuación nos da

$$\frac{\lambda}{\sqrt{u^2{}_2 + v^2{}_2 + w^2{}_2}} = p, \qquad \text{ó bien,} \quad \frac{\lambda}{N_2 N'} = p,$$

de donde

$$N_2 N' = \frac{\lambda}{p},$$

Es evidente, según acabamos de demostrar, que este punto N' coincidirá con el N' de la figura 28, puesto que hemos visto que

$$u' = u + u_1 + u_2$$
$$v' = v + v_1 + v_2,$$
$$w' = w + w_1 + w_2,$$

descomposición que está representada geométricamente en la figura 29 por los tres desplazamientos infinitamente pequeños $N N_1$, $N_1 N_2$, $N_2 N'$.

***

En resumen, todo punto infinitamente próximo al punto M sufre un desplazamiento, que puede suponerse compuesto de tres desplazamientos parciales:

1.° Una traslación, cuyas componentes sean u, v, w, como las del punto M.

2.° Una rotación alrededor de cierto eje MP que pase por M y cuyas rotaciones componentes sean p_1, p_2, p_3.

3.° Un desplazamiento de deformación normal á una determinada superficie de segundo grado, determinada por las constantes a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, λ.

Depende, pues, el desplazamiento de todo punto próximo á M de las coordenadas h, k, l del punto, tomando M como origen, y de nueve constantes, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, p_1, p_2, p_3, que, como hemos visto, dependen á su vez de las nueve derivadas del cuadro (I), tomadas con relación al punto M; es decir, poniendo en vez de x, y, z, las coordenadas de este punto.

No contamos con λ, porque hemos visto que esta constante se determina en función de las a, b, h, k, l.

***

Dos observaciones debemos hacer todavía.

Es la primera, que si u, v, w, que son las componentes de la deformación de cualquier punto, y por lo tanto, funciones de x, y, z, fueran en algún problema las derivadas parciales de una función, es decir, que

$$udx + vdy + wdz$$

fuera una diferencial exacta, en este caso se sabe que

$$\frac{du}{dy}=\frac{dv}{dx},\quad \frac{du}{dz}=\frac{dw}{dx},\quad \frac{dv}{dz}=\frac{dw}{dx}$$

por lo tanto,

$$\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}=0,\quad \frac{du}{dz}-\frac{dw}{dz}=0,\quad \frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}=0;$$

pero estos son precisamente los valores de p_1, p_2, p_3, luego, en esta hipótesis, los desplazamientos del segundo grupo se anulan, porque resultan nulas las tres rotaciones.

Podría decirse que las deformaciones elásticas eran irrotacionales, si se permite la palabra.

La segunda observación se enlaza con esto mismo, y sale al encuentro de una dificultad, que pudiera ocurrir á los que por primera vez estudien esta materia.

No sólo en este caso particular, en que u, v, w sean las derivadas parciales de una función, sino en todos los casos, puede prescindirse de este movimiento de rotación *al estudiar las magnitudes de las deformaciones de los diferentes elementos del sólido elástico.*

En efecto; observaremos, al continuar el estudio, que estamos haciendo, que ya no entrarán en las fórmulas las tres relaciones p_1, p_2, p_3.

Y ocurre preguntar: ¿cómo se prescinde, y cómo prescinden casi todos los autores de estas tres cantidades?; ¿cómo no aparecen en las fórmulas más que las seis restantes, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3?; ¿por qué no se cuenta con p_1, p_2, p_3, que son también elementos de deformación?

Más adelante volveremos sobre este punto, á fin de explicar esta aparente anomalía.

Por ahora, no hacemos más que llamar la atención sobre ella.

***

El desplazamiente de un punto muy próximo al punto M del cuerpo, es el que nos interesaba determinar en el caso general, porque el desplazamiento de cualquier parte del sólido no es más que la repetición de este problema único: es ordenar ó agrupar los desplazamientos de la manera más conveniente para formarnos idea de estas deformaciones infinitamente pequeñas de un sólido elástico en cada región.

Esto es precisamente lo que vamos á hacer siguiendo casi el mismo orden que sigue Mr. Sarrau en su interesante opúsculo, que es un resumen elemental, pero inmejorable, de esta materia.

Así, pues, estudiaremos sucesivamente:

1.° Las dilataciones lineales.
2.° Las dilataciones angulares.
3.° Las dilataciones y deslizamientos.
4.° La deformación de superficies.
5.° La superficie de dilatación.
6.° La dilatación cúbica.

Por lo demás, estos diferentes problemas se encuentran en todos los tratados de Elasticidad, y nosotros no hacemos en estas conferencias más que ordenar cosas ya sabidas, presentarlas con la mayor claridad posible y de cuando en cuando salir al encuentro de alguna dificultad que pudiera ocurrir á los principiantes; sin perjuicio de ir deslizando de vez en cuando reflexiones y críticas, que en otras conferencias, y acaso en otros cursos, tendremos que utilizar.

***

1.° Empecemos por las *dilataciones lineales.*

Cuando una recta de longitud L, trazada en el interior de un cuerpo elástico, por la deformación de éste se convierte en otra recta L', claro es que, en general, su longitud primitiva habrá variado, sufriendo un aumento ó disminución

$L' - L$, que designaremos con el nombre genérico de *dilatación lineal.*

Si se compara con la longitud primitiva, la relación

$$\frac{L' - L}{L}$$

será la dilatación por unidad de longitud, que abreviadamente también puede llamarse *dilatación lineal,* entendiéndose que en este caso no es la dilatación absoluta, sino la relativa á la longitud que tenía la recta antes de la deformación.

En estas definiciones admitimos *que toda recta deformada se convierte en otra recta,* y esto lo demostraremos más adelante para casos todavía más generales.

Por el momento aceptémoslo como demostrado y veamos cuál es la expresión general de estas dilataciones lineales.

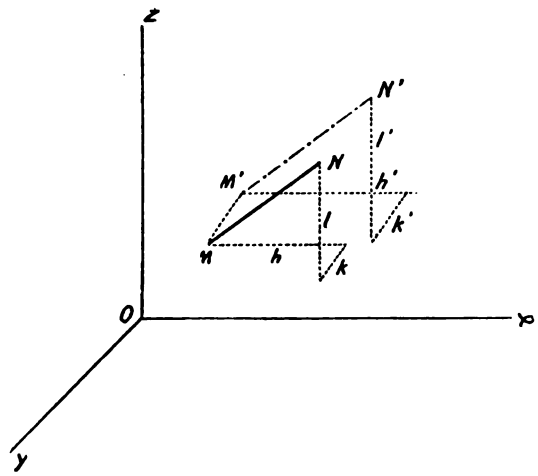


Figura 30.

Tomemos un punto M (fig. 30) del sólido elástico, y tracemos una recta MN á un punto de los que rodean al punto M, pero á pequeña distancia, porque no ha de olvidarse, que

estamos estudiando las deformaciones para una región muy próxima al punto M y que le rodea.

Definamos la dirección de la recta MN por sus tres cosenos, que llamaremos α, β, γ.

Las coordenadas del punto N con relación á M, las designaremos, como siempre, por h, k, l, según se indica en la figura.

El punto M, después de la deformación, viene á parar á M', y las componentes del desplazamiento son, como siempre, u, v, w.

El punto N, á su vez, viene á parar á N' y las componentes de este desplazamiento serán u', v', w', que sabemos calcular en función de u, v, w, de h, k, l, y de las constantes a, b, p, referidas al punto M.

Recordando todo esto, tendremos

$$L^2 = \overline{MN}^2 = h^2 + k^2 + l^2$$

y

$$L'^2 = \overline{M'N'}^2 = h'^2 + k'^2 + l'^2;$$

siendo h', k', l' las coordenadas de N' tomadas con relación á M'.

Como la diferencia entre L' y L es una cantidad muy pequeña con relación á L, porque las deformaciones son sumamente pequeñas, podremos poner $L' = L + \delta L$.

Además, es evidente que las h', k', l' serán iguales á las primitivas aumentadas en las diferencias $u' - u$, $v' - v$, $w' - w$, que son las diferencias paralelas á los ejes entre los desplazamientos de M' y N', es decir,

$$h' = h + u' - u,$$
$$k' = k + v' - v,$$
$$l' = l + w' - w;$$

y substituyendo estos valores en la segunda de las ecuacio-

nes anteriores, se convertirá el grupo anterior en este otro:

$$L^2 = h^2 + k^2 + l^2$$
$$(L + \delta L)^2 = (h + u' - u)^2 + (k + v' - v)^2 + (l + w' - w)^2$$

Desarrollando y restando de la 2.ª la 1.ª

$$2 L\delta L + \delta L^2 = 2h(u' - u) + (u' - u)^2 + 2k(v' - v) + \\ + (v' - v)^2 + 2l(w' - w) + (w' - w)^2$$

pero δL^2, $(u' - u)^2$, $(v' - v)^2$, $(w' - w)^2$ pueden considerarse como infinitamente pequeños de segundo orden, y tendremos, despreciándolos y dividiendo por 2,

$$L\delta L = h(u' - u) + k(v' - v) + l(w' - w).$$

Substituyendo en esta ecuación los valores ya obtenidos al descomponer el desplazamiento NN' en tres desplazamientos parciales, expresiones que eran

$$u' - u = p_2 l - p_3 k + a_1 h + b_3 k + b_2 l,$$
$$v' - v = p_3 h - p_1 l + b_3 h + a_2 k + b_1 l,$$
$$w' - w = p_1 k - p_2 h + b_2 h + b_1 k + a_3 l,$$

resultará:

$$L\delta L = h(p_2 l - p_3 k + a_1 h + b_3 k + b_2 l) + k(p_3 h - p_1 l + \\ + a_2 k + b_3 h + b_1 l) + l(p_1 k - p_2 h + b_2 h + b_1 k + a_3 l),$$

y desarrollando y simplificando,

$$L\delta L = a_1 h^2 + a_2 k^2 + a_3 l^3 + 2b_1 kl + 2b_2 hl + 2b_3 kh.$$

Dividamos por L^2 y tendremos:

$$\frac{\delta L}{L} = \text{dilatación lineal} = a_1\left(\frac{h}{L}\right)^2 + a_2\left(\frac{k}{L}\right)^2 +$$

$$+ a_3\left(\frac{l}{L}\right)^2 + 2b_1\frac{k}{L}\cdot\frac{l}{L} + 2b_2\frac{h}{L}\cdot\frac{l}{L} +$$

$$+ 2b_3\frac{k}{L}\cdot\frac{h}{L},$$

pero evidentemente $\frac{h}{L}, \frac{k}{L}, \frac{l}{L}$ son los cosenos directores de MN, que hemos llamado α, β, γ, y la ecuación anterior se convierte, representando por a la dilatación lineal, en esta otra:

$$a = a_1\alpha^2 + a_2\beta^2 + a_3\gamma^2 + 2b_1\beta\gamma + 2b_2\gamma\alpha + 2b_3\alpha\beta.$$

Esta ecuación determina la dilatación lineal, que experimenta cualquier recta de longitud determinada, pero muy pequeña, trazada en el punto M, en función de las constantes a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, y de los cosenos que determinan la dirección de la recta.

Supongamos que la recta que se considera, y cuya dilatación lineal se busca, es paralela al eje de las x; pues en este caso tendremos, evidentemente,

$$\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$$

y la ecuación se convierte en

$$a = a_1$$

La constante a_1 tiene, pues, una definición determinada: es la dilatación lineal para el punto M paralelamente al eje de las x.

Y esto podíamos preverlo, porque teníamos $a_1 = \frac{du}{dx}$.

y du representa, evidentemente, lo que varía u por una deformación de M paralelamente al eje de las x, y su relación con dx expresa la dilatación lineal por unidad de longitud, ó abreviadamente, la dilatación lineal.

Del mismo modo veremos que si la recta es paralela al eje de la y, se tiene

$$a = a_2;$$

y que en el caso de considerar la recta MN paralela al eje de las z, resultará

$$a = a_3.$$

En suma, a_1, a_2, a_3, tienen una interpretación sencillísima: representan las magnitudes de las dilataciones lineales de rectas paralelas á los tres ejes coordenados, y que pasan por M; pero en magnitud, no en dirección.

Más adelante trataremos también de dar una interpretación material á las tres constantes b_1, b_2, b_3.

Y señalemos aquí una cosa extraña, sobre la cual hemos llamado ya la atención de nuestros oyentes ó lectores.

En el valor de la dilatación lineal no entran para nada las tres constantes de la rotación, p_1, p_2, p_3. Los términos que la contenían se han destruídos dos á dos, y todo lo relativo al movimiento de rotación desaparece en la fórmula final.

La dilatación lineal no depende, pues, de las constantes p_1, p_2, p_3. Sólo depende de las seis constantes a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3; y este mismo fenómeno, llamémosle así, se repetirá en todo lo que tenemos que exponer á continuación; las p desaparerán siempre; las únicas que quedarán para definir las deformaciones serán las a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3.

Este es un hecho que ha de chocar á los principiantes, porque al fin y al cabo, parece que se trata de una deformación elemental que para nada se tiene en cuenta después de haberla definido y determinado.

Claro es que el cálculo da este resultado, y un cálculo co-

rrecto, pero no deja de llamar la atención hecho tan singular: estudiar un desplazamiento, definirlo y determinarlo, y después, en todo el resto del estudio prescindir de él, no arbitrariamente, pero sí porque el cálculo lo elimina.

La razón, sin embargo, es sencillísima, la anomalía es aparente, y la explicación es elemental, tan elemental, que sólo por tratarse de conferencias de este carácter, es disculpable que insista en aclaraciones, que la mayor parte de mis electores considerarán excesivas.

De todas maneras, las daremos en la conferencia próxima, y en ésta seguiremos tratando los diferentes puntos que antes se indicaron.

***

2.° Pasemos á las *dilataciones angulares.*

En rigor, podemos desdé ahora determinar la deformación de cualquier figura, puesto que toda figura geométrica se compondrá de puntos, y sabemos calcular las coordenadas de cada uno de estos puntos después de la deformación.

El conjunto de estos nuevos puntos dará la figura geométrica deformada.

En el caso particular que consideramos, se trata de dos rectas MN, MN_1 (fig. 31), que pasan por el punto M y que forman un ángulo V.

El problema está reducido á determinar el ángulo V' que formen después de los desplazamientos; si M pasa á M'; N á N', y N_1 á N_1', el ángulo deformado será $N' M' N'_1$.

Repetimos, desde luego, lo que ya dijimos en el problema anterior: que cada recta deformada será una nueva recta, como demostraremos más adelante, y por lo tanto, el ángulo deformado será un nuevo ángulo rectilíneo V' que es el que tratamos de determinar.

Cada recta $M N$, $M N_1$ podemos definirla por las coorde-

nadas de uno de sus puntos: N para la primera, N_1 para la segunda.

Así, la recta MN estará definida por las coordenadas h, k, l, del punto N; y á su vez, la recta MN_1 estará definida por las tres coordenadas h_1, k_1, l_1 del punto N_1.

Además, representaremos las distancias MN, y MN_1 por r, r_1. Las coordenadas del nuevo vértice M' serán u, v, w.

El método general consistirá en expresar el ángulo V' en función de las coordenadas de los puntos M', N', N_1', que

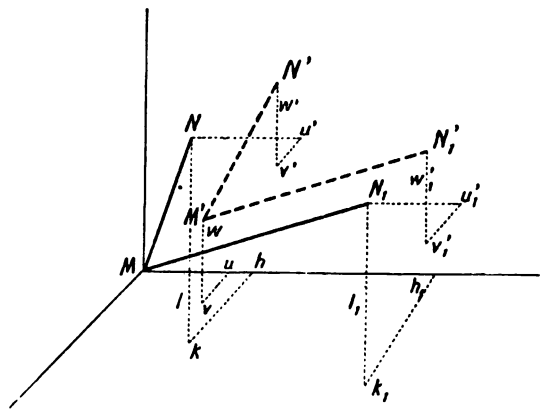


Figura 31.

son las posiciones de M, N y N_1 después de la deformación, puesto que $N'\ M'\ N_1'$ representa el ángulo V'.

Y para saber lo que ha variado el ángulo V no habría más que tomar la diferencia $V'-V$.

Es un problema elemental de Geometría analítica, que se resuelve con más rapidez expresando el valor del ángulo V y diferenciando. Dicho valor de V será, representando por α, β, γ los cosenos directores de MN, y por α_1, β_1, γ_1, los de MN_1,

$$\cos V = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1.$$

Pero

$$\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} = \frac{h}{r}; \quad \beta = \frac{k}{r}; \quad \gamma = \frac{l}{r},$$

y

$$\alpha_1 = \frac{h_1}{\sqrt{h^2_1 + k^2_1 + l^2_1}} = \frac{h_1}{r_1}; \quad \beta = \frac{k_1}{r_1}; \quad \gamma = \frac{l_1}{r_1};$$

luego

$$\cos V = \frac{hh_1 + kk_1 + ll_1}{rr_1},$$

ó bien

$$rr_1 \cos V = hh_1 + kk_1 + ll_1.$$

Realmente, pasar del ángulo V al ángulo V' no es otra cosa, que pasar de h, k, l, h_1, k_1, l_1, á las coordenadas de los dos puntos después de la deformación, es decir, á las coordenadas de los puntos N', N_1'; luego esto equivale á diferenciar la ecuación anterior, en la que r, r_1 y V serán funciones de h, k, l, h_1, k_1, l_1.

Realmente no hacíamos otra cosa que *diferenciar*, al establecer en el caso anterior de la dilatación lineal, las dos ecuaciones de L y L' y al restar una de otra. Aquí lo hacemos desde luego para abreviar los cálculos.

Precisamente la dV será lo que habrá variado el ángulo V, y tendremos, diferenciando,

$$\cos V\, d(rr_1) - rr_1 \operatorname{sen} V \,.\, dV = hdh_1 + h_1dh + kdk_1 + \\ + k_1dk + ldl_1 + l_1dl,$$

de donde

$$dV = -\frac{1}{rr_1 \operatorname{sen} V}\,[hdh_1 + h_1dh + kdk_1 + k_1dk + \\ + ldl_1 + l_1dl - \cos V d(rr_1)],$$

en que las diferenciales de las h, k, l son las componentes de los desplazamientos correspondientes á los puntos N, N_1,

porque son las cantidades que hemos designado por $u' - u$, $v' - v$, $w' - w$, cuyos valores, en general, son:

$$u' - u = p_2 l - p_3 k + a_1 h + b_3 k + b_2 l,$$
$$v' - v = p_3 h - p_1 l + b_3 h + a_2 k + b_1 l,$$
$$w' - w = p_1 k - p_2 h + b_2 h + b_1 k + a_3 l.$$

Aplicando estas fórmulas generales para determinar dh, dk, dl, dh_1, dk_1, dl_1, y observando que para las tres primeras las coordenadas del punto N son h, k, l, y para las tres últimas h_1, k_1, l_1: y además, que las a, b, p son constantes, porque todas se refieren al punto M: tendremos, para el punto N:

$$u' - u = dh = p_2 l - p_3 k + a_1 h + b_3 k + b_2 l;$$
$$v' - v = dk = p_3 h - p_1 l + b_3 h + a_2 k + b_1 l;$$
$$w' - w = dl = p_1 k - p_2 h + b_2 h + b_1 k + a_3 l;$$

y para el punto N_1, llamando u_1, v_1, w_1 los desplazamientos paralelos á los ejes de dicho punto,

$$u'_1 - u = dh_1 = p_2 l_1 - p_3 k_1 + a_1 h_1 + b_3 k_1 + b_2 l_1;$$
$$v'_1 - v = dk_1 = p_3 h_1 - p_1 l_1 + b_3 h_1 + a_2 k_1 + b_1 l_1;$$
$$w'_1 - w = d l = p_1 k_1 - p_2 h_1 + b_2 h_1 + b_1 k_1 + a_3 l_1,$$

y substituyendo en el valor de dV,

$$\begin{aligned} dV = - \frac{1}{rr_1 \operatorname{sen} V} [&h(p_2 l_1 - p_3 k_1 + a_1 h_1 + b_3 k_1 + b_2 l_1) + \\ &+ h_1 (p_2 l - p_3 k + a_1 h + b_3 k + b_2 l) + \\ &+ k(p_3 h_1 - p_1 l_1 + b_3 h_1 + a_2 k_1 + b_1 l_1) + \\ &+ k_1 (p_3 h - p_1 l + b_3 h + a_2 k + b_1 l) + \\ &+ l(p_1 k_1 - p_2 h_1 + b_2 h_1 + b_1 k_1 + a_3 l_1) + \\ &+ l_1 (p_1 k - p_2 h + b_2 h + b_1 k + a_3 l) - \cos V d(rr_1)]. \end{aligned}$$

No hemos substituído por r, r_1 sus valores $\sqrt{h^2+k^2+l^2}$ y $\sqrt{h^2_1+k^2_1+l^2_1}$, ni hemos desarrollado la diferencial de rr_1 para simplificar la escritura, y porqué no vamos á considerar el caso general.

Desarrollando y simplificando, tendremos:

$$dV = -\frac{1}{rr_1 \operatorname{sen} V}[2a_1hh_1 + 2a_2kk_1 + 2a_3ll_1 + \\ + 2b_1(kl_1 + lk_1) + 2b_2(hl_1 + lh_1) + 2b_3(hk_1 + kh_1) - \\ - \cos V d(rr_1)],$$

ó bien

$$-\frac{1}{2}dV = \frac{1}{rr_1 \operatorname{sen} V}[a_1hh_1 + a_2kk_1 + a_3ll_1 + \\ + b_1(kl_1 + lk_1) + b_2(hl_1 + lh_1) + b_3(hk_1 + kh_1) - \\ - \frac{1}{2}\cos V d(rr_1)]$$

Esta última fórmula nos resuelve el problema, es decir; nos da lo que ha variado el ángulo V por la deformación, que es precisamente la cantidad sumamente pequeña que hemos llamado dV. Y nos da este valor en función de los datos, es decir, de las coordenadas h, k, l, h_1, k_1, l_1, que determinan las dos direcciones de las MN, MN_1.

No hemos desarrollado por completo la fórmula, diferenciando r, r_1 para evitar cálculos inútiles, porque de la fórmula general no hemos de hacer uso, como ya hemos dicho.

Vamos á considerar tan sólo un caso particular, aquel en que el ángulo NMN_1 es un ángulo recto.

En este caso, la fórmula se simplifica, porque haciendo $V = \frac{\pi}{2}$ tendremos sen $V = 1$, cos $V = 0$ y queda

$$-\frac{1}{2}dV = \frac{1}{rr_1}[a_1hh_1 + a_2kk_1 + a_3ll_1 + b_1(kl_1 + lk_1) + \\ + b_2(hl_1 + lh_1) + b_3(hk_1 + kh_1)],$$

ó bien

$$-\frac{1}{2}dV = a\frac{h}{r}\frac{h_1}{r_1} + a_2\frac{k}{r}\frac{k_1}{r_1} + a_3\frac{l}{r}\frac{l_1}{r_1} +$$

$$+b_1\left(\frac{k}{r}\frac{l_1}{r_1} + \frac{l}{r}\frac{k_1}{r_1}\right) + b_2\left(\frac{h}{r}\frac{l_1}{r_1} + \frac{l}{r}\frac{h_1}{r_1}\right) + b_3\left(\frac{h}{r}\frac{k_1}{r_1} + \frac{k}{r}\frac{h_1}{r_1}\right)$$

y observando que $\frac{h}{r}, \frac{k}{r}, \frac{l}{r}, \frac{h_1}{r_1}, \frac{k_1}{r_1}, \frac{l_1}{r_1}$ son los cosenos directores de las dos rectas dadas, tendremos finalmente:

$$-\frac{1}{2}dV = a_1\alpha\alpha_1 + a_2\beta\beta_1 + a_3\gamma\gamma_1 + b_1(\beta\gamma_1 + \gamma\beta_1) +$$
$$+ b_2(\gamma\alpha_1 + \alpha\gamma_1) + b_3(\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1).$$

Esta fórmula determina la variación de *un ángulo recto* por una deformación cualquiera, infinitamente pequeña, en función de los cosenos directores de los dos lados del ángulo.

Así como al determinar la dilatación lineal obtuvimos una representación geométrica de las tres constantes a_1, a_2, a_3, que eran las dilataciones lineales para el caso en que la recta coincidía con las direcciones de los ejes, así podemos en este caso obtener representaciones de las otras tres constantes, b_1, b_2, b_3.

En efecto, supongamos que el ángulo recto V coincide con el que forman dos rectas trazadas por M paralelamente á los ejes y, z; en este caso, los cosenos directores toman los valores siguientes, suponiendo qus α, β, γ se refieren al eje y, y α_1, β_1, γ_1, al z:

$$\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0; \quad \alpha_1 = 0_1 \beta_1 = 0_1 \gamma_1 = 1;$$

y el valor de dV será:

$$-\frac{1}{2}\text{variación del ángulo } (y\,z) = b_1.$$

Del mismo modo, cuando el ángulo recto coincide con el $x\,z$, tendremos:

$$-\frac{1}{2}\text{variación del ángulo } (x\,z) = b_2,$$

y por último,

$$-\frac{1}{2}\text{variación del ángulo } (x\,y) = b_3.$$

Dos observaciones para terminar:

Lo mismo en el caso de las dilataciones, que en el de las variaciones angulares, dichas magnitudes no dependen de p_1, p_2, p_3; el cálculo las elimina.

Sobre esta circunstancia ya hemos dicho que insistiremos más adelante.

Tampoco dependen explícitamente de u, v, w, lo cual sería imposible, y lo es en efecto, porque las fuerzas que actúan sobre el sistema determinan las deformaciones de todos los elementos, y por lo tanto determinan u, v, w, y á la vez las constantes a, b, que son las que definen cada caso particular.

Por consiguiente, todos los elementos de la deformación, lo mismo u, v, w, que u', v', w', que las dilataciones lineales, que las dilataciones angulares y todos los restantes dependen de los datos del problema por el intermedio, por decirlo de este modo, de las constantes $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$.

***

3.° De las dilataciones y deslizamientos, que es el tercer punto de los que indicamos antes, algo tenemos que decir todavía, que no será más que el complemento de lo que acabamos de explicar.

Vimos ya la significación de a_1, a_2, a_3.

Eran las dilataciones paralelas á los ejes coordenados tres rectas pasando por M.

Si tomamos como elemento comparativo para las de maciones un paralelepípedo ABC (fig. 32), cuyos la para fijar las ideas, supondremos que son dx, dy, dz, se lo expuesto, resultará:

$$\frac{du}{dx} = a_1, \frac{dv}{dy} = a_2, \frac{dw}{dz} = a_3;$$

es decir, las dilataciones por unidad de longitud, paral mente á los ejes coordenados, según hemos dicho ya.

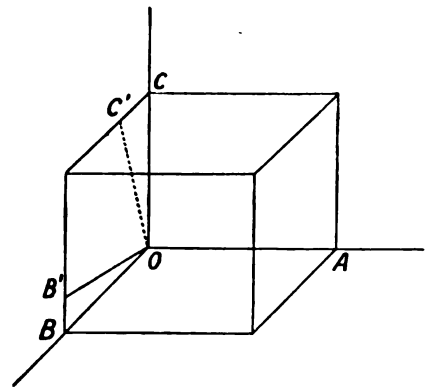


Figura 32.

Del mismo modo, $2b_1$, $2b_2$, $2b_3$ serán las variaciones los tres ángulos rectos yz, xz, xy.

Esto último puede comprobarse geométricamente.

Porque si para la longitud OC, ó sea para el incrème dz, la componente paralela al eje de las y de la deformac se proyecta en CC', tendremos:

$$\frac{CC'}{OC} = \text{ángulo } COC'.$$

Suponemos CC' sumamente pequeña, y confundiéndose con un arco de círculo trazado con OC por radio.

De suerte que

$$\frac{CC'}{OC} = \frac{dv}{dz} = \text{ángulo } COC',$$

Del mismo modo, si BB' es la componente de la variación de la extremidad B de la recta OB, tendremos:

$$\frac{BB'}{OB} = \frac{dw}{dy} = \text{ángulo } BOB'.$$

Por lo tanto,

$$\frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy} = 2b_1 = \text{ángulo } COC' + \text{ángulo } BOB;$$

así, $2b_1$ representa lo que ha variado el ángulo recto COB respecto á su valor primitivo.

Tenemos, pues, los elementos principales de la deformación del paralelepípedo.

Claro es que no son más que las variaciones aproximadas, es decir, proyecciones de los desplazamientos paralelos á los tres ejes, y proyecciones sobre los planos de los tres ángulos del paralelepípedo.

Con estos tres desplazamientos y estos tres ángulos, se puede construir aproximadamente el paralelepípedo deformado.

No insistimos sobre este punto, que no ofrece dificultad, y que puede verse con suficiente detalle en todos los tratados de esta materia.

Se les da el nombre á a_1, a_2, a_3, como hemos dicho, de *dilataciones lineales* de las aristas del paralelepípedo; y á

$2b_1$, $2b_2$, $2b_3$, que representan las disminuciones de los ángulos primitivamente rectos, *yz*, *xz*, *xy*, se les designa con el nombre de *deslizamientos* ó *distorsiones*, que son próximamente los deslizamientos en las caras del paralelepípedo.

En la conferencia próxima pasaremos ya al estudio de la deformación de superficies.

XXIX.— Análisis químico con arreglo á los iones y estudio físico y biológico de las aguas minerales sulfhídricas radio-nitrogenadas, denominadas «Hervidero de San Vicente».

POR GABRIEL DE LA PUERTA.

Situación de la fuente.

Se halla situada en el término municipal de Almeida, partido judicial de Bermillo de Sayago, provincia de Zamora, á 41° 15′ de latitud N. y 3° 20′ longitud O. del meridiano de Madrid.

La altura sobre el nivel del mar es de 535 metros.

El terreno donde brota el agua es granítico, como toda la comarca, recubierto por el aluvión en su mayor parte.

Son conocidas esta aguas desde muy antiguo con el nombre de *Hervidero de San Vicente*, por los gases que se desprenden en su emergencia.

Como luego se dirá, son éstos hidrógeno sulfurado y anhídrido carbónico en corta cantidad, y nitrógeno en mayor proporción, el cual, por su poca solubilidad en el agua, aunque está sobresaturada, se desprende en burbujas en gran parte, pareciendo que el agua está en ebullición.

Por experiencia las usan en el país estas aguas para enfermedades de los ojos, herpéticas y del estómago, como puede verse en la Memoria histórico-científica de las mismas.

Aforo.

El manantial da en la actualidad medio litro de agua por segundo, que corresponde 30 litros por minuto, 1.800 por hora y 43.200 litros en veinticuatro horas.

Esta cantidad aumentará indudablemente cuando se haga el captado y las obras necesarias, porque alrededor de la fuente principal ó pozo hay varios manantiales.

Este aforo ha sido practicado por el propietario de las aguas, D. Francisco Beneito Mayor, Auxiliar de minas.

Propiedades físicas del agua.

Es incolora, transparente, de olor y sabor sulfhídrico, que les pierde después de algún tiempo de hallarse en contacto del aire, porque se va el hidrógeno sulfurado. Contiene el agua fibrillas y copitos blancos que son de *sulfuraria*, como luego se dirá.

Al agitar el agua, y sobre todo si se calienta, se desprenden finísimas burbujas, que son de ázoe ó nitrógeno y poco anhídrido carbónico.

Temperatura en el manantial.—Término medio de varias observaciones: 15.° centígrados.

Densidad del agua.— Determinada por la balanza de Westphal y por el picnómetro, á la temperatura de + 4°, resultó 1,0003.

Análisis cualitativo.

Reacciones preliminares.

Tintura de flor de malva, papel de tornasol rojo y *azul* y *fenoltaleina.*—Reacción neutra, ó á lo más, ligeramente alcalina con la flor de malva.

Nitroprusiato de sodio.—Nada; pero si se añaden algunas gotas de amoníaco, color purpúreo (hidrógeno sulfurado y no sulfuros).

Acido arsenioso disuelto en ácido clorhídrico y agua.—Apenas se advierte color amarillo, debido al hidrógeno sulfurado.

Agua de cal.—Precipitado blanco.

Cloruro de calcio y *amoníaco.*—Precipitado blanco.

Estas dos reacciones indican la existencia de ácido carbónico ó bicarbonatos, pero también son debidas al silicato y fluoruro de sodio que contiene el agua.

Acido clorhídrico.—No da efervescencia perceptible, por ser muy pequeña la cantidad de bicarbonatos.

El *ferri* y *ferrocianuro potásicos,* el *sulfocianuro potásico* y *sulfuro amónico,* no dan la reacción del *hierro,* porque existe en muy corta cantidad, y sólo aparece en el agua concentrada.

Cloruro de bario.—Opalinidad, añadiendo ácido clorhídrico (pocos sulfatos).

Nitrato de plata.—Precipitado blanco algo amarillento (por el hidrógeno sulfurado), insoluble en ácido nítrico la mayor parte (cloruros).

Oxalato amónico.—Apenas opalinidad (poco calcio).

Fosfato sódico amónico. — Casi nada (muy poco magnesio).

Grados hidrotimétricos.—4°, que corresponde á 0,04 gramos de sales de calcio y magnesio por litro de agua.

Evaporación del agua.

Dos litros de agua mineral se evaporaron en cápsula de porcelana hasta reducir su volumen á unos 200 c. c. Al calentar se desprenden al principio finísimas burbujas de nitrógeno y anhídrido carbónico, sin enturbiarse el líquido. Por enfriamiento, al día siguiente, aparece un pequeño depósito ó precipitado blanco.

Se filtró el líquido para separar el precipitado y estudiar separadamente el líquido filtrado y dicho precipitado.

Estudio del líquido filtrado.

Dió las reacciones siguientes:

Tintura de flor de malva.—Verde.

Papel rojo de tornasol.—Azul.

Fenoltaleina.—Rojo.

Resulta que el líquido tiene reacción alcalina, pero no es debida á carbonatos alcalinos, porque tratado con ácido clorhídrico, no se nota desprendimiento de burbujas de gas, ni tratado con sulfato de magnesio da precipitado, ni opalinidad.

La alcalinidad es debida al silicato sódico que contiene el agua, y si algo puede ser debida al carbonato amónico, se encuentra éste en tan corta cantidad, que no aparece por los reactivos antes dichos.

Cloruro de bario.—Precipitado blanco, y añadiendo ácido clorhídrico, opalinidad (pocos sulfatos).

Nitrato de plata.—Precipitado blanco, insoluble en ácido nítrico (cloruros).

Oxalato amónico.—Casi nada.

Fosfato sódico amónico. -Casi nada.

Molibdato amónico.—Nada.

Ferrocianuro y *sulfocianuro potásicos* y *sulfuro amónicos.*—Nada (ausencia de hierro).

Brucina y *ácido sulfúrico puro.*—Nada (ausencia de nitratos).

Ioduro potásico, almidón y gotas de ácido sulfúrico diluído.—Nada (ausencia de nitritos).

Coloración de la llama.—Amarilla (sodio).

Estudio del precipitado.

El precipitado resultante de evaporar dos litros de agua era blanco y escaso. Se disolvió en ácido clorhídrico diluído, y dió efervescencia, dejando un residuo pequeño insoluble de sílice.

La disolución clorhídrica de dicho precipitado dió las reacciones siguientes:

Ferrocianuro potásico.—Ligera coloración azul.

Sulfocianuro potásico.—Ligera coloración roja.

Sulfuro amónico, después de neutralizar con amoníaco.—Ligera coloración verdosa, y al día siguiente algunos copitos negros.

Estas reacciones demuestran la existencia del hierro, pero en muy corta cantidad.

Oxalato amónico.—Después de neutralizar con amoníaco, poco precipitado blanco (calcio).

Fosfato sódico amónico.—El líquido de la reacción anterior, filtrado después de algún tiempo para separar el calcio, dió apenas opalinidad (muy poco magnesio).

Cloruro de bario.—Nada (ausencia de sulfatos).

Molibdato amónico.—Calentando, nada (ausencia de fosfatos).

Coloración de la llama.—Amarilla algo rojiza (sodio y calcio).

De las reacciones expuestas resulta, que el precipitado obtenido de la evaporación del agua mineral está formado de *carbonato de calcio, sílice, hierro* y *magnesio* en corta cantidad.

Otras reacciones.

Se investigó el *amoníaco* y se encontró en muy poca cantidad, 0,001 gram. por litro de agua; pero nada de amoníaco albuminoide.

También se investigó el bromo, iodo y ácido bórico en gran cantidad de agua evaporada, y no se encontraron.

El *fluor* fué objeto también de investigación, para lo cual, un litro de agua mineral se evaporó hasta sequedad, y el residuo seco se mezcló con ácido sulfúrico, no habiendo necesidad de añadir sílice, porque la contenía el agua. Haciendo pasar una corriente de aire seco, se desprende fluoruro de silicio, que al llegar á un tubo doblado en forma de V, en cuyo vértice se puso una gota de agua, se forma sílice gelatinosa y ácido hidrofluosilícico. Esta investigación se hizo en el aparato de mi distinguido compañero Dr. Casares.

Examen espectroscópico.

Las observaciones se han hecho con los líquidos siguientes:

1.° Agua mineral sin evaporar, acidulada con ácido clorhídrico. Se distinguen las rayas del *litio* y *calcio*, además del *sodio*.

2.° Agua evaporada procedente de dos litros y acidulada con ácido clorhídrico. Aparecen, además del *sodio*, las rayas del *litio* y *potasio*, si bien este último muy poco.

3.° Precipitado resultante de evaporar el agua mineral y disuelto en ácido clorhídrico. Aparecen las rayas del *sodio*, *litio* y *calcio*.

No cabe duda que el agua contiene, además del *sodio* y *calcio*, pequeña cantidad de *litio* y aun menos de *potasio*.

Examen microscópico.

A simple vista se ven en el agua mineral fibrillas y copitos blancos, que son de la materia que se encuentra en muchas aguas sulfurosas, llamada *sulfuraria*, que también se ha llamado *baregina*, *glerina* y *pirineina*.

Con el microscopio, en gotas de agua sacadas del fondo con una pipeta esterilizada, se ven algunas *oscilarias*, además de la *sulfuraria*. Esta ha sido objeto de estudio especial, y se ha visto que se halla formada del alga microscópica, llamada *Beggiatoa alba*, caracterizada por sus filamentos arqueados y articulados, con granulaciones de azufre, especialmente en la parte terminal, y además se ven espórulos libres. También contiene una substancia glerosa que la comunica cierta untuosidad.

Tiene importancia la sulfuraria por el azufre muy dividido que la rodea, resultando el agua sulfurosa más activa.

La *Beggiatoa alba* y otras especies que se hallan en las aguas sulfurosas, se denominan por varios autores *sulfobacterias*, y se consideran como intermedias entre las algas de organización superior y las bacterias propiamente dichas. De estas últimas trataremos en el capítulo «Análisis bacteriológico.»

Depósitos ó barros del agua.

Entre las botellas remitidas para el análisis, hay una con el depósito que se forma en las fuentes. El agua huele más á hidrógeno sufurado, y tiene algo más grados sulfhidrométricos que el agua de las otras botellas. El depósito es casi negro, cuyo color es debido al sulfuro de hierro, conteniendo, además, carbonatos térreos, azufre precipitado y arcilla. Con el microscopio se ven la sulfuraria y oscilarias que son cercanas á las beggiatoas, y algunas diatomeas.

Dicho depósito se disuelve, en parte, en ácido clorhídrico, desprendiendo anhídrido carbónico é hidrógeno sulfurado, y quedan las algas, azufre y sílice sin disolver.

Puede utilizarse este depósito ó barro, como el de otras aguas sulfurosas, para las enfermedades de la piel, por el azufre muy dividido que contiene.

Análisis cuantitativo.

Residuo fijo á 120°.

Medio litro de agua mineral se evaporó en una cápsula de platino en baño de aire, calentado el residuo á la temperatura de 120° hasta obtener dos pesadas consecutivas iguales, y resultó 0,2435 gramos, y para un litro de agua, el doble, 0,487 gramos.

Calentado el producto al rojo incipiente, se ennegreció en las paredes de la cápsula, debido á la materia orgánica que contiene el agua. Después de frío, se trató con ácido clorhídrico diluído, y produjo efervescencia, dejando un residuo insoluble de sílice.

Determinación de los gases.

Un matraz de medio litro de capacidad se llenó de agua mineral, adaptando un tubo de conducción lleno de agua destilada, que comunicaba con la cuba hidrárgiro-neumática, colocando en el puente una campana graduada, estrecha, de cristal y llena de mercurio, sin qué hubiera burbuja ninguna de aire. Se aplicó calor al matraz hasta hervir el agua y cesar el desprendimiento de gases. Al principio se desprendian finísimas burbujitas de gas. Después de frío el aparato é introduciendo la campana en el mercurio, hasta que el nivel de éste en el exterior fué igual que en el interior de la campa-

na, resultaron 17 c. c. de gases á la temperatura de 15° y presión de 712 milímetros.

Después se introdujo en la campana, por medio de la pipeta curva, una solución de potasa cáustica, y agitando, se absorbieron 4,5 c. c. de anhídrido carbónico. Seguidamente, para que no varíase la temperatura y presión, se introdujo con la pipeta curva una solución de ácido pirogálico, agitando varias veces para la absorción de oxígeno, que fué 0,5 centímetros cúbicos. Quedaron sin absorber 12 c. c. de nitrógeno ó ázoe.

El gas hidrógeno sulfurado que contenía el agua fué descompuesto por el mercurio.

Para un litro de agua mineral, corresponden:

	Cent. cúb.
Anhídrido carbónico	9
Oxígeno	1
Nitrógeno	24
TOTAL	34

A estos gases hay que añadir 3,5 c. c. de hidrógeno sulfurado, obtenidos por la sulfhidrometría, resultando los siguientes gases en litro de agua:

	Cent. cúb.
Anhídrido carbónico	9
Oxígeno	1
Nitrógeno	24
Hidrógeno sulfurado	3,5
TOTAL	37,5

Además creemos que en estas aguas hay pequeñas cantidades de los gases *argon* y *helio*, que no hemos podido determinar por no disponer de agua bastante para extraer la cantidad necesaria de gases para esta determinación.

Determinación del hidrógeno sulfurado SH^2.

Tratada el agua mineral con el reactivo nitroprusiato de sodio, no dió coloración ninguna, lo que prueba que el olor sulfhídrico no es debido á sulfuros, sino al hidrógeno sulfurado que se halla disuelto en el agua. Si se añade al agua un poco de amoníaco ó de sosa, entonces aparece el color purpúreo, porque se ha formado un sulfuro alcalino.

No queda duda ninguna que el agua contiene el gas hidrógeno sulfurado, y no sulfuro alcalino.

Los ensayos sulfhidrométricos, por el método de Dupasquier, dieron por resultado 4° en litro de agua, lo cual corresponde á 0,0051 gramos de azufre y á 0,0054 gramos de hidrógeno sulfurado y en volumen á 3,5 c. c. de dicho gas.

También se hizo con el líquido sulfhidrométrico de Bunsen, y dió el mismo resultado.

Aunque el agua se recogió con mucho cuidado en botellas bien cerradas y sin nada de aire, es posible que haciendo los ensayos al pie del manantial, dé algo más de gas sulfhidrico que el obtenido á los cuatro días de recoger el agua.

Sulfuraria.

En el capítulo «Examen microscópico» hemos dicho que la sulfuraria de estas aguas se halla formada por la *Beggiatoa alba*, rodeada de azufre precipitado.

La cantidad de sulfuraria es variable, según las botellas que se examinen, como es variable, según el momento de emerger el agua.

Recogida de la botella en que aparecía mayor cantidad, sobre un filtro, y desecado éste á 100°, dió 0,1 gramos por litro de agua, pero en otras dió menos cantidad, resultando, como término medio, 0,0632 gramos por litro.

Materia orgánica soluble.

La denominamos soluble para distinguirla de la sulfuraria, que es insoluble. Hemos empleado agua filtrada, y la determinación se ha hecho por el permanganato potásico en medio ácido, resultando 0,0045 gramos por litro de agua mineral.

Ion sulfhídrico (sulfhidrilo) *SH.*

El hidrógeno sulfurado es un ácido dibásico muy débil que apenas se ioniza en el agua, pero es posible se forme el ion sulfhídrico ó sulfhidrilo que es más activo que el ion azufre. A la acción de dicho ion debe agregarse la de la sulfuraria, de que hemos tratado antes.

La cantidad del *ion sulfhídrico SH*, deducida de la del hidrógeno sulfurado SH^2, es 0,00524 gramos por litro de agua mineral.

Ion cloro *Cl.*

Se ha hecho la determinación por medio de la solución valorada de nitrato de plata, poniendo en el agua algunas gotas de solución de cromato de potasio, y resultó 0,12 gramos del ion cloro por litro de agua.

También se ha determinado precipitando 100 centímetros cúbicos de agua mineral acidulada con ácido nítrico, por nitrato de plata, deduciendo del cloruro de plata la cantidad de cloro, y resultó cantidad próxima á la anterior.

Ion fluor *Fl.*

El residuo seco obtenido por evaporación de un litro de agua mineral se trató con ácido sulfúrico en el aparato del Dr. Casares, según se dice en el análisis cualitativo, y de

la cantidad de sílice formada se dedujo la de *fluor*, resultando 0,012 gramos.

Creemos que el fluor debe hallarse en estado de fluoruro de sodio, resultando de esta sal 0,0265 gramos en litro de agua.

Ion sulfúrico SO^4.

Medio litro de agua mineral acidulada con ácido clorhídrico se trató con cloruro de bario, agitando con una varilla de cristal. Sólo se produjo opalinidad, y al día siguiente se recogió el pequeño precipitado sobre un filtro; se lavó bien con agua destilada, se desecó con el filtro á 100°, y separado el precipitado, se calentó fuertemente con las cenizas del filtro, resultando, descontadas las cenizas del papel de filtro, 0,04577 gramos de sulfato de bario, donde hay 0,018858 gramos del *ion sulfúrico* SO^4, y para un litro de agua mineral el doble, 0,037716 gramos.

Ion hidrocarbónico CO^3H.

En una botella con un litro de agua mineral se puso amoníaco y cloruro de calcio, tapando en seguida y agitando. A los dos días se recogió sobre un filtro el precipitado formado de carbonato de calcio, y después de seco se determinó la cantidad de anhídrido carbónico CO^2 en el aparato de F. Morh, y resultó 0,0563 gramos, que corresponden á 0,07802 del *ion hidrocarbónico* CO^3H.

El ácido carbónico CO^3H^2 es un ácido dibásico y forma, por tanto, en disolución en el agua, los dos iones CO^3 y CO^3H, y el que está formando los bicarbonatos es indudablemente el segundo. Por esta razón le hemos considerado todo como CO^3H, al cual damos el nombre de *ion hidrocarbónico*.

Ion hidrógeno *H.*

Este ion existe en el ácido sulfhídrico $S\bar{H}\overset{+}{H}$, y siendo la cantidad de este último 0,0054 gramos por litro de agua, resultan 0,00015 gramos. También existe en el ácido carbónico libre $C\bar{O}^3H\overset{+}{H}$, y siendo la cantidad de éste 0,0142 gramos en litro de agua, resulta 0,00023 gramos. En total, sólo hay del *ion hidrógeno* 0,00038 gramos por litro de agua.

Ion calcio *Ca.*

Medio litro de agua mineral acidulada con ácido clorhídrico se trató con amoníaco en exceso y no se percibió precipitado de alúmina ni de óxido de hierro, si bien se filtró el líquido por si había alguna cantidad de dichos cuerpos. Se añadió después oxalato amónico y se dejó hasta el día siguiente. El pequeño precipitado formado de oxalato de calcio se recogió sobre un filtro, se lavó, desecó y se incineró con el filtro, añadiendo después algunas gotas de ácido sulfúrico diluído, para obtener sulfato de calcio. Se calentó fuertemente para eliminar el exceso de ácido, y pesó, después de frío el sulfato de calcio, descontadas las cenizas del filtro, 0,015 gramos, donde hay 0,00441 gramos del *ion calcio*, y para un litro de agua mineral, el doble, 0,00882 gramos.

Ion magnesio *Mg.*

El líquido anterior, después de separado el calcio (procedente de medio litro de agua mineral), se trató con fosfato sódico amónico y apenas se formó opalinidad. Se dejó hasta el día siguiente, siendo tan pequeño el precipitado, que no fué posible pesarle; no existiendo, por tanto, en un litro de agua, más de un miligramo del *ion magnesio.*

Ion litio *Li.*

Medio litro de agua mineral se aciduló con ácido clorhídrico y se evaporó en una cápsula de porcelana hasta casi sequedad. El producto se trató con una mezcla de alcohol anhidro y éter, filtrando el líquido y dejándole evaporar espontáneamente. El residuo de la evaporación se trató con ácido sulfúrico diluído y se calentó para convertir en sulfatos los cloruros de sodio, de calcio y de litio. El producto se trató con una mezcla de alcohol anhidro y éter, que sólo disuelve al sulfato de litio, quedando éste por evaporación, y después de calentado fuertemente, pesó 0,012 gramos, en donde hay 0,0015 del *ion litio*, y para un litro de agua mineral, el doble, 0,003 gramos.

Ion sodio *Na.*

Medio litro de agua mineral se trató con amoníaco y carbonato amónico, hirviendo el líquido hasta precipitar la corta cantidad de calcio y magnesio que contienen estas aguas. El líquido, después de frío, y añadiendo nueva cantidad de amoníaco, se evaporó hasta sequedad, calentando el residuo para eliminar las sales amoníacales. Después de frío se disolvió el producto en agua destilada, se filtró el líquido y se evaporó hasta sequedad, añadiendo algunas gotas de ácido sulfúrico diluído, para convertir todo en sulfato de sodio. Se calentó fuertemente para desalojar el exceso de ácido y pesó el sulfato de sodio 0,19167, donde hay 0,06209 del *ion sodio* y para un litro de agua mineral, el doble, 0,12418 gramos.

La cantidad del *ion potasio* era tan pequeña que no fué posible pesarla y á lo más existe 0,001 gram. en litro de agua mineral.

Ion amonio NH^4.

Se destilaron 200 centímetros cúbicos de agua mineral con óxido magnésico, recogiendo 40 centímetros cúbicos de líquido destilado, el cual, tratado con el reactivo de Nessler, dió ligero color amarillo, correspondiente á 0,001 gramos del *ion amonio* por litro de agua. Este ion debe encontrarse en estado de carbonato amónico. No existe nada de amoníaco albuminoide.

Ion silícico SiO^3.

Medio litro de agua mineral acidulada con ácido nítrico se evaporó hasta sequedad, y el residuo se calentó fuertemente. Después de frío se trató con ácido clorhídrico diluído y quedó una parte insoluble de sílice SiO^2, que recogida sobre un filtro y bien lavada con agua destilada, se desecó é incineró con el filtro, pesando, descontadas las cenizas de éste, 0,02353 gramos, que corresponden á 0,02977 gramos de SiO^3, y para un litro de agua, el doble, 0,05954 gramos. De esta cantidad hay 0,01835 en estado de silicato de sodio y el resto, 0,0412 en estado de sílice hidratada (ácido metasilícico) $SiO^3\ H^2$ 0,0422 gramos.

Sólo consideramos como *ion silícico* SiO^3, la parte que se halla combinada con el sodio, esto es, 0,01835 gramos, y aun así, forma un anión muy débil. La parte correspondiente al ácido metasilícico, no se puede considerar como ion, porque dicho ácido es coloide y sólo se halla en pseudosolución.

Iones aluminio Al^2 y hierro Fe.

El líquido anterior, procedente de medio litro de agua mineral después de separada la sílice, se le añadió amoníaco en exceso, y después de dos días se formó un pequeño preci-

pitado de hidrato alumínico gelatinoso, blanco muy ligeramente amarillo-rojizo. Recogido sobre un filtro, lavado con agua destilada é incinerado con el filtro, pesó descontadas las cenizas de éste, 0,00377 gramos de Al^2O^3.

El *ion hierro* era tan pequeño, que no pudo pesarse el óxido férrico, calculando sería un miligramo. Queda de óxido de aluminio 0,00277, donde hay 0,001466 del *ion aluminio*, y para un litro de agua mineral, el doble, 0,002932 gramos.

El líquido amoniacal, después de separar el hidrato de aluminio, no dió con la mixtura magnesiana precipitado ni opalinidad, lo que prueba que no existían fosfatos.

Análisis bacteriológico.

Se hicieron varios cultivos en agar peptonizado ó gelosa nutritiva echando en unos una gota de agua mineral, y en otros dos con la pipeta graduada, mezclándolo bien después de licuada dicha gelosa. Se pusieron los líquidos en placas de cristal (cajas de Petri), previamente esterilizadas y cubiertas con su tapadera. Al cabo de cuatro días, á la temperatura de 18°, empezaron á aparecer manchas ó colonias, y á los siete días cesaron de aparecer.

Contadas dichas colonias, resultaron 17 para una gota de agua, y correspondiendo á la pipeta empleada 27 gotas por centímetro cúbico, resultan $17 \times 27 = 459$ bacterias por centímetro cúbico de agua mineral, no liquidantes y completamente inofensivas, como las de las buenas aguas potables.

Probablemente, el número será menor si el agua se recoge en botellas esterilizadas. Además, aparecieron algunas manchas de moho *(penicillium gláucum)*, procedente de los tapones de las botellas.

Radioactividad.

La radioactividad de esta agua es considerable: puesta en un platillo metálico entre los discos del electroscopio de Cu-

rie, le descarga prontamente; pero este medio no es cuantitativo ni tan preciso como el del fontaktoscopio de Engler y Sievequín, en el cual ha dado 1.000 voltios por hora y litro, teniendo en cuenta que se examinó cuatro días después de recogida, aunque con las precauciones necesarias para evitar el contacto del aire. Esta determinación con el fontaktoscopio se ha hecho en el laboratorio de radioactividad de mi ilustre colega Dr. Muñoz del Castillo.

Crioscopia.

El punto de congelación de estas aguas se determinó por medio del crioscopio de Claude y Balthazard, y resultó —0,045.

Como se ve, el descenso crioscópico es pequeño, porque éste se halla en relación con la cantidad de sales disueltas y éstas son pocas, aunque están muy ionizadas.

La concentración molecular de esta agua mineral resulta según la ecuación siguiente:

$$N = \frac{0{,}045}{1{,}85} = 0{,}024.$$

La presión osmótica de estas aguas á 0° es igual á 0,024 $\times$ 22,35, ó sean 0,5364 atmósferas. Como la temperatura del agua en el manantial es 15°, hay que añadir el producto de multiplicar el número de atmósferas por el coeficiente de aumento de la presión osmótica con la temperatura, esto es,

$$0{,}5364 \times 0{,}00367 \times 15 = 0{,}0295,$$

cuyo número, sumado á 0,5364 da una presión de 0,5659 atmósferas.

Ebulloscopia.

Hierve esta agua á la temperatura de 98°1 á la presión de 714 mm. (6 de Enero de 1908 en Madrid).

A la misma presión, y en el mismo momento, el agua destilada hirvió á 97°,95, de modo que resulta un ascenso para el agua que analizamos de 0,15; y al nivel del mar (760 mm.) hervirá á 100°,15.

Conductibilidad eléctrica.

Se ha determinado con el nuevo aparato de Kohlrausch, recientemente adquirido para el laboratorio de mi cátedra de Química inorgánica.

La conductibilidad específica obtenida á la temperatura de 25° ha sido: 0,000897; y la resistencia 1114,8 ohmios.

Resulta que la conductibilidad eléctrica del agua mineral llamada Hervidero de San Vicente es pequeña, lo cual se explica por la corta cantidad de sales que contiene, si bien éstas deben hallarse completamente ionizadas.

Iones que existen en un litro de agua mineral, según los resultados del análisis.

Los iones encontrados han sido los siguientes:

Iones negativos (aniones).

	Gramos.
Ion sulfhídrico (sulfhidrilo) SH	0,00524
— hidrocarbónico CO^3H	0,07802
— sulfúrico SO^4	0,03772
— cloro Cl	0,12000
— fluor Fl	0,01200
— silícico SiO^3	0,01835

Iones positivos (cationes).

Ion calcio Ca	0,00882
— magnesio Mg	0,00100
— litio Li	0,00300
— sodio Na	0,12418
— potasio K	0,00100
— amonio NH^4	0,00100
— aluminio Al^2	0,00293
— hierro Fe	0,00100
— hidrógeno H	0,00038

Agrupación de iones y sales resultantes.

Aunque algunas sales hay que admitirlas hipotéticamente, hay otras que no queda duda que existen en esta agua, atendiendo á las reacciones obtenidas en el análisis, especialmente en el agua evaporada y filtrada y en el precipitado resultante, así como á las observaciones espectroscópicas y el orden de afinidades. Teniendo esto presente y haciendo los cálculos correspondientes, resultan las siguientes en un litro de agua mineral:

	Gramos.
Cloruro de sodio $NaCl$	0,1978
— de potasio KCl	0,0019
Fluoruro de sodio $NaFl$	0,0265
Bicarbonato de calcio $(CO^3H)^2Ca$	0,0357
— de magnesio $(CO^3H)^2Mg$	0,0060
— de litio CO^3HLi	0,0291
— de amonio CO^3HNH^4	0,0044
— de hierro $(CO^3H)^2Fe$	0,0032
Sulfato de sodio SO^4Na^2	0,0331
— de aluminio $(SO^4)^3Al^2$	0,0185
Silicato de sodio SiO^3Na^2	0,0246
Acido metasilícico (sílice coloide) SiO^3H^2	0,0422
Materia orgánica soluble	0,0045
Sulfuraria	0,0632
	0,4907

La cantidad en peso de los gases contenidos en un litro de agua, es como sigue:

	Gramos.
Hidrógeno sulfurado SH^2	0,005400
Nitrógeno N	0,030144
Anhídrido carbónico CO^2	0,017793
Oxígeno O	0,001430

El fluor creemos se halle en estado de fluoruro de sodio, que es como generalmente se encuentra en las aguas mi-

nerales. El cloro no queda duda que está en forma de cloruro de sodio, y el resto de este metal debe hallarse en estado de silicato y sulfato. El calcio, magnesio y litio se encuentran en estado de bicarbonatos. El aluminio le suponemos en estado de sulfato, pero también podría hallarse formando silicato. La corta cantidad de hierro creemos se halle en estado de bicarbonato, aunque también pudiera estar en combinación con la materia orgánica; y, por fin, la corta cantidad de amoníaco debe estar formando carbonato.

El ácido carbónico se encuentra en los bicarbonatos, y en estado libre poca cantidad.

Resumen general del análisis.

Temperatura en el manantial, 15°.
Altura sobre el nivel del mar, 535 metros.
Aforo, 43.200 litros de agua en veinticuatro horas.
Densidad del agua, 1,0003.
Grados sulfhidrométricos, 4°.
Radioactividad, 1.000 voltios por litro y hora.
Crioscopia, — 0,045.
Presión osmótica, 0,5659 atmósferas.
Ebulloscopia, 98,°1 á la presión de 714 mm.
Conductibilidad eléctrica, 0,000897 y Resistencia, 1114,8 ohmios.
Bacterias no liquidantes é inofensivas.
Sulfobacterias propias de las aguas sulfhídricas.

Gases contenidos en un litro de agua.

	Cent. cúb.	Gramos.
Hidrógeno sulfurado SH^2.....	3,5	0,00540
Anhídrido carbónico CO^2.....	9,0	0,01979
Nitrógeno ó ázoe N.....	24,0	0,03014
Oxígeno O.....	1,0	0,00143

Número de ionesmiligramos contenidos en un litro de agua.

5	iones	sulfhídricos (sulfhídrilo) SH.
78	—	hidrocarbónicos CO^3H.
38	—	sulfúricos SO^4.
120	—	de cloro Cl.
12	—	de fluor Fl.
18	—	silícicos SiO^3.
9	—	de calcio Ca.
1	—	de magnesio Mg.
3	—	de litio Li.
124	—	de sodio Na.
1	—	de potasio K.
1	—	de amonio NH^4.
3	—	de aluminio Al^2.
1	—	de hierro Fe.
0,1	—	de hidrógeno H.

Biología.

La radioactividad del agua, la carga eléctrica de los iones, la presión osmótica de las sales y gases disueltos, las bacterias y sulfobacterias que contiene, podemos decir que constituyen los elementos de *vida* de la notable agua mineral Hervidero de San Vicente.

En los capítulos correspondientes, y en el resumen general, se hallan las indicaciones suficientes para formar juicio de esta agua bajo el punto de vista biológico.

Clasificación.

Por la corta cantidad de sales que contienen estas aguas, pertenecen á las llamadas *oligometálicas*, y si bien el hidrógeno sulfurado y sulfuraria que en ellas existen nos explican su uso en las enfermedades herpéticas, no así otros usos que se hacen y que pueden hacerse; debiendo, por tanto, tener en cuenta la acción medicinal de su *gran radioactividad,*

que es de 1.000 voltios, y la del *ázoe* ó *nitrógeno*. La cantidad de este gas hallada es mayor que la que corresponde á su solubilidad en el agua á la presión ordinaria, debido á presiones interiores en el terreno, como ocurre en las aguas de Panticosa, que están sobresaturadas de ázoe. Las propiedades atribuídas al nitrógeno ó ázoe son las de ser sedantes, que también se atribuyen hoy á la radioactividad del agua.

En conclusión, atendiendo á los principios y acciones de mayor importancia medicinal, deben clasificarse como *aguas sulfhídricas radioazoadas* ó *radionitrogenadas*.

Se parecen al agua sulfhídrica azoada de Panticosa, llamada fuente del estómago, y sus propiedades terapéuticas deben ser análogas.

Madrid, 22 de Enero de 1908.

XXX.—Mareómetros y mareógrafos de sifón.

POR EDUARDO MIER Y MIURA.

SEGUNDA PARTE

DESCRIPCION DE ALGUNOS TIPOS DE MAREOMETROS Y MAREOGRAFOS DE SIFON

15.—Mareómetros de tubo en U.

La figura 5 representa un indicador de nivel de tubo en U, que hemos construído como aparato de demostración; puede verse en ella el tubo en U, lleno en parte de mercurio y fijo á una tabla, en la que están aseguradas las reglas que sirven

para efectuar las lecturas. La rama del tubo en U, que comunica con el líquido, lo verifica por medio de un tubo de caucho, que va á enchufarse con otro de cristal, que atraviesa, con rozamiento duro, un tapón de dos orificios, puesto en la boca de un frasco, y llega hasta cerca del fondo de este último.

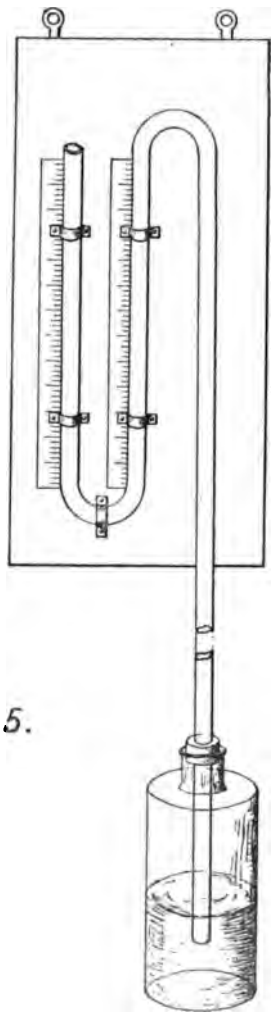


Fig. 5.

Elevando ó bajando el frasco, se simulan los movimientos de las mareas, y efectuando esto á lo largo de una regla dividida, puede apreciarse la correspondencia entre los niveles del agua y los del mercurio.

Una ampliación de este modelo son los mareómetros ordinarios, sin otra diferencia que substituir el tubo de caucho por otro de plomo, que va á sumergirse en el mar, quedando su boca por debajo de las bajamares más vivas que puedan temerse. En la parte más alta de ese tubo de plomo se suelda, en la forma que indica la figura 7, que se refiere á un mareómetro de cubeta, un corto trozo de tubo de plomo, de 15 ó 20 centímetros de largo, que ha de servir para efectuar la carga.

16. — Algunas reglas prácticas para establecer los mareómetros.

Una vez instalado el mareómetro, desprovisto de agua y mercurio, en el lugar que ha de ocupar, comiénzase por echar este último líquido por la rama del tubo en U que comunica con la atmósfera, y soldando al tubo de plomo, situado en la parte más alta del sifón, otro de la misma substancia, ó enchufando perfectamente en él uno de caucho, provisto de espiral de alambre, para evitar las deformaciones, se hace una fuerte aspiración, que produce la subida del agua y del mercurio y carga el aparato; pudiéndose emplear para hacer esa succión cualquier bomba aspirante, incluso las más baratas, ordinariamente usadas, que nosotros hemos empleado frecuentemente en la carga de mareómetros.

Evidente es que la entrada del aire por el enchufe del tubo de cristal con el de plomo debe estar perfectamente impedida, y que todo cuanto esmero se ponga en conseguir esta obturación no es baldío, siendo de recomendar la precaución de establecer en torno de ese enchufe una tacilla de cinc, cuyo eje sea el propio tubo de cristal, y en el interior de la cual queden los bordes del enchufe, que de esta manera podrán tenerse constantemente sumergidos en un líquido cualquiera, que complete la obturación ó denuncie la falta de ella.

Machacando el extremo del tubo de plomo de carga, en una extensión de unos cuantos centímetros, cortándole después con un cortafríos y soldando de seguida el corte plano que resulta, quedará el mareómetro en disposición de funcionar.

Hemos dado, en su correspondiente lugar, todas las fórmulas y correcciones que á este aparato se refieren, y con arreglo á ellas puede el observador escrupuloso proceder sin dificultad alguna á determinar la escala que al mareómetro establecido corresponda; pero, en la generalidad de los casos, preferible es hacer una determinación directa de ella.

Para esto, como quiera que el calor aquí, como siempre, es el encarnizado enemigo de las observaciones precisas, en día cuya temperatura sea próximamente la media de la localidad en que el mareógrafo se establece, se procederá en la forma que á continuación se indica.

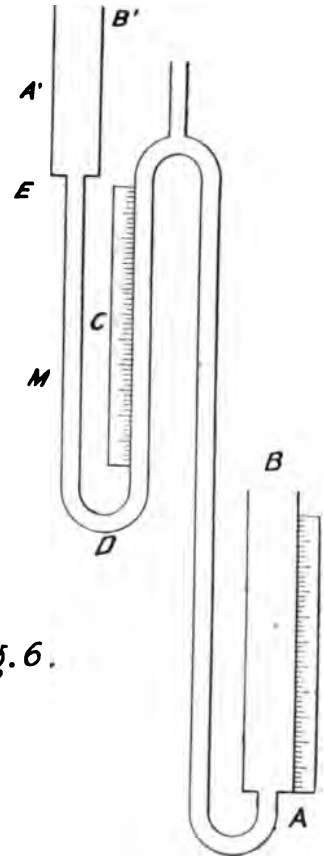


Fig. 6.

Fijo el mareómetro *M*, figura 6.ª, se encorvará algo el extremo del tubo que luego ha de entrar en el mar y se ajustará á su boca otro bien vertical, *AB*, de pequeño diámetro, en el que previamente se hayan trazado señales divisorias, de decímetro en decímetro, ó á cuyo lado haya una regla graduada, y se irá echando agua de mar en él, haciendo las lecturas correspondientes en una escala *C*, adosada al tubo indicador del mareógrafo y dividida en milímetros.

De ese modo se obtendrá una serie de equivalencias entre decímetros de agua y milímetros de mercurio que, á poco esmerada que sea la construcción del mareógrafo, serán casi iguales y darán una serie de valores para la escala, cuyo promedio se aceptará como bueno.

Cuando las condiciones locales no permitan establecer el tubo *AB* suficientemente bajo, puede recurrirse al expedien-

te de dejar abierto el extremo *A* sín enchufar en él tubo alguno y poner éste, por el contrario, en *DE*. Bastará ver entonces cuánto sube el mercurio por cada decímetro de agua que sobre él ejerza presión, para deducir varios valores para la escala que, así como antes se obtuvo simulando la subida de la marea, ahora se deducen figurando su descenso, ya que no á otra cosa equivale echar agua en el tubo *CD*, y tanto da que suba este líquido en el tubo adicional de la izquierda, como que baje en el de la derecha ó recíprocamente, consiguiéndose, bien empleando un medio, bien el otro, ó ya los dos sucesivamente, hacer variar el nivel del mercurio dentro de los límites necesarios y determinar una escala media sobradamente aproximada.

La inercia en estos mareómetros de sifón es de tan pequeña importancia, que resulta á veces excesiva la sensibilidad de tales aparatos; pero esta excelente cualidad, fácil es, si se quiere, empeorarla, bastando para ello emplear tubos de plomo de diámetros pequeños ó dificultar la marcha del agua por ellos, produciéndoles abolladuras en suficiente número.

Hemos comprobado el hecho de que un mareómetro de mercurio, de gran inercia, relativamente hablando, puesto que tenía 7 m. de carga de agua y 1 m. de mercurio, en tubos de 1 cm. de diámetro interior, acusaba perfectamente las oscilaciones producidas por el paso de un vapor, de no gran tonelaje, á unos 100 metros de donde el mareómetro se hallaba establecido, y este hecho, por sí solo, indica que se trata de aparatos en que, por fortuna, hay que empeorar generalmente sus cualidades.

En el caso de que se emplee para las lecturas solamente una regla graduada, deberá establecerse en la rama del tubo que comunica con las aguas del mar, y damos este consejo, porque hemos podido observar que en un mareómetro que establecimos para nuestros ensayos y estudios preliminares, al cabo de dos años de funcionar, mientras que la superficie libre del mercurio estaba oxidada y el tubo correspondiente

aparecía muy sucio, la otra superficie y la rama en que ésta se movía se hallaba cual el primer día que el mareómetro se instaló.

Los gastos que la instalación de un mareómetro de esta especie puede ocasionar son insignificantes, y en testimonio de ello, aducimos que el coste y establecimiento de él ascienden á unas cincuenta pesetas.

17.—Mareómetros de cubeta.

Al estudiar la teoría de los mareómetros de cubeta lo hicimos sirviéndonos de la figura 2, que indica nno de los tipos más sencillos que pueden construirse: *AB*, representa en aquélla un tubo de cristal á cuyo lado ha de ponerse una escala graduada; *BCD*, es un tubo de fundición, ensanchado en la parte *D* de la cubeta, y *H*, otro tubo de plomo al que sólo falta en la parte superior un tubito adicional, por el que ha de efectuarse la carga, en la forma que hemos explicado, al describir los mareómetros de tubo en U.

Todo el aparato estará montado sobre una tabla fija en la pared, y los detalles que se refieren á obturación de enchufes, procedimiento teórico ó experimental para la graduación, etcétera, etc., son idénticos á los ya indicados en este escrito precedentemente, con toda minuciosidad.

Otra variedad de los mareómetros de cubeta es la representada en la figura 7, reproducción exacta, en pequeña escala, de un aparato ya construído y ensayado por nosotros.

En un tablero provisto de las correspondientes cabeceras para mantenerle algo alejado de la pared en que ha de colgarse, hállase sujeto un tubo barométrico, de 3,5 milímetros de diámetro interior, que llega cerca del fondo de una ancha cubeta de 75 milímetros de radio. La tapa de esta cubeta, formada por dos semicírculos de madera, que en ella encajan, tiene, á más de la abertura por la que entra el tubo ya referido, otra distinta, por la que penetra un termómetro, que

llega hasta el fondo de la cubeta, destinado á indicar las temperaturas que el mercurio tenga. Una regla graduada sirve para apreciar las alturas de la columna de mercurio, y el delgado tubo de plomo que se enchufa con el de cristal está provisto, en su parte superior, de un corto apéndice tubular, por el que ha de efectuarse la carga.

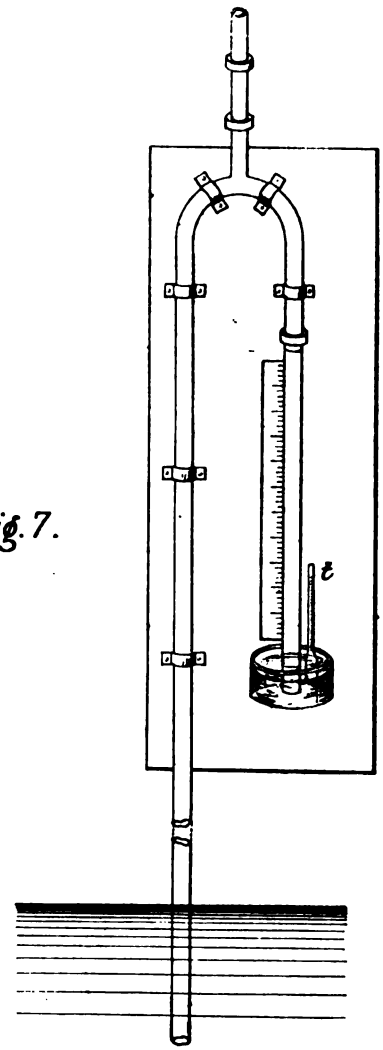


Fig. 7.

Con objeto de cerciorarse de que la carga queda bien hecha, una parte de ese apéndice, de que hemos hablado, es de cristal, y para asegurar la obturación de los enchufes, tanto de los dos que corresponden á este trozo de cristal, cuanto del que empalma el tubo barométrico con el de plomo, hay en cada uno una cubetilla de cinc, en cuyo interior queda el empalme, completamente sumergido en la brea que en ellos preliminarmente se deposita. En el extremo superior del tubito de cristal, destinado á revelar en cualquier tiempo la presencia del aire dentro del aparato, existe una válvula esférica, formada por una bolita

de cristal que, descansando sobre el extremo del corto tubo de cristal, queda detenida en su carrera ascendente, al efectuar la aspiración de carga, y permitiendo que ésta pueda realizarse, por un estrechamiento irregular practicado en el tubo de plomo.

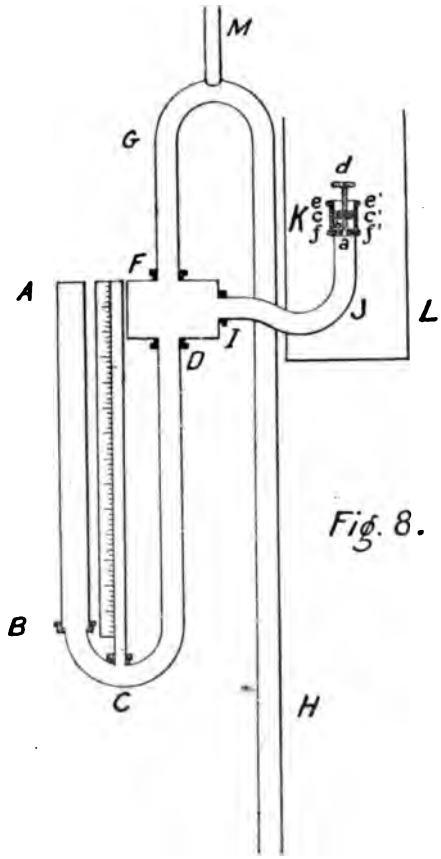


Fig. 8.

Este mareómetro costó 61,75 pesetas, incluyendo todos los gastos de establecimiento.

Más completo que los precedentes, pero también de precio más elevado, es el mareómetro cuya descripción sigue, en el que se han adoptado disposiciones para proceder periódicamente á la limpieza del tubo de plomo.

Se compone este mareómetro, que brevemente describiremos, de un tubo de cristal, *AB* (figura 8), abierto por su parte superior y enchufado por la otra en un tubo encorvado en forma de U, de hierro, *BCD*, que termina por su otro extremo en un ancho cilindro de este mismo metal, *DF*.

Parten de ese cilindro ó cubeta dos tubos de plomo: el uno de ellos, el *FGH*, va á sumergirse en el mar por su extre-

mo *H*, y el otro, *IJK*, penetra en el interior de un depósito de agua, *L*, atravesando la pared lateral de éste.

El extremo *K* del tubo, que entra en el depósito *L*, lleva una válvula cónica, *a*, que se abre hacia arriba y que está sujeta al extremo cilíndrico *cc'* del tornillo *d* por medio de una cadenita. Este tornillo, *d*, tiene su tuerca en el disco metálico *ee'*, el cual, por medio de las bridas, *ef e'f'*, está sujeta al *ff*, que á su vez se halla soldado al extremo *K* del tubo de plomo. Entre ambos discos metálicos, *cc'* y *ff'*, hay una rodaja de caucho, agujereada en su centro para permitir que en él se aloje la cadena; rodaja que, al ser oprimida entre los discos *cc'* y *ff'*, por la acción del tornillo *d*, obtura perfectamente la junta circular de la válvula *a*. Además de esto, el depósito *L* habrá de estar constantemente lleno de agua cuando funcione el mareómetro, de modo que no es de temer que penetre aire alguno por el extremo *K*.

Las distintas piezas que hemos descrito van sujetas á una tabla, fija á la pared por medio de abrazaderas y fuertes tornillos. El tubo de cristal, que figura en el dibujo descrito y que arranca verticalmente de la parte más baja del tubo en U, no existe en los mareómetros que describimos, en los cuales está la escala al lado del *AB*, que aparece más á la izquierda.

Para cargar el mareómetro, poniéndole en disposición de funcionar, se aprovecha el tubo *M*, abierto por su extremidad superior, y se comienza por poner un fuerte tapón en la extremidad *H*, sumergida en el mar, y por dejar abierto el extremo *K* del tubo del depósito. Después de esto se vierte, poco á poco, agua de mar por el tubo *M*, y cuando se vea rebosar este líquido por el extremo *K*, se echa agua en el depósito *L* hasta que cubra el extremo *K*, y haciendo funcionar el tornillo *d*, se obtura perfectamente ese extremo.

Se vierte, poco á poco, mercurio en el tubo *AB*, hasta que llegue cerca del extremo *A*, y entonces se completa la carga del tubo, echando, si hace falta, más agua por la boca *M*,

hasta que rebose el líquido, en el cual caso se tapará el extremo *M* herméticamente, soldando á él un disco de plomo, y después se abrirá el extremo del tubo *H*.

Aunque la obturación del tubo que va al mar, por los depósitos que el agua produce, puede evitarse, tanto en éste como en los demás mareómetros y mareógrafos, con el expediente de que hablaremos, al describir los medimareómetros, aun sin recurrir á él, puede retrasarse durante muchos años efectuando cada mes una limpieza de su interior.

Con este fin hemos supuesto que existía el depósito de agua *L* y el tubo que le pone en comunicación con la cubeta, porque bastaría llenar bien de aquel líquido ese depósito y abrir la boca *K* para que se precipite por el tubo de plomo una violenta corriente, que limpiará el interior del tubo de plomo, debiendo efectuarse esta operación con algún cuidado, echando cubos de agua en el depósito, á medida que se gasten, para que no llegue á quedar en el aire la boca *K* y á descargarse el sifón.

18.—Mareómetros de máxima y mínima.

Para ciertos estudios, tales como los que deben preceder al proyecto de todo puerto, es de tanta ó mayor importancia, que la determinación del nivel medio de las aguas, el conocer las situaciones extremas que la superficie del mar alcance, y en estos casos pueden prestar excelentes servicios los mareómetros de máxima y de mínima.

No es tarea difícil adaptar los mareómetros de sifón á estas nuevas exigencias, y entre los varios expedientes á que pudiera recurrirse, indicaremos dos que, á nuestro juicio, debieran emplearse simultáneamente para obtener mayores garantías de acierto.

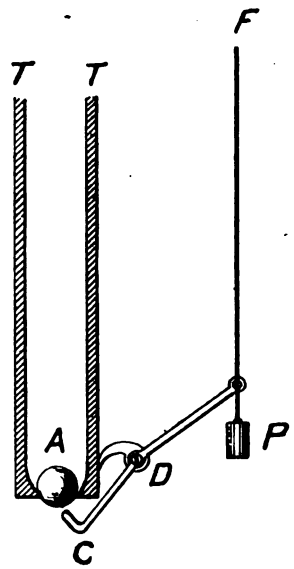
Consiste uno de ellos en adaptar á la boca del tubo de plomo de los mareómetros ordinarios que penetra en el mar, una sencilla disposición, análoga á la descrita en la figura 9,

cuando se desea obtener un mareómetro de máxima, y parecida á la 10, si se quiere que sea de mínima.

La disposición adoptada para los mareómetros de máxima consiste no más que en colocar en la extremidad del tubo *T T*, que penetra en el mar, una válvula esférica que, abriéndose de afuera hacia adentro, permita la entrada del agua é impida su salida.

Para usar esta disposición, ha habido necesidad de idear

Fig. 9.



un sencillo mecanismo, que consienta efectuar la descarga del tubo cuando convenga para la observación.

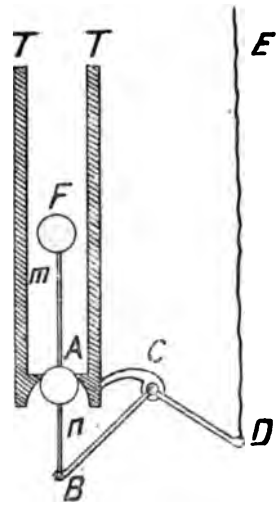
Fácilmente se consigue ese resultado disponiendo cerca de la válvula una palanca ligeramente acodada, *C, D, P,* sujeta por el eje de giro *D* al extremo del tubo, por medio de una armadura. Del extremo *C* arranca un vástago curvo, y del *P* pende un peso, cuyo efecto está contrarrestado por la cadena ó cuerda *F,* que puede mover el observador.

Para descargar el tubo, basta soltar algo esa cuerda *F,*

porque actuando entonces el peso *P*, empuja el vástago *C* á la esfera *A* de la válvula, y, no funcionando ésta, deja libre salida al agua excedente.

Claro es que, para los mareómetros de mínima, en que no se debe permitir la entrada del agua en el tubo *TT* (fig. 10), cuando aumenta la presión exterior, el mecanismo adoptado ha de diferenciarse del descrito. La válvula *A* (fig. 10) queda entonces fuera de la extremidad del tubo, y de ella parten dos cuerdecillas, *m* y *n;* la primera sirve para sujetar un

Fig. 10.



flotante, *F*, que siempre convendría emplear, por pequeño ó nulo que se necesite sea su efecto, aunque se usen esferas *A* de materias poco pesadas (de vidrio hueco, de madera, caucho, etc.); y la segunda cuerdecilla, *n*, liga la esfera *A* con el brazo *BC* de una palanca acodada *B, C, D*, de cuyo otro extremo parte la cuerda *E*, que está á disposición del observador. Tirando de esta cuerda el suficiente tiempo, claro es que se conseguirá que el tubo *TT* tome el agua necesaria.

No de mayor novedad, que esas sencillas disposiciones,

son las que pueden emplearse sobre la superficie de las aguas para convertir un mareómetro ordinario en registrador de los niveles extremos, si bien ofrecen la ventaja de ser algo más seguras, por funcionar las válvulas en líquido de mayor limpieza y homogeneidad que las aguas del mar.

La figura 11 indica la disposición que puede adoptarse en la rama libre del tubo en U de los mareómetros, para que éstos marquen las máximas bajamares. Representa en ella *A* una esferilla de hierro que, estando sumergida en el mercurio, tenderá á flotar por sí sola, adhiriéndose al orificio superior de la válvula.

Fig. 11.

Para contrarrestar en parte este exceso de flotación, puede unirse á la esfera un alambre de hierro *B*, provisto de tres brazos, *m*, *n*, que impidan su cabeceo; alambre que servirá para separar la esfera de su asiento cuando quiera dejarse pasar el mercurio á la parte superior, y que en rigor puede suprimirse, dejando la esfera *A* encerrada entre el diafragma de asiento que hemos fijado y otro situado debajo, que sirva para limitar su movimiento descensional, cuando se la empuja desde arriba con una varilla, para dejar paso al mercurio.

Cuando se trate de marcar la máxima altura de las aguas del mar, podrá emplearse en la rama libre del tubo en U una disposición inversa de la anterior, que representamos en la figura 12. La esfera *C* de la válvula, que se abre de abajo hacia arriba, está provista de una varilla, *B*, cuyo cabeceo impiden varios brazos horizontales que de ella parten y en el extremo

superior de la cual hay una tacilla, *E*, en la que se pueden echar varias gotas de mercurio hasta conseguir que, no sólo quede anulado, sino algo superado el esfuerzo ascensional de *C* por el peso de todo el sistema móvil. La descarga de este aparato claro es que se efectuará elevando á mano la varilla *D*, y evidente es también que ésta pudiera suprimirse, reemplazándola por un ligero hilo, sin más que echar en la rama libre del mareómetro otro líquido menos denso que el mercurio, encima de éste, y haciendo que la válvula quedara siempre actuando dentro de ese flúido menos denso, circunstancia que consentiría emplear esferas de diversas substancias, que por sí solas tuvieran el necesario esfuerzo descensional.

Fig. 12.

De emplearse las disposiciones que primeramente hemos indicado, para la boca del tubo de plomo que en las aguas está sumergida, habrán de limpiarse y renovarse la válvula y la palanca con bastante frecuencia; asi es que, caso de usarse solamente uno de los dos métodos que hemos expuesto, creemos preferible el que opera en la rama libre del tubo en U del mareómetro, en la que los líquidos empleados pueden y deben estar desprovistos de todo género de impurezas que perjudiquen al buen funcionamiento de las válvulas.

19.—Mareómetros con tubo auxiliar.

Después de lo que hemos indicado acerca de este género de mareómetros, al discutir su teoría, y de las observaciones

que llevamos hechas respecto á los demás tipos de mareómetros que hemos descrito, sería pesadez insoportable indicar en qué consisten los mareómetros de tubo auxiliar. Basta echar una mirada sobre la figura 3 y recordar cuanto acerca de ella dijimos, para que podamos omitir nuevas descripciones y detalles.

En cuanto al método que ha de seguirse para cargar este género de mareómetros, sí conviene indicar que deberá comenzarse, antes de enchufar el tubo de plomo, por llenar los demás de líquido auxiliar, utilizando uno ó los dos extremos de los tubos en U, procediéndose luego á introducir el mercurio necesario por la boca á que luego ha de sujetarse el tubo de plomo. Una vez puesto éste, se efectuará la carga por los medios ya indicados.

Usando líquidos poco evaporables, tales como los aceites grasos, puede en realidad prescindirse por largo tiempo de la corrección que el hecho de evaporarse el líquido auxiliar puede introducir; pero si se emplean líquidos más evaporables, ó por exceso de meticulosidad quiere hacerse toda suerte de correcciones, fácil es proporcionarse los necesarios datos para calcularlas.

Basta para ello colocar al lado del tubo, indicador de los desniveles del líquido auxiliar, otro recto, lleno del mismo flúido y de igual diámetro que aquél, puesto que estando ambos en idénticas condiciones, podrá apreciarse en este último las cantidades de líquido que la evaporación hace perder, estableciendo las relaciones necesarias para determinar numéricamente las correcciones que han de efectuarse.

Como quiera que consideramos innecesario recurrir en nuestras costas á tales aparatos, nos abstenemos de desarrollar algo más este estudio, que puede hacerse, por otra parte, introduciendo la influencia simultánea de la temperatura y de la evaporación, siguiendo reglas idénticas ó análogas á las que hemos indicado anteriormente.

20. - Mareómetros para grandes profundidades.

Ya hemos indicado en qué consiste este género de mareómetros, reducidos, en su más sencilla expresión, á un tubo, *ABC*, en U, figura 4.ª, cuya rama menor está sumergida en el mar.

Claro es que esos aparatos lo mismo pueden emplearse para pequeñas que para grandes profundidades; pero teniendo el inconveniente de no ser fácil la colocación de las cubetas dentro de las aguas, en buenas condiciones, no hemos creído deber darles la preferencia, que aun resulta menos justificada si se atiende á que, para convertirles en aparato de gran precisión, han de introducirse nuevas correcciones.

Dependen estas correcciones de la evaporación del líquido que se emplee y de su dilatación; pero fácilmente puede determinarse ambas, puesto que bastará colocar al lado del tubo del mareómetro otro del mismo diámetro y que contenga la misma cantidad de líquido auxiliar que en aquél existe.

De esa manera se sabe en cada instante la variación que en su longitud ha experimentado la columna líquida auxiliar, y se poseen suficientes elementos para hacer un cálculo riguroso que, aunque en todos los casos de aplicación puede reputarse desde luego como innecesario, no está de más recordar, para indicar que este mareómetro, como cuantos hemos proyectado, puede llegar á ser, si así se desea, un instrumento de gran precisión.

Además, la evaporación del líquido puede evitarse, sin más que adoptar la disposición indicada teóricamente en la figura 4.ª, y traducida en la práctica por un tubo continuo que, dejando encerrado el líquido auxiliar entre dos largas columnas de mercurio, impide las pérdidas por evaporación.

XXXI. — Estudio comparativo de los instrumentos más usados en Sismología.

POR MANUEL M.ª S. NAVARRO (S. J.)

Van pasados diez años desde que el malogrado doctor R. Ehlert publicó en las *Beiträge zur Geophysik* una notable Memoria, premiada por la Universidad de Estrasburgo, en la cual estudiaba más de 200 instrumentos sísmicos, trabajo no superado ni siquiera igualado, pero que hoy resulta antiguo y aun deficiente, por el número y valía de los aparatos inventados posteriormente. Cierto que se encuentran descripciones de varios de ellos en libros tan recientes como el acreditado *Handbuch der Erdbebenkunde*, de A. Sieberg; la utilísima obra *Earthquakes in the light of the new Seismology*, del Mayor C. E. Dutton; *La registrazione dei terremoti*, del eminente Director del Observatorio Geodinámico de Rocca di Papa, Dr. G. Agamennone; *Earthquakes*, del Profesor J. Milne, uno de los fundadores de la moderna Sismología, etc.; pero es innegable que ninguno se impuso la tarea de aquel sabio alemán y hoy es indispensable hojear libros, revistas, memorias, boletines y catálogos en no escaso número, para hacerse cargo del estado actual de la Sismología en lo referente á los instrumentos que emplea.

Sieberg y Dutton (*) no los habían manejado cuando escribieron sus obras, faltando en las del oficial norteamericano algunos tan importantes como el péndulo astático de Wie-

(*) El Sr. Sieberg era Auxiliar en el Observatorio meteorológico de Achen (Aquisgran), cuando escribió su manual. Desde 1906 se halla en Estrasburgo, apareciendo ya su firma desde dicho año en los *Wochentlicher Erdbebenbericht* de la Estación Central de dicha ciudad.

chert, etc., y en cambio se ocupa en muchos, ya abandonados, ó que muy pronto lo serán. De su parte el profesor inglés, á diferencia del anterior, no concede gran atención á los instrumentos italianos, único objeto del excelente estudio histórico del último de los autores citados.

En lo posible trataremos de evitar semejantes inconvenientes, tarea por desgracia fácil, en cuanto no puede influir en nosotros el espíritu de nacionalidad. Ningún español, que sepamos, ha honrado á su patria con el descubrimiento de instrumentos sísmicos de reconocida importancia.

Cuanto á lo principal, uniremos á nuestra experiencia personal, no poco deficiente, el estudio comparativo de los numerosos *Boletines* de las estaciones sismológicas que nos honran cambiando sus valiosas publicaciones con las de ésta de Cartuja; el de las revistas, memorias, etc.; los catálogos y fotografías que debemos á la amabilidad de varios constructores afamados; los consejos de sismólogos tan eminentes como el R. P. Don Guido Alfani, S. P., Director del Observatorio Ximeniano de Florencia; el profesor Dr. E. Rudolph, Secretario de la Oficina Central de la Asociación Internacional Sismológica, hoy en Estrasburgo, etc., y, muy en particular, el estudio del magnífico álbum de este último, referente al terremoto de Valparaíso, que puede servir de criterio inapelable para juzgar los distintos instrumentos en los terremotos muy lejanos y violentos, lo mismo que el del Profesor F. Omori, acerca del terremoto de Kangra (Abril 1905), respecto de no pocos sismógrafos.

Nuestro estudio, mucho más modesto que el del Dr. Ehlert, se limita á tratar de los instrumentos hoy usados y reconocidos como más ó menos útiles, concretándose á aprovechar el no escaso material allegado para nuestra instrucción personal, recogiendo y entresacando *lo práctico*, prefiriendo esta labor á hacinar datos sobre datos, tarea expuesta á lamentables equivocaciones.

En todas partes se instalan ahora nuevas estaciones sís-

micas, y el público en general comienza á interesarse en tales estudios; acaso por eso quizá sirvan de algo estos apuntes y exciten á otros para mayores empresas.

I

SISMÓGRAFOS

Sistemas pendulares.—Observaciones acerca de su teoría. Registro mecánico.

Los sismógrafos, de σείμος (terremoto), y γράφω (dibujo, escribo), son instrumentos destinados á representar gráficamente, y con la mayor fidelidad posible, los movimientos de la tierra, inscribiéndolos, ya directamente, por medio de un estilete sobre el papel ennegrecido ó con tinta sobre papel ordinario, ya utilizando la acción química que ejercen sobre el papel sensibilizado los rayos luminosos, procedentes de un foco desviado por el suelo, al agitarse, de su posición normal.

El primer método de registro se denomina mecánico; fotográfico, el segundo.

Los instrumentos empleados para ambos, fuera de rarísimas excepciones, son péndulos, en sus tres variedades: verticales, horizontales é invertidos.

Las agitaciones registrables pueden ser perceptibles en el lugar de observación con ó sin el auxilio de instrumentos y los microsismos y macrosismos pueden, á su vez, ser débiles, fuertes y aun violentos, y los primeros tienen su foco más ó menos lejos, distando á veces 20.000 kilómetros.

Como los macrosismos, en particular los violentos, constituyen la excepción para un punto determinado ordinario, cuando no indiquemos otra cosa al describir un instrumento, corresponde á la categoría de los sensibles á los microsismos de variadas intensidades y es susceptible también de registrar algún macrosismo no muy violento.

Tres datos es preciso recoger: cuándo, de qué manera y cuánto tiempo se mueve la tierra al ser agitada por el terremoto que se estudie, y si para lo primero influye no poco el cronógrafo empleado, no por eso deja, en muchos casos, de hallarse, al igual de los otros datos, en función de la sensibilidad relativa del instrumento que trace el gráfico.

En los movimientos hay que estudiar el ritmo y la amplitud, cuando se trata de obtener medidas absolutas en lo posible.

El ritmo varía algunas décimas de segundo, rarísima vez menos, por ejemplo en las rápidas vibraciones peculiares de los terremotos locales, y más de un minuto en algunas ondas lentísimas; suele pasar de un segundo y no llegar á cincuenta, y generalmente los períodos observados son mayores en los terremotos lejanos.

Esto sirve de norma para la velocidad con que ha de moverse el receptor si se quieren tener buenos gráficos, y aun para otras condiciones del mismo péndulo, dependientes del servicio particular á que sea destinado.

Respecto de la amplitud absoluta en los terremotos que se registran ordinariamente, apenas llega y por excepción pasa alguna vez al año de dos milímetros, ó sea 2,000 μ, si consideramos el movimiento sismico producido en sentido horizontal, ó de una inclinación de 10″, si lo suponemos desviación de la vertical: en general son bastante menos enérgicos.

Como las condiciones principales que ha de cumplir un buen sismógrafo, utilizable en su calidad de único instrumento para registrar terromotos, próximos, lejanos y aun remotísimos, están admirablemente expresadas por el célebre Profesor de Sismología de la Universidad de Tokío, doctor F. Omori, será lo mejor emplear sus mismas frases, advirtiendo, sin embargo, el hecho innegable de que un péndulo tiende siempre á reproducir mejor y con mayor amplitud los movimientos cuyos períodos sean mas semejantes al suyo propio oscilatorio y así al pretender registrar el mayor nú-

mero posible de sismos en todas sus fases, convendrá emplear varios instrumentos de periodo oscilatorio muy diverso, conforme se indicará más adelante.

Además, con el *amortiguamiento* se evita, mejor que de ninguna otra manera, el accidente nada agradable de que el péndulo adquiera su propio período oscilatorio con los movimientos de la tierra, sobre todo si son algo amplios y de ritmo semejante al suyo, aunque también lo haría un largo período propio, conseguido sólo en los péndulos horizontales que es el sistema preferible en este caso.

He aquí la autorizada opinión del Profesor Omori:

«Para observar un terremoto de modo satisfactorio, es preciso tener en cuenta los dos elementos fundamentales del movimiento sísmico: *el período* y *la desviación ó amplitud.*

»De aquí el exigir, para los instrumentos destinados á las observaciones internacionales de terremotos, las tres condiciones siguientes:

»1.ª El mecanismo motor del receptor ha de ser lo suficientemente rápido para poder medir el período de las diferentes ondas.

»2.ª El llamado *punto fijo (masa estacionaria)* de un sismógrafo, ha de buscar lo más pronto posible su equilibrio neutral, y su período oscilatorio será lo suficientemente largo para que se distingan los movimientos reales del terremoto y los propios del instrumento.

»3.ª Deben reducirse al mínimo los rozamientos entre las diversas partes del aparato.

»Realizadas tales condiciones, los datos obtenidos con diversos aparatos serán comparables y no será indispensable usarlos iguales en todas las partes del mundo.

»Entre los sismólogos es harto frecuente, por desgracia, el tener excesiva confianza en sus instrumentos é ignorar la posible existencia de las oscilaciones propias del *punto fijo.* Si se pudiese eliminar esta causa de error, la interpre-

tación de los sismogramas se simplificaría extraordinariamente» (*).

Son de dos clases los movimientos registrables: á una de ellas corresponden los primeros que se transmiten, en general de período muy corto, en los cuales la masa del instrumento permanece casi inmóvil, y de aquí proviene el nombre de punto fijo, *steady point*, que le dan los sismólogos ingleses y japoneses, porque vibra solamente en unión del receptor y del aparato multiplicador, á no ser que el período propio del péndulo sea también muy pequeño; en la otra están los que constituyen la parte principal del sismo, la *Hauptphase* de los alemanes, cuando la masa pendular adquiere franco movimiento.

En general la amplitud de los primeros depende exclusivamente del aumento dado al movimiento peculiar de la tierra por las palancas multiplicadoras, distancia del foco luminoso, etc., según el sistema de registro empleado; es por consiguiente función directa del aumento que pudiéramos llamar externo, é independiente de la longitud pendular en este caso, á no ser que se trate de un péndulo de escasa longitud relativa.

En los segundos, las desviaciones inscritas en los gráficos son resultado del producto del aumento externo por un factor en función del período propio del péndulo, del peculiar del movimiento que se analiza, así como del coeficiente del apagamiento ó amortiguamiento, cuando existe. En ambos influye también el rozamiento, en mayor cantidad cuando el péndulo carece de sistema amortiguador.

Más adelante están las fórmulas que relacionan todos estos factores; aquí bastará recordar lo antes apuntado: un péndulo registra los movimientos con tanta mayor amplitud, á igualdad de aumento externo, etc., cuanto más se aseme-

---

(*) *Publications of the Earthquake Investigation Committee in F. L.*, N.° 5, Tokyo 1901.

jen los períodos de aquéllos con los suyos, en particular suponiéndolo sin amortiguamiento, y, por el contrario, registra tanto mejor los períodos verdaderos del movimiento, cuanto más se diferencian sus ritmos del que le es propio.

Omítese la todavía reñida discusión, aquí fuera de lugar, relativa á si los movimientos sísmicos consisten en desviaciones de la vertical ó en desplazamientos laterales.

De lo apuntado se deduce la conveniencia de gran aumento y también de un período oscilatorio adecuado para obtener el mayor número posible de buenos gráficos.

Sin embargo, en los países de terremotos frecuentes y alguna vez violentos, conviene tener, además de instrumentos muy sensibles, utilizables en los casos generales, otros de muy moderada amplificación, utilísimos para los movimientos próximos algo fuertes, que los primeros registrarían mal.

Si se emplea sistema mecánico, han de producirse rozamientos nada despreciables al pretender conseguir aumento considerable, sin el cual se perderían no pocos de los movimientos sísmicos, dada la pequeñez de muchos de ellos.

Proviene de aquí la necesidad de recurrir á *masas*, que son pesas de fundición, de plomo, trozos de piedra labrada, etc., á cada punto más considerables, lo cual ocasiona serios inconvenientes, causados muchas veces por no permanecer constantes las relaciones entre la elasticidad del alambre que sostiene un peso determinado, el de diámetro que corresponda á otro peso cuatro veces mayor, y la fuerza necesaria para desviar dicha masa, rigurosamente proporcional á aquél... la resistencia de las puntas al aplastamiento y de los puntos de apoyo al rayado ó ensanchamiento, etc., etc., factores de enorme importancia práctica, al igual del equilibrado de agujas y palancas multiplicadoras, sus conexiones con la masa, etc., motivos para que no sea tan fácil como á primera vista parece construir un buen aparato que satisfaga las múltiples condiciones ahora requeridas.

En determinados péndulos fotográficos el aumento exter-

no puede alcanzar considerables proporciones, alejando, á la vez, el foco luminoso y el cilindro receptor, y llegar á límites extremados conexionando el espejo y un sistema multiplicador, con notoria ventaja por cuanto no se introducen nuevos frotamientos en el aparato, que exige esmerada construcción y exquisita vigilancia.

La velocidad del movimiento del cilindro registrador, muchas veces no tan considerada como se ha menester, debe relacionarse con el aumento externo del aparato, con su sensibilidad y con el fin á que sea destinado.

Para estudiar bien un sismograma, si es indispensable poder determinar el período de sus diferentes movimientos, no es menos necesario el distinguirlos bien. En instrumentos poco sensibles, ó á lo menos de poco aumento externo, y cuando los movimientos tienen escasa amplitud, son mucho más fáciles de observar y se estudian con fruto empleando pequeñas velocidades (30 á 45 centímetros por hora), de preferencia á las superiores y exageradas.

Con las últimas, el rozamiento aumenta cuanto disminuye la sensibilidad del péndulo, á la par que los movimientos, de período no muy rápido, á no ser muy amplios, se presentan como curvas muy aplastadas de difícil estudio y observación.

Excepcionalmente es inferior de medio segundo el período de los movimientos más rápidos, y en buenos gráficos, inscriptos sobre el papel ennegrecido, se observan muy bien las dos décimas y aun la décima de milímetro, y basta en ellos la velocidad normal de 90 centímetros por hora: la de 60 parece ya suficiente. En algunos casos, por ejemplo, en los instrumentos destinados al estudio especial de los terremotos de cercano epicentro y en los dotados de extraordinario aumento, pudiera convenir mayor rapidez que, si es continua y llega á algunos metros por hora, obliga á estudiar larguísimas bandas cuajadas de líneas muy unidas y, en general, rectas, sin nada utilizable, sobre todo si el au-

mento y la longitud pendular son escasos. Pudiera ser esto argumento en favor de la doble velocidad, tan preconizada por el Dr. G. Agamennone (*), y que consiste en hacer que se mueva el aparato registrador con velocidad moderada y constante (60 centímetros por hora, por ejemplo), hasta que uno ó varios sismoscopios, cierren un circuito eléctrico al ser agitados por las ondas sísmicas y pongan en libertad otro motor auxiliar ó algún escape que aumente dicha velocidad hasta hacerla de varios metros por hora.

A pesar de los esfuerzos de su ilustre autor, el mecanismo, que para ser aprovechable requiere péndulos y sismoscopios de sensibilidad exquisita, sólo se emplea en los instrumentos de su invención y en alguno que otro raro modelo (**).

Tampoco son muy corrientes los receptores de gran velocidad continua, como el del gran péndulo Wiechert, de 3,60 metros por hora y de 6 los Cancani: la primera de estas velocidades se considera hoy más que suficiente, por lo menos en tanto no se construyan instrumentos todavía más sensibles.

Tocante á los instrumentos de registro óptico, como es muy difícil que el grueso del trazo sea menor de un milímetro, parece recomendable el empleo de considerables velocidades para inscribir ciertos movimientos cercanos, á lo cual se oponen el excesivo coste del papel sensible y de los potentes focos de luz que serían necesarios, como arco voltaico ó lámpara Nerst. Así no se pasa todavía de 90 centímetros por hora; con 60 ya se logran gráficos muy aceptables, y hasta á veces con 30 ó 36, aunque en este último caso no se puedan diferenciar bien unos de otros los movimientos de

(*) Sulla convenienza di un'alta velocità nelle registrazione sismiche - *Bolletino della Societa Sismologica Italiana*, VIII, 131.—Contro alcune obiezione alla registrazione sismica a due velocità, ibíd. VIII, 143.

(**) Uno de los motores de la Estación Sismológica de Cartuja pertenece á este tipo.

escaso período, cuya distinción aparece en ocasiones imposible.

Resultan insuficientes las velocidades de 4, 6, 12 y aun de 18 centímetros por hora, peculiares, en particular la segunda, de no pocos péndulos fotográficos y es de suerte que los movimientos se confunden unos con otros, siendo imposible separarlos, y la misma determinación del tiempo en que se sucedieron las distintas porciones ó fases del sismo es muy insegura, alcanzando el error probable hasta diez ó más segundos con la primera velocidad indicada.

La longitud pendular, necesariamente limitada en los péndulos verticales ú ordinarios, alcanza en los *horizontales* ó *cónicos* considerables proporciones en muchos casos, ocupando el término medio entre ambos los péndulos invertidos.

Suele admitirse como dato para juzgar la *sensibilidad* de un sismógrafo, la dimensión que alcanza en sus gráficos una desviación de la vertical de 1″, ó sea el $\frac{1}{206{,}164'8}$ de la longitud correspondiente al péndulo, multiplicada por el aumento externo de su sistema amplificador (*).

Puede admitirse con suficiente aproximación que cada segundo de arco mide, en los gráficos, cinco milímetros por kilómetro correspondiente de longitud pendular.

Como la longitud equivalente de un péndulo se halla íntimamente ligada con su período y su aumento, para que alcance proporción suficiente es necesario que sean éstos considerables, dependiendo el valor relativo de ambos de las condiciones propias de los aparatos, y el último, en los de registro mecánico, del peso de la masa.

Los períodos suelen computarse dobles, entendiendo por oscilación completa la que ejecuta el péndulo, previamente

---

(*) Prof. Dr. Wiechert, Prinzipien für die Beurteilung de Wirksamkeit von Seismographen, in Verhandl, der erste seismologische Konferenz, S. 265.

desvíado de la vertical, al volver casi al punto de partida. Bastará recordar la fórmula que relaciona la longitud de un péndulo en función de su período propio oscilatorio y de la aceleración de la gravedad. Llamando L á la longitud y T al doble período:

$$L = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}};$$

como en el sistema decimal, π^2 y g se diferencian poco, entrambas fórmulas se pueden simplificar y resulta

$$L = \frac{T^2}{4}; \quad T = 2\sqrt{L};$$

esto es: *la longitud equivalente de un péndulo en metros* (sin aparato multiplicador), *es igual al cuadrado de la mitad de su período oscilatorio completo expresado en segundos, libre,* ó sea, desprovisto de amortiguamiento, que lo disminuye siempre. Por lo tanto, *el período completo de un péndulo es igual al duplo de la raíz cuadrada de su longitud pendular.*

En los péndulos verticales se puede conocer esta longitud, midiéndola directamente desde el punto de suspensión hasta el centro de gravedad de la masa. En los demás hay que hacer oscilar el péndulo, suprimido el amortiguamiento, ó siquiera reducido á cantidad insignificante, y contar cierto número de oscilaciones, diez ó veinte, valiéndose, á ser posible, de un pequeño cronógrafo (*). Pudieran medirse también las oscilaciones en los gráficos, pero el resultado no es tan exacto.

Respecto de la longitud total, de cuyo dato y de la longitud pendular se obtiene, por simple división, el aumento

(*) Empleamos con dicho objeto uno de la acreditada casa *E. Leybold's Nachfolger*, de Colonia, del módico precio de 30 francos.

externo, se deduce, en los péndulos de gran masa, aplicando el conocido principio que para desviar cualquiera masa un ángulo determinado es preciso ejercer una tracción igual al peso de ella multiplicado por el seno del ángulo de desviación, en el caso de aplicarla del modo más favorable: $P = M$ sen α; de donde, haciendo $M = 1$ kilg. $\alpha = 1''$, se infiere, que la pesita P habrá de pesar 4,61 miligramos ó 4,7 dinas. En la práctica, y con péndulos no muy sensibles, puede ser útil el empleo de pesas capaces de producir desviaciones de 5 ó más segundos, ó sea de 2 á 10 centigramos por kilogramo de masa.

Aunque el sistema es aplicable á medir el aumento en un péndulo vertical, obteniendo sucesivamente el de cada componente, es preferible conseguir el de ambas en una sola operación, colocando la pesita de modo que forme un ángulo de 45° con las componentes, y dividiendo por 0,707 = cos 45° cada una de las cantidades medidas en los gráficos.

Para los péndulos verticales, cuya longitud total es pequeña, conviene emplear pesas de uno á dos decigramos por kilogramo, 10 á 20 gramos por 100 kilogramos, prefiriendo obtener desviaciones considerables, porque los errores de medida son menos sensibles.

No excluye lo anterior la conveniencia de averiguar también el aumento externo en las amplitudes medianas y mínimas, sobre todo en aquéllos instrumentos de rápida relación entre el brazo largo de las palancas amplificadoras y el corto, que aumenta con la amplitud, disminuyendo con ella la verdadera multiplicación del movimiento que se analice.

En los péndulos Agamennone y Vicentini el aumento puede deducirse haciendo girar determinado espacio un tornillo de paso conocido y con cabeza dividida, y midiendo en los gráficos, directamente, el número de milímetros, etc., de la desviación. Dividiendo esta medida por la desviación real producida por el tornillo, situado de modo que actúe sobre el centro de la masa, se obtiene el aumento externo, que mul-

tiplicado por la longitud del péndulo, deducida empleando el cronógrafo ó por medición directa, da la longitud total.

Para el péndulo astático Wiechert puede utilizarse la fórmula de este célebre profesor y también la del Doctor C. Mainka, sismólogo encargado de los aparatos en la Estación Sismológica central de Estrasburgo.

Conforme á ella, si llamamos L á la longitud total, d á la desviación de la aguja, M á la masa del péndulo, A á la distancia del centro de gravedad al punto de suspensión ó altura, p al pequeño peso añadido y s á la separación que existe entre el peso adicional y la vertical que pase por el centro de gravedad, tendremos:

$$L = \frac{d.M.A}{p.s.\cos 45^\circ}.$$

En los péndulos fotográficos puede adoptarse el procedimiento del profesor Milne, en cuyo aparato el tornillo posterior de su pie lleva un índice del cual 1° equivale á una inclinación de 1″. Basta, por lo tanto, hacerlo girar 1 ó 2-3° y observar la desviación de la línea, y midiéndola en milímetros, dividiendo luego la cantidad obtenida por el número de grados, se halla el valor de la inclinación de 1″.

En los péndulos del tipo Rebeur es preferible determinar, por separado, el aumento y la longitud pendular: ésta averiguando el período con el cronógrafo; aquél, midiendo la distancia del centro de gravedad de la masa al punto de apoyo ó al centro de la línea que los une y dividiendo por la medida obtenida la suma de las distancias entre la rendija de la lámpara y el espejo, y entre éste y el cilindro registrador.

También es aplicable el sistema al aumento de los péndulos de registro mecánico, determinando la relación de los brazos de palanca, pero no siendo esto siempre posible, á ejemplo del péndulo de Mainka, el resultado obtenido no es tan exacto.

Obliga la pequeñísima intensidad de las fuerzas que ordinariamente han de actuar sobre los sismógrafos á suprimir por completo los rozamientos en el sistema inscriptor, conforme acontece en los péndulos fotográficos, disminuyendo á la vez, todo lo posible, los otros frotamientos inherentes á todos, empleando resortes, puntas de acero ó iridio y puntos de apoyo de ágata ó zafiro, admiràblemente tallados, ó reduciéndolos al mínimo, á la vez que se adiciona el peso de la masa con relación al aumento y también al período, de manera que tenga suficiente fuerza para arrastrar el aparato multiplicador, no sólo en las grandes agitaciones, cuando todos los instrumentos del mundo, con raras excepciones, registran mejor ó peor, sino también en las pequeñas, y esto exige muy esmerada construcción, teniendo en cuenta los diferentes factores.

Alguna vez pudiera variar espontaneamente el periodo en los péndulos horizontales ó invertidos y el accidente, no es raro en algunos, los Milne por ejemplo; así conviene medirlo de cuando en cuando. Sin embargo, no parece obstáculo á la buena marcha de los aparatos y el Profesor Omori cita el caso de permanecer uno de los suyos más de dos años sin alteraciones.

En general, convienen mucho los péndulos de largo período, sobre todo cuando no tienen amortiguador, mas no se ha de olvidar que, llegado cierto límite, tanto más lejano, en igualdad de circunstancias, cuanto mejor es el aparato, éste se hace *lábil*, quedándose desviado y sin fuerza suficiente para volver á su punto de reposo, grave defecto que lo inutilizaría completamente, si no disminuyésemos su periodo, haciendo de manera que le sobre fuerza para recobrar aquella posición.

Ya indicaremos, en lugar oportuno, algunos de los períodos que sismólogos tan eminentes como el Profesor Rudolph juzgan más apropiados para los diferentes instrumentos que, á ser posible, deben poseer las estaciones de primer orden.

En cuanto á los aumentos, bastará apuntar que los inferiores de 20 veces, fuera de países excesivamente agitados, tiénense ahora por insuficientes. Conviene llegar siquiera de 50 á 100. Este último aumento, ymejor aún el de 150 á 300, bien *soportados*, son hoy el máximo deseable, fuera de algunos casos especiales.

No todo consiste en que un péndulo tenga buen receptor, suficiente período y gran aumento. Es preciso que pueda aprovechar estas buenas cualidades.

Por eso importa tanto que el factor *rozamiento* sea todo lo pequeño posible. Para disminuirlo, salvo alguna rarísima excepción, todo el mundo está conforme en la necesidad de emplear en los péndulos de registro mecánico el papel cucubierto de un barniz brillante é impermeable blanco *(carta laccata*, de los italianos), ó el de cartas glaseado y translúcido (como lo emplea el Profesor Wiechert), etc., ennegrecido, ahumado con una lámpara de petróleo, de gas, etc., etc., y sobre el cual inscribe los movimientos una finísima aguja hueca de vidrio, un alambre ó lámina de aluminio, acero, etc. La tinta de anilina produce sobre el papel blanco trazos mucho más gruesos, y la presión de un depósito de tinta es incomparablemente mayor que la del estilete indicado.

El rozamiento, cuyo valor, apreciado en milímetros, se suele expresar por la letra $r = Reibung$ y se averigua midiendo con la misma unidad y fracciones, por ejemplo, la longitud de una oscilación pendular, y la siguiente; se resta la segunda de la primera y se divide por 4 el resto, siendo el cociente el rozamiento expresado en milímetros. La fórmula es:

$$r = \frac{lo - l\,n}{4\,n}.$$

La importancia del rozamiento es considerable: en los péndulos fotográficos usuales es tan exiguo que resulta despreciable, y crece en los de registro mecánico en razón directa

del aumento y de la raíz cuadrada del período é inversa del peso de la masa, relacionada con los otros factores y las perfecciones de la construcción, instalación y no poco con el cuidado del aparato. Su valor es bastante variable, según el tipo del péndulo etc.; así, mientras en los Stiattesi es fácil conseguir que no exceda de 0,25 á 0,30 milímetros á lo sumo, en otros, no inferiores en calidad, los *Wiechert astáticos*, llega á pasar de 1 milímetro. Verdad es que éstos suelen aumentar de 130 á 300 veces, con masa de un millar de kilogramos, mientras que el modelo mediano de aquéllos no pasan de 25, 30, para la cuarta parte de masa (*). De todos modos parece existir un límite, y por lo que demuestran los boletines y la práctica, un Wiechert con 2 milímetros de *r* comienza á funcionar bastante mal, lo mismo que un Omori con 1,5 milímetros y un Stiattesi con 0,5 si su aumento no excede de 25 veces, tratándose de períodos que no pasen de 20 segundos en los últimos.

Influye sobre manera en el rozamiento la relación entre la masa, el aumento y el peso de la aguja, que precisa ser equilibrada cuidadosamente, por medio de un pequeño contrapeso, que pueda correrse, ó agregando fragmentos de cera, etc., de modo que la presión ejercida sobre el papel ennegrecido no llegue nunca á un miligramo, bastando que alcance la mitad, y se consigue una presión conveniente. En el caso de ser demasiado pequeña marca una serie de puntos y no línea contínua, y si es negativa, se corre el riesgo de que se levante la aguja por sí sola, siendo como debe libre su juego sobre el eje.

El Profesor C. H. Marvin, del *Weather Bureau* de los Estados Unidos, ha ideado y publicado en los *Monthly Notices* del mismo una pequeña romana destinada para pesar las

---

(*) Además, lo dicho es más aparente que real y excede de la cifra verdadera, porque no se puede suprimir en absoluto el amortiguamiento en estos péndulos, aunque se abran las llaves de los cilindros.

agujas, resultando un accesorio fácil de construir y muy cómodo (*).

Con objeto de comprobar el valor del rozamiento de un sismógrafo, suelen recomendar que el cilindro registrador se mueva lo más lentamente posible. No creemos muy práctico el sistema; este factor crece con el aumento de la velocidad, y parece natural medirlo en las mismas condiciones adoptadas para el uso del aparato, fuera de los casos de extremada rapidez, en los cuales el error de las medidas del sinusoide aplastado, figura en que llegan á inscribirse las ondulaciones pendulares, haría inútil semejante determinación.

No carece de influencia el período del péndulo, según queda indicado. Siendo muy rápido, como en los verticales, por ejemplo, el rozamiento resulta menor. Por eso, queriendo comparar dos péndulos en semejante respecto, se debería reducirlos, de ser posible, al mismo período, ó indicar la división del de cada uno por el cuadrado del número de segundos del suyo propio.

En algunos péndulos italianos se expresa el rozamiento por el que apellidan coeficiente de *smorzamento*, obtenido mediante la siguiente fórmula:

$$\mu = \sqrt[n-1]{\frac{\theta_n}{\theta_1}},$$

en la cual θ_1 y θ_n representan la amplitud de las oscilaciones de la masa pendular en dos de ellas, la primera y la última de n sucesivas (**).

Accesorios á cada punto más importantes, hasta considerarlos casi indispensables, son los amortiguadores ó apaga-

(*) *Improvements in Seismographs.....* in vol. XXXIV, núm. 5, May 1906.

(**) Dr. Giulio Pacher. *I microsismografi dell' Istituto di Fisica della R. Universitá di Padova*, p. 50.

dores, destinados á evitar que el péndulo recobre su propio período oscilatorio cuando sea análogo al del sismo, que lo transformaría, más que en otra cosa, en un sismoscopio, según la justa expresión del Dr. Agamennone, quien ya en 1890 reconocía la conveniencia de emplear algún medio, por ejemplo, la inmersíón de la masa dentro de un líquido, para evitar este defecto, tan reprochado á los sistemas pendulares (*). Sin embargo, casi ningún instrumento, no siendo los alemanes, funciona hoy con amortiguador, y en Italia, donde parece se inició tan feliz idea, sólo hay un Vicentini que lo tiene; el Dr. Mainka (**) lo cree de aceite, pero todavía no lo ha sido descrito por el Profesor paduano (***).

Los apagadores de aire, que idearon los Profesores Hecker, Wiechert y el Dr. Mainka, consisten en una ó varias laminillas y también émbolos, de mayores ó menores dimensiones, que se mueven, al moverse el péndulo, dentro de recipientes, rectangulares en los dos primeros casos y cilíndricos en el último, cuyo movimiento es como el de una máquina de vapor, comprimiendo el aire al funcionar; el sistema es análogo en los otros mecanismos. Así se consigue introducir un obstáculo al libre oscilar del péndulo; pero no á sus desviaciones cuando se mueve la tierra, que al agitar el péndulo actúa también sobre el apagador, cilindro receptor, etcétera, etc.

Siendo considerable el peso de la masa, el apagador debe ser muy grande, sus ajustes perfectos y muy pequeño, décimas de milímetro, el *viento* ó espacio libre entre el émbolo y el inteiror del cilindro, caja, etc., que lo contenga.

(*) Il terremoto a Roma del 23 Febbraio 1890 e il sismometrografo Brassart in *Ann. dell'Uff. Centr. Met. e Geod. Ital.*, Parte 4.ª, Volumen X, 1888, p. 47.

(**) *Kurze Uebersicht über die modernen Erdbeben-Instrumente* (1907), S. 22.

(***) *Bolletino mensile... dei microsismografi dell'Istituto di Fisica della R. U. di Padova*, 1907, n.° 6, p. 758.

Con objeto de regular y aun suprimir el apagamiento, debe existir en estos una llave ú otro mecanismo.

Es mucho más fácil construir apagadores ó amortiguadores de aceite de vaselina, por ejemplo, ó de otro líquido cuya fluidez no cambie notablemente con las variaciones de la temperatura ambiente.

Una ó varias láminas metálicas rectangulares sumergidas en un recipiente, de cuyas paredes laterales no se separen mucho, conteniendo más ó menos vaselina líquida, constituye un amortiguador facilísimo de montar (*) y cuyos resultados son en extremo satisfactorios.

El amortiguamiento se designa con la letra griega ε, y se obtiene, en los péndulos fotográficos, midiendo la amplitud de dos movimientos sucesivos, y dividiendo el primero por el segundo: $\varepsilon = \frac{l_0}{l_1}$.

Esta fórmula no resulta cierta para los péndulos de registro mecánico, en particular si el rozamiento es considerable. Entonces hay que emplear estotra: $\varepsilon = \frac{l_0 - 2r}{l_1 + 2r}$, y se expresa así el resultado obtenido, por ejemplo: $1 = 3{,}2$, ó simplemente: $\varepsilon = 3{,}2$.

Los índices de amortiguamiento más corrientes oscilan entre 2,5 y 6 ó 7, y más generalmente de 3 á 5.

Adaptar un pequeño péndulo invertido, cuyo período y masa se diferencian mucho del gran péndulo, constituye un razonable amortiguador, aunque sus resultados sean bastante inferiores á los citados. Esta idea, debida al Profesor Ewing, y desarrollada por el Profesor Milne, se ha puesto en prác-

---

(*) A un péndulo Omori de 106 kilogramos, construído en Cartuja, bastó adaptarle un trozo de hojalata de 15 × 10 cms., dentro de una caja doble de *sinapismos*, llena del citado líquido, para obtener fácilmente amortiguamientos regulables de casi 1:1 hasta 6,9:1 y más, lo que hicimos siguiendo los consejos del Profesor E. Rudoph y del Dr. Mainka.

tica no ha mucho por el Profesor Omori (*), quien lo ha adoptado á sus péndulos portátiles, incomparablemente más sensibles que los ya anticuados de los célebres sismólogos antes citados.

También se han empleado como amortiguadores los imanes y electroimanes; su uso no se ha extendido gran cosa y tampoco parecen superar á los de aire y á los de líquidos.

Conviene tratar ahora del aumento verdadero de los sismógrafos respecto de un movimiento de determinado período, antes sólo apuntado en general, y para agitaciones que lo tuviesen muy inferior al propio del instrumento. Así resaltarán mejor las innegables ventajas del apagador.

La fórmula que expresa el aumento real de un movimiento sísmico en función del aparente (**) y de los períodos del mismo y del péndulo, es:

$$A_r = -a \frac{1}{1 - \frac{T^2}{T_0^2}} \text{ (***)},$$

de la cual deducimos que si el movimiento tiene un período muy pequeño en relación con el del péndulo, el aumento real se diferencia muy poco del exterior, medido por cualquiera de los métodos citados, aumentando cuando éste crece, hasta el límite $T^2 = T_0^2$, en cuyo caso $Ar = \infty$, si no lo evitase el rozamiento, etc., y disminuyendo cuando $T^2 > T_0^2$.

Con ello se demuestra, á la par, la conveniencia de que el período de los péndulos coincida, lo más posible, con el

---

(*) *Dutton Earthquakes....* figuras 8-11, páginas 75-79.

(**) A Duplex Horizontal Pendulum Apparatus, in *Publ. of the E. I. C.*, núm. 18, páginas 1-3, Pl. 1-11 (Tókyó, 1904).

(***) $U_r = -V \frac{1}{1 - \frac{T^2}{T^2}}$, Prof. Wiechert, in *Prinzipien.....* S. 277.

de los movimientos que hayan de estudiarse, atendiendo á obtener el mayor número de gráficos posible, y lo falsos que son, por decirlo así, los trazados en estas circunstancias y sin apagamiento, por ser la multiplicación con que fueron inscriptos en algunos casos hasta inconmensurable.

Empleando el amortiguamiento en los péndulos, se observa al punto que, cuanto más intenso, menos influye la relación entre el período propio pendular y el del movimiento, notándose que á la vez decrece el aumento del péndulo en las porciones del período más semejante.

Sirva de ejemplo un fragmento de la tabla de reducciones del aumento del péndulo fotográfico del célebre Profesor Dr. Hecker, de Potsdam.

En este sensibilísimo instrumento, con $\varepsilon = 2{,}5$ — 18^s de período y aumento aparente de 36 veces el correspondiente á un movimiento de 5^s de período, ascendía á 39; para 15^s, era de 66, y para 35^s de 11, mientras que con $\varepsilon = 7{,}5$ y las demás condiciones idénticas, corresponden á los períodos de 5, 15 y 35^s, antes citados, 37 — 37 — 8 veces de aumento (*).

La fórmula del Profesor Wiechert, que permite deducir el factor por el que se ha de multiplicar el aumento aparente para obtener el verdadero, es la siguiente:

$$\left(\left[1 - \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 \right]^2 - \frac{4(0{,}733 \log \varepsilon)^2}{1 - (0{,}733 \log \varepsilon)^2} \cdot \left[\frac{T}{T_0} \right]^2 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Y las que dan la relación entre el período reducido del péndulo, ó sea el propio, provisto de amortiguador, y el que tenía sin él, único medible con exactitud, son, llamando $T_0{}^*$

(*) *Seismometrische Beobachtungen in Potsdam (1906)*, Berlín, 1907, S. 3.

al período del péndulo libre y T_0' al del mismo provisto de su amortiguador, y τ á la relación entre ambos,

$$T_0^* / 2\tau = \log \text{nat}\, \varepsilon; \quad T'_0 = T_0^* / \sqrt{1 + \left(\frac{T^*}{2\pi\tau}\right)^2}.$$

También puede deducirse el aumento en función del período del péndulo reducido y el del ritmo, por medio de la ecuación:

$$A_r = a / \sqrt{\left[\left(1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)\right]^2 + 4\left(\frac{T}{2\pi\tau}\right)^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^2} \text{ (*)}.$$

PUBLICACIONES RECIBIDAS DESDE 1.° DE JULIO DE 1907

(Continuación.)

Institucio Catalana d'Historia Natural.—Butlleti de la..... Any 4 art., números 5 á 7 —Barcelona, 1907.

Sociedad general Azucarera de España. — Memoria para la Junta general ordinaria de Accionistas de la..... que se ha de reunir el dia 30 de Noviembre de 1907.—Madrid, 1907.

Observatorio del Ebro. — Estudio de una reciente perturbación cósmica registrada en el .... por los P. P. Cirera y Balcells, S. J.

El Libro. - Organo de la Asociación Nacional del Profesorado.—Año II, número 7. Buenos Aires, 1907.

Instituto de Reformas Sociales.—Legislación del Trabajo.— Apéndice segundo.—Julio 1906.—Junio 1907.—Legislación. Proyectos de Reforma. Madrid, 1907.

Memorial de Ingenieros del Ejército.—Tomo 24, núm XI (Noviembre 1907). Madrid, 1907.

La Naturaleza.—Revista de Ciencias é Industrias.—Tomo 13, núm. 21.— Madrid, 1907.

(*) Prof. Wiechert, *Prinzipien*..... S. 277.

Muñoz del Castillo (Dr. José).—Segunda nota sobre la Radiactividad de las Aguas Lerez ¿*El Galaicum*, nuevo elemento radiactivo?, por el Dr..... Madrid, 1907.

Universidad de la Habana. - Revista de la Facultad de Letras y Ciencias.—Vol. V, núm. 2.

Murua y Valerdi (Dr. Agustín).—Momentos de la investigación original y examen, con tal motivo, de la Organización del Doctorado en las Universidades Alemanas, y de las modificaciones que en dicho período de nuestras facultades de Ciencias experimentales y especialmente Químicas deben introducirse. Memoria presentada al Gobierno de S. M.—Barcelona, 1907.

Observatorio de Marina de San Fernando.—Carta fotográfica del Cielo.—Zona 9.ª, hojas núms. 21 22 23-40 44-54-55-63 64-65-66 69-79-82-85-105-111-145 157 y 175.—San Fernando.

Bibliografía Española.—Organo oficial de la Asociación de la librería en España.—Año 7.º, núms. 21 y 22.—Madrid, 1907.

Sociedad Española de Física y Química.—Anales. Tomo V, núm. 47.—Madrid, 1907.

Real Academia de la Historia.—Boletín. Tomo 51, cuaderno 5.º.—Madrid, 1907.

Sociedad Aragonesa de Ciencias Naturales.—Boletín. Tomo 6.º, números 4-7.—Zaragoza, 1907.

Revista de Estudios Franciscanos.—Año I, núms. 10 y 11.—(Barcelona) Sarriá, 1907.

Memorial de Artillería.—Tomo IV, entrega 5.ª—Madrid, 1907.

Revista de Medicina y Farmacia.—Año III, núm. 28.—Murcia, 1907.

Sociedad Española de Hidrologia Médica.—Anales. Tomo XIX, núm. 5.—Madrid, 1907.

Comisión del Mapa Geológico de España.—Memorias. Tomo VI.—Explicación del mapa geológico de España, por D. L. Mallada.—Madrid, 1907.

Liga Marítima Española.—Boletin oficial de la... Año 7, núm. 44.—Madrid, 1907.

La Energía Eléctrica.—Revista, año 9.º, núms. 21 y 22.—Madrid, 1907.

Consejo Superior de Salubridad de San Salvador.—Boletín. Año 6, número 9.—San Salvador, 1907.

Sociedad Científica Argentina.—Anales. Tomo 63, entrega 6.ª—Tomo 64, entrega 1.ª—Buenos Aires, 1907.

Observatorio Astronomico da Universidade de Coimbra (Real).—Ephemerides Astronómicas para o anno de 1908, calculadas para o Meridiano do...—Coimbra, 1907.

Sociedad Científica «Antonio Alzate».—Memorias y Revista.—Tomo 24, número 6 á 9.—México, 1906 1907.

Revista Médica Dominicana.—Año 3.º, núms. 13 á 16.—Santo Domingo, 1907.

Universidad Central de Venezuela.— Anales de la... — Tomo 8.º, número 2.—Caracas, 1907.

Observatorio Meteorológico Magnético Central de México.— «El Servicio Meteorológico de la República Mexicana».—Monografía formada para la Exposición Universal de San Louis Missouri, por el Director del Observatorio, Ing. Manuel E. Pastrana. —México, 1906.

Escuela de Artes y oficios y de Capataces de Bilbao. — Memoria relativa al curso de 1906 á 1907, presentada por el Secretario de la Junta D. Alberto Gaminde y Alzuyeta. — Bilbao, 1907.

Sociedad Aragonesa de Ciencias Naturales. — Linneo en España. — Homenaje á Linneo en su segundo centenario, 1707-1907. — Zaragoza, 1907.

Murua y Valerdi (Dr. D. Agustín). — Sobre algunos nuevos Paranitro bencil-mercaptales y mercaptoles». — Nota química. — (Memorias de la Real Academia de Ciencias de Barcelona, — Vol. VI, núm. 21). — Barcelona, 1907.

Cortejarena (Dr. D. Francisco de). — «Algunos escritos y casos prácticos de Cirugía del Dr. Sanchez de Toca» (Curso clínico de 1855 á 1856) por...— Madrid, 1907.

García de Galdeano (Dr. Zoel). — «Algunas consideraciones sobre filosofía y enseñanza de la Matemática», por... —Zaragoza, 1907.

García de Galdeano (Dr. Zoel). — «Exposición Sumaria de las Teorías Matemáticas», por... —Zaragoza, 1907.

Vegas (Miguel). —«Tratado de Geometría Analítica», por... —Tomo II. —Segunda edición. — Madrid, 1907.

Instituto General y Técnico de Teruel. — Memoria correspondiente al curso de 1902 á 1903.—Idem íd., al curso de 1903 á 1904.—Idem íd., al curso de 1904 á 1905). (3 foll.). — Teruel.

Labra (Rafael M. de). — El Instituto de Derecho Internacional. — Madrid, 1907.

Gorria (Ilmo. Sr. D. Hermenegildo).—Los Fermentos de la tierra y la alimentación vegetal, por... — (Memorias de la Real Academia de Ciencias de Barcelona. — Vol. VI, núm. 20). — Barcelona, 1907.

Instituto Central Meteorológico. — Boletín. Hojas núms. 302 á 343. — (29 Octubre, 29 Diciembre 1907). — Madrid, 1907.

La Ilustración Española y Americana — Año 51, núms. 40 á 46.—Almanaque para el año 1908.—Madrid, 1907.

(Continuará).

XXXII. — Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia sexta.

SEÑORES:

Anunciamos, al terminar la última conferencia, que en ésta trataríamos ante todo de la deformación de cualquier superficie infinitamente pequeña, situada en la inmediación de un punto *M* del sólido elástico, rodeando ó sin rodear á dicho punto.

Es la manera más clara y más sencilla de comprender la ley de deformaciones alrededor de todos y cada uno de los puntos del cuerpo.

Si trazamos, envolviendo al punto *M*, una serie de superficies, dividiendo al espacio, por decirlo de este modo, en capas, tendremos una imagen clara y sensible de las deformaciones de dicha región, expresando para ello analítica ó geométricamente la deformación de cada una de estas capas comprendida entre dos superficies sucesivas.

Y, por lo tanto, tendremos que resolver este problema elemental: transformación ó deformación, que en este caso da lo mismo, de una superficie cuya ecuación se conozca.

Esto, suponiendo, que por los medios que más adelante explicaremos, se ha resuelto el problema de las deformaciones del sólido, ó mejor dicho, el problema de su elasticidad. Es decir, que suponemos conocidas u, v, w para cada punto en función de sus coordenadas x, y, z.

Sea *M* un punto del sólido elástico: imaginemos en la re-

gión próxima á este punto, y, por ejemplo, rodeándole, una superficie, S, cuya ecuación sea

$$F(x, y, z) = 0,$$

referida á los ejes del sistema x, y, z.

Para más sencillez, y ya que M es el punto de partida, lo

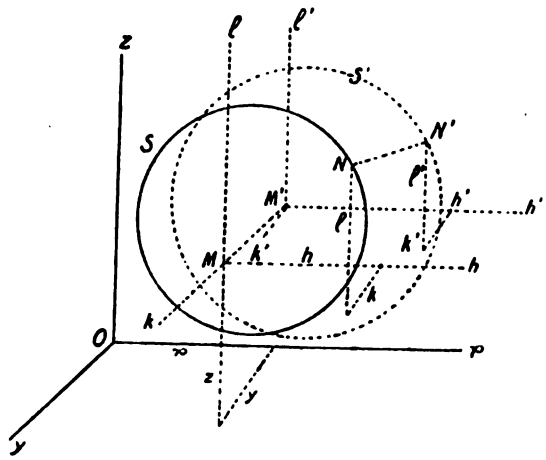


Figura 33.

tomaremos como origen de coordenadas, trazando por él tres ejes paralelos á los dados.

Un punto cualquiera, N (fig. 33), de la superficie S, tendrá por coordenadas, según las notaciones de las conferencias precedentes, h, k, l, y la ecuación de la superficie, en vez de estar expresada en función x, y, z, contendrá como variables h, k, l.

Supongamos que la ecuación de la superficie referida á estos ejes es

$$F(h, k, l) = 0.$$

El problema que vamos á resolver se reduce á lo siguiente:

El punto M, en virtud de la deformación del sistema, viene á parar á M', punto definido por las deformaciones u, v, w.

Cualquier punto de la superficie, N por ejemplo, cuyas coordenadas primitivas sean h, k, l, vendrá á parar á una posición, N', cuyas coordenadas, con relación á M' como origen, representaremos por h', k', l'.

Pues bien; se desea conocer la ecuación de la superficie deformada S' referida al origen M' y en función de las coordenadas h', k', l'.

El problema es de una sencillez extraordinaria.

Sabemos que se tiene:

$$h' = h + u' - u$$

$$k' = k + v' - v$$

$$l' = l + w' - w,$$

porque cada coordenada será lo que era al principio, más la diferencia entre los desplazamientos de sus extremos.

Ahora bien, como según decíamos en la conferencia anterior, el desplazamiento en cada punto es función de las coordenadas de este punto; las componentes del desplazamiento de N', á saber, u', v', w', serán funciones de $x + h$, $y + k$, $z + l$, que son en este caso las coordenadas de N'; y desarrollando por la serie de Taylor, *que suponemos aplicable á estas funciones*, y no tomando más que las primeras potencias de los incrementos, tendremos

$$u' = u + \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{du}{dz} l,$$

$$v' = v + \frac{dv}{dx} h + \frac{dv}{dy} k + \frac{dv}{dz} l,$$

$$w' = w + \frac{dw}{dx} h + \frac{dw}{dy} k + \frac{dw}{dz} l;$$

ó bien

$$u'-u=\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k+\frac{du}{dz}l,$$

$$v'-v=\frac{dv}{dx}h+\frac{dv}{dy}k+\frac{dv}{dz}l,$$

$$w'-w=\frac{dw}{dx}h+\frac{dw}{dy}k+\frac{dw}{dz}l,$$

en que los coeficientes que son funciones de x, y, z, serán constantes para toda la región que rodea á M.

De aquí resulta, substituyendo en los valores de h', k', l'

$$h'=\left(1+\frac{du}{dx}\right)h+\frac{du}{dy}k+\frac{du}{dz}l,$$

$$k'=\frac{dv}{dx}h+\left(1+\frac{dv}{dy}\right)k+\frac{dv}{dz}l,$$

$$l'=\frac{dw}{dx}h+\frac{dw}{dy}k+\left(1+\frac{dw}{dz}\right)l.$$

En suma: h', k', l' son funciones lineales de h, k, l, y se sabe por Algebra que, despejando h, k, l, resultarán también funciones lineales de h', k', l', que podremos representar abreviadamente de este modo:

$$h=Ah'+Bk'+Cl',$$

$$k=A'h'+B'k'+C'l',$$

$$l=A''h'+B''k'+C''l':$$

las A, B, C son constantes para la región infinitamente pequeña, que rodea al punto M.

Conocemos la ecuación de la superficie S, que es:

$$F(h, k, l)=0;$$

luego para conocer la ecuación de la superficie S', no hay más que substituir las h, k, l en función de las h', k', l' y la ecuación que resulte, que será una relación entre h', k', l', coordenadas de cualquier punto M' de la superficie deformada, será la ecuación de dicha superficie S' referida á M' como origen.

Tendremos, pues, para la ecuación de S',

$$F(Ah'+Bk'+Cl', A'h'+B'k'+C'l', A''h'+B''k'+C''l')=0.$$

Si en vez de transformar una superficie hubiéramos querido transformar una línea, es decir, buscar las ecuaciones de la línea transformada, el método hubiera sido el mismo: siempre las antiguas coordenadas se expresarían por las mismas funciones lineales de las nuevas, $h = Ah' + Bk' + Cl'$, etcétera, mientras se considere el mismo punto M' del sólido.

***

De aquí se deducen varias consecuencias importantes.

Puesto que la transformación se hace por funciones lineales, la naturaleza de la ecuación no cambia.

Si la línea es una *línea recta*, la línea deformada será *una recta* también, al menos la parte de ella comprendida en la región que se considera.

Si el sistema es un ángulo rectilíneo, en un ángulo rectilíneo se convertirá dentro de la región inmediata á M.

Si la superficie es un plano, al deformarse en la región próxima á M, continuará siendo un plano.

Si el sistema es un poliedro de caras planas, el sistema deformado será también otro poliedro de caras planas.

Si la superficie es de segundo grado, en una superficie de segundo grado se transformará.

Si la ecuación es algebraica y del grado m, conservará ambos caracteres S'.

Pero esto en la región infinitamente pequeña que rodea al punto M que estamos considerando.

Antes de pasar más adelante, séanme permitidas algunas reflexiones de carácter elemental, á fin de que los principiantes no den á éstos teoremas más extensión, ú otro sentido, que el que les corresponde.

El que por primera vez estudia estas materias, podrá pensar: «¡qué cosas tan misteriosas tiene la Naturaleza, y cómo las descubren y desentrañan las ciencias matemáticas!»

La admiración está bien, y es muy justa; pero es forzoso darle su verdadero sentido.

Supongamos que se sigue diciendo: «¿no es admirable que al deformarse una esfera, por ejemplo, se convierta *precisamente* en un elipsoide?».

No es admirable, porque no es cierto.

Fijemos bien las ideas.

Todos los resultados precedentes, y los teoremas que los sintetizan, son *resultados aproximados*, y no más que *aproximados*.

Si consideramos alrededor del punto M una esfera infinimente pequeña, esta esfera no se convierte en un elipsoide, sino en otra superficie de ecuación más complicada, aunque *se aproxime á un elipsoide;* porque no ha de olvidarse, que todos nuestros cálculos parten del desarrollo de u', v', w' por la serie de Taylor. Que en este desarrollo despreciamos los términos, desde los de segundo orden, y que por esta razón, y sólo por esta razón, las u', v', w' primero, y luego las h', k', l', son funciones lineales de h, k, l, y éstas á su vez, de h', k', l'.

Precisamente por esta circunstancia, la esfera se convierte en otra superficie de segundo orden, y las rectas continúan siendo rectas después de la deformación, y los ángulos rectilíneos, ángulos rectilíneos también.

Si llevando más allá las aproximaciones, hubiéramos tomado mayor número de términos de la serie de Taylor, nada de esto se hubiera verificado.

De suerte que los teoremas á que nos referimos *son aproximados y no más.*

Si queremos darles un sentido riguroso, debemos enunciarlos de otra manera.

Por ejemplo: tomando el de la esfera, deberíamos decir: si se determina la superficie en que se convierte una esfera infinitamente pequeña, al tender esta esfera hacia cero, la superficie deformada tiende y *se aproxima tanto como se quiera á un elipsoide.*

***

Antes de pasar adelante, debemos hacernos cargo de una observación que en la conferencia precedente hicimos.

Decíamos allí, las deformaciones alrededor de un punto M dependen de nueve constantes,

$$a_1\ a_2\ a_3,$$

$$b_1\ b_2\ b_3,$$

$$p_1\ p_2\ p_3;$$

y, sin embargo, al calcular la dilatación lineal, ó al calcular la variación de un ángulo, la variación de la recta ó la variación del ángulo sólo resultaron funciones de a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, es decir, de tres dilataciones lineales y de tres deslizamientos. En ambos cálculos, el de la recta y el del ángulo, los términos que contenían p_1, p_2, p_3, desaparecieron: estos términos se destruyeron dos á dos, y esto se repetiría en multitud de ejemplos. Mas aún, cuando calculemos más adelante las tensiones en función de las deformaciones, no tendremos en cuenta las nueve constantes, sino las seis que acabamos de indicar,

$$a_1\ a_2\ a_3,$$

$$b_1\ b_2\ b_3;$$

y de las p_1, p_2, p_3, prescindiremos por completo: mejor dicho, ellas desaparecerán en los resultados.

Circunstancia es ésta que ha de llamar la atención del principiante al estudiar cualquiera de los tratados de Elasticidad conocidos.

Al fin y al cabo, las u_1 v_1 w_1, dependientes de la p, son desplazamientos efectivos, cuya existencia hemos demostrado;

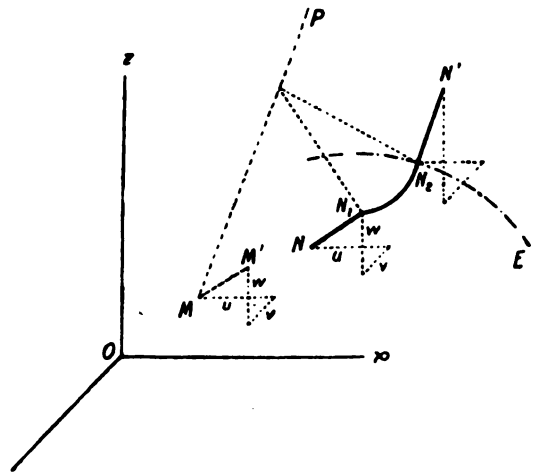


Figura 34.

¿pues cómo es, vuelvo á repetir, que prescindamos de dichas constantes y que si no prescindimos nosotros el cálculo las elimina?

La explicación es elemental. Y, sin embargo, el hecho tiene bastante importancia para que M. Poincaré lo tenga en cuenta: nosotros nos contentaremos con una sencilla observación que creemos suficiente.

Recordemos, figura 34, la descomposición de un desplazamiento cualquiera, N N', en tres desplazamientos elementales.

Dijimos que el desplazamiento NN' de un punto cual-

quiera, N, se componía: *Primero*, de un desplazamiento $N N_1$ igual y paralelo al del punto M. *Segundo*, de un giro $N_1 N_2$ alrededor de un eje $M P$ cuyas componentes eran p_1 p_2 p_3. Las componentes de este desplazamiento las designábamos por u_1, v_1, w_1. *Tercero*, de una deformación representada por el desplazamiento $N_2 N'$ normal á una determinada superficie de segundo orden E.

Pues bien, del giro $N_1 N_2$, es del que se prescinde, y si no se prescinde, se elimina por el cálculo espontáneamente, siempre que se trata de determinar *magnitudes* de las deformaciones.

Veamos ahora la razón.

Y para ello vamos ante todo á invertir el orden de los dos últimos desplazamientos, lo cual, tratándose de superposición de movimientos infinitamente pequeños, es legítimo, salvo diferencias de orden superior.

Es decir, que consideraremos primero (fig. 35) la deformación $N N_1$ igual y paralela á $M M'$ y cuyos componentes son u, v, w.

En segundo lugar, en vez de considerar la rotación, consideraremos la deformación $N_1 N_2$.

Y, por último, al sistema deformado por estos dos desplazamientos le aplicaremos la rotación $N_2 N'$.

Pero al aplicar esta rotación á toda la masa que rodea al punto M, la consideraremos como solidificada, después de haber experimentado todos los puntos los desplazamientos análogos á $N N_1$, que, dicho sea entre paréntesis, no deforma el sistema, porque es una traslación; y la deformación $N_1 N_2$ que sí lo deforma, porque se compone de normales á superficies curvas.

Al sistema que resulta y á todos los puntos del mismo como si constituyeran un cuerpo sólido, es al que aplicamos la rotación P, que está representada por $N_2 N'$.

Pero cuando un cuerpo sólido gira alrededor de un eje, todas sus rectas continúan siendo rectas y con la misma

magnitud que tenían; sus ángulos rectilíneos continúan invariables; cualquier figura sólida del interior del cuerpo continúa invariable también.

La rotación P no introduce deformación ninguna; luego en el cálculo de *las magnitudes* de las deformaciones no debe influir y por eso desaparecen siempre las constantes p_1 p_2 p_3.

Lo único que hace la rotación P es variar en conjunto la

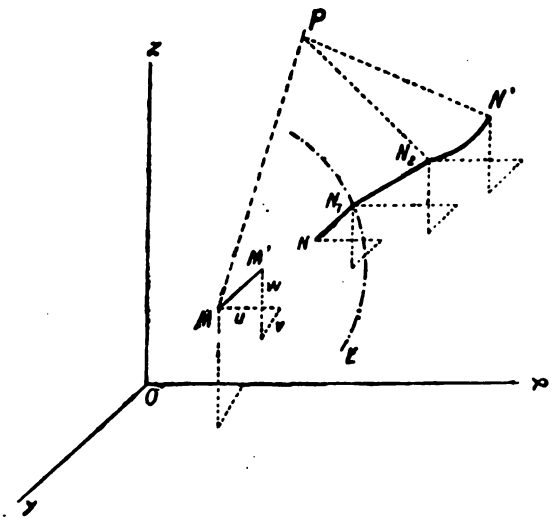


Figura 35.

figura ya deformada que rodea al punto M, separándola ángulos infinitamente pequeños de su primera posición.

Y ya tendremos ocasión de citar alguno de estos casos.

Pero como en todos los cálculos de la Elasticidad lo que nos interesa son las magnitudes de las deformaciones, por eso poquísimas veces tendremos que referirnos á las constantes p_1, p_2, p_3, y diremos, como dicen los autores, que la teoría de la Elasticidad, por el método de Lamé y sus análogos, depende tan sólo de seis constantes para cada punto,

$$a_1\ a_2\ a_3$$
$$b_1\ b_2\ b_3;$$

es decir, de tres dilataciones según los ejes, y de tres deslizamientos según los planos coordenados.

***

Pasemos ya á estudiar la SUPERFICIE DE DILATACIONES.

Consideremos (fig. 36) una recta cualquiera, *M N*, que va del punto *M* que estamos estudiando á otro punto cualquie-

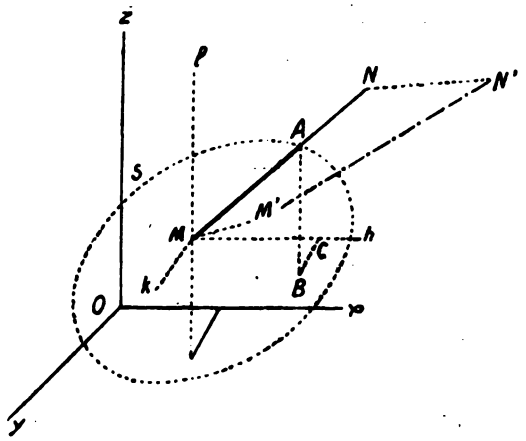


Figura 36.

ra *N*, comprendido en la región infinitamente pequeña que rodea á *M*.

Supongamos una deformación y supongamos que nos es conocida: hipótesis que estamos haciendo constantemente en el estudio de las tensiones y en el estudio de las deformaciones, como en el álgebra y en el análisis se suponen conocidas muchas cantidades aunque no se las conozca. Se las representa por letras y se busca el modo de relacionarlas entre sí, de estudiar sus propiedades, de determinar ecuaciones á que deban satisfacer: y se hace esto precisamente para determinarlas, deduciéndolas de dichas relacio-

nes. No es otra cosa lo que estamos haciendo en estas conferencias.

La recta $M\ N$ por la deformación del sistema ocupará otra posición. El punto M habrá venido á parar á M'; el punto N, á N'. Y la recta MN se habrá transformado en $M'\ N'$.

En general, no será paralela á $M\ N$ ni tendrá la misma longitud.

Y en su posición absoluta, dicho sea entre paréntesis, influirían $p_1\ p_2\ p_3$.

En lo que no influirán estas constantes será en su magnitud, ni, por lo tanto, en la diferencia $M'\ N'—MN$, ni tampoco en la relación

$$\frac{M'N' - M\,N}{MN};$$

es decir, en la *dilatación lineal.*

Obtuvimos para el valor a de esta dilatación lineal, en función de los cosenos directores,

$$a = a_1\ \alpha^2 + a_2\ \beta^2 + a_3\ \gamma^2 + 2b_1\beta\gamma + 2b_2\ \gamma\alpha + 2b_3\ \alpha\beta.$$

Tomemos sobre MN una longitud, MA, igual, numéricamente, á la relación inversa de la raíz cuadrada de a; mejor dicho, de $\pm\ a$, en la escala necesaria para que no sea confusa la figura. De modo que

$$M\,A = \frac{1}{\sqrt{\pm\ a}},$$

y advirtamos, que para todas las longitudes ó porciones de la recta MN, sea cual fuere la posición de N, como la dilatación lineal por unidad de longitud, a, será la misma, siempre obtendremos el mismo punto A.

Repitiendo este cálculo y esta construcción para todas las rectas que partan de M, las cuales se deformarán según rectas que partirán de M', tendremos una serie de puntos análogos al A, que determinarán una superficie S alrededor del punto M.

Determinemos la ecuación de esta *superficie.*

Llamando x, y, z á las coordenadas de un punto cualquiera A, de dicha superficie, estas coordenadas MC, CB, BA, serán proporcionales evidentemente á los cosenos directores de MN; es decir,

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma},$$

relación que será igual también, por la semejanza de triángulos, á

$$\frac{MA}{1},$$

ó bien á

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{\pm a}}}{1}$$

de modo que tendremos

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\pm a}}.$$

Hemos puesto el signo $\pm$ bajo el radical, como hicimos en un problema análogo al tratar de las tensiones, para evitar las cantidades imaginarias. Si a es una dilatación, será positiva y tomaremos bajo el radical el signo $+$. Si es una contracción, será negativa y habrá que tomar el signo — para que el radical sea real.

De las ecuaciones anteriores deducimos

$$\alpha = x\sqrt{\pm a},\ \beta = y\sqrt{\pm a},\ \gamma = z\sqrt{\pm a};$$

y substituyendo en la ecuación que determina a, dividiendo por a, y cambiando signos, resultará

$$\pm 1 = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2b_1 yz + 2b_2 xz + 2b_3 xy,$$

que es una ecuación de segundo grado, ó que también podrá representar dos ecuaciones si hay que tomar el signo $\pm$.

No insistimos sobre este punto, porque tendríamos que repetir lo que ya se dijo al tratar de la indicatriz de tensiones.

Supongamos que, para todas las rectas que partan de M, resulta a positiva: deberemos entonces tomar el signo $+$, y la superficie representará un elipsoide, el cual, gráficamente, nos dará la dilatación que corresponde á todas las rectas que partan de M.

No habrá más que buscar la intersección de cada recta, por ejemplo, MN, con dicho elipsoide, establecer la ecuación

$$MA = \frac{1}{\sqrt{a}};$$

y despejando, tendremos la dilatación lineal a correspondiente la dirección MN; es decir,

$$a = \frac{1}{\overline{MA}^2}$$

Pero si nos da la *dilatación* correspondiente al vector MN de que se trata, no nos da *su posición*; para determinar ésta, sería preciso determinar $M'N'$.

Por último, si para ciertas direcciones a es *positiva*, y para otras es *negativa*, habría que tomar el doble signo y tendríamos dos hiperboloides, uno de una hoja y otro de dos, ambos conjugados.

***

De la ecuación precedente se deduce una consecuencia muy importante, análoga á otra que dedujimos en el estudio de las tensiones.

Puesto que dicha ecuación representa una superficie de segundo orden, que es fija y determinada, dentro del orden de aproximación establecido, para cada punto M del sólido, claro es tendrá ejes principales, que pasarán por el origen, que es el centro; y si los ejes primitivos de sistema hubieran sido paralelos á los ejes de este elipsoide correspondiente al punto M, claro es que los rectángulos de las variables no aparecerían y hubiera tenido la ecuación la forma,

$$\pm 1 = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2.$$

Así, para este sistema de ejes,

$$b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0.$$

Pero recordemos que b_1, b_2, b_3, ó mejor dicho, $2b_1$, $2b_2$, $2b_3$, representan la variación de los ángulos rectos de los planos coordenados por virtud de la deformación; luego, en este caso, dichos ángulos rectos no varían, continúan siendo rectos. De donde se deduce este teorema importante: *para cada punto de un sólido elástico hay tres direcciones, que se llaman principales, y que constituyen un trirrectángulo; el cual, después de la deformación, continúa siendo trirrectángulo.*

Fijemos bien las ideas.

Si para un punto M (fig. 37), MA, MB, MC son las direcciones de los tres ejes del elipsoide, y suponemos siempre que de un elipsoide se trata, y los ejes que se han escogido para el sistema x, y, z son paralelos á A, B, C, la superficie de dilataciones, mejor dijéramos, de la relación niversa de la raíz cuadrada de las dilataciones, tendrán tres ejes: MA_1, MA_2, MA_3, paralelos á x, y, z, y sus longitudes serán:

$$MA_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1}}, \quad MA_2 = \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \quad MA_3 = \frac{1}{\sqrt{a_3}},$$

y la ecuación del elipsoide, que está representado, en parte, en la figura, tendrá la forma

$$+1 = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2.$$

Habrán desaparecido los rectángulos de las varia-

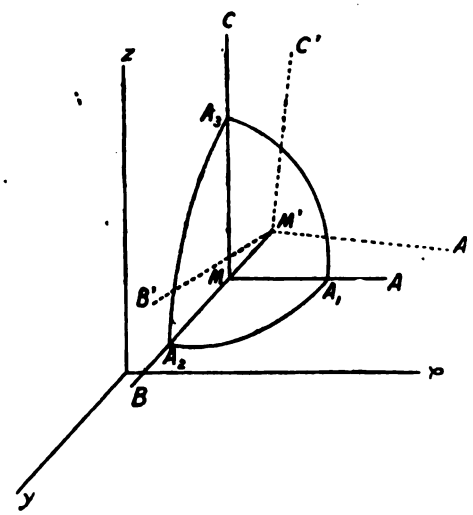


Figura 37.

bles, porque sus coeficientes serán nulos: de modo, que

$$2b_1 = 0, 2b_2 = 0, 2b_3 = 0,$$

y, por lo tanto, el ángulo AMB, al convertirse por la deformación en $A'M'B'$, continuará siendo recto.

Del mismo modo, el ángulo AMC, convertido en $A'M'C'$, será recto también. Y otro tanto podemos decir del ángulo BMC, que se transformará en otro ángulo recto, $B'M'C'$.

En suma; el trirrectángulo M se habrá convertido en el

trirrectángulo M', siendo MM' el desplazamiento ó la deformación del punto M.

Continuará siendo trirrectángulo, pero no paralelo en general, á la posición primitiva.

Las tres dilataciones a_1 a_2 a_3, se llaman dilataciones principales, y corresponden á los tres ejes de dicho elipsoide; pero en magnitud, no en posición, porque las rectas MA, MB, MC, toman las posiciones $M'A'$, $M'B'$, $M'C'$.

Para que estas dilataciones conserven el paralelismo, es preciso que no existan rotaciones, como se deduce de los

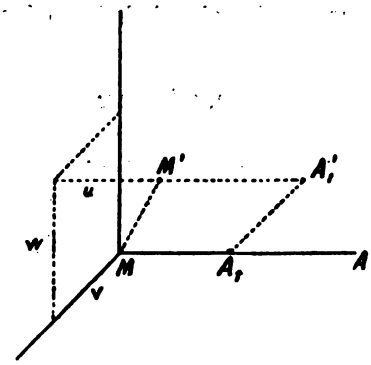


Figura 38.

valores de u', v', w', ó como se deduce geométricamente con facilidad suma.

En efecto; haciendo cero las b y p en las fórmulas que dan u', v', w', y tomando un punto del eje de las x, en cuyo caso k y l también serán nulas, tendrémos

$$u' = u + a_1 h,$$
$$v' = v,$$
$$w' = w.$$

Es decir (fig. 38), que si tomamos un punto A_1 del eje de las x, y si el punto M se transporta á M', siendo u, v, w las

componentes del desplazamiento MM', el punto A'_1, á que viene á parar A_1, tendrá por desplazamientos la misma v y la misma w; por lo tanto, estará en la recta que pasa por M' paralela al eje A.

En suma; los desplazamientos, según los ejes del elipsoide, conservan su dirección en este caso; es decir, si

$$p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 0,$$

y además,

$$b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 0.$$

Pero no lo conservarían si subsistieran las p, porque no tendríamos

$$v' = v, w' = w:$$

en los segundos miembros habría términos con p.

El último problema que teníamos que tratar, después de ver cómo cambia de posición un punto, cómo varía un segmento de recta, cómo cambia de magnitud un ángulo y cómo se transforma una superficie, es el de la *transformación de un volumen.*

***

Vamos, pues, á ocuparnos en estudiar LA DILATACIÓN CÚBICA, producida por una deformación.

Y claro es que la palabra *dilatación* es palabra genérica, puede ser positiva ó negativa; si es negativa, será una contracción.

La parte del sólido que rodea á cada punto M, al deformarse el cuerpo, cambiará el volumen de todos sus elementos.

Si en esa parte inmediata al punto M consideramos un cubo, ó más, en general, un poliedro cualquiera, éste poliedro se habrá convertido en otro que, en general, tendrá dis-

tinto volumen, mayor si ha habido dilatación, menor si el sistema se ha contraído. Ahora bien, á *la relación de este incremento, con el volumen primitivo, es á lo que se llama dilatación cúbica.*

Puede resolverse el problema en términos generales y aun para deformaciones finitas.

Pero como tratamos de deformaciones infinitamente pequeñas, aplicaremos otro método sencillo y rápido.

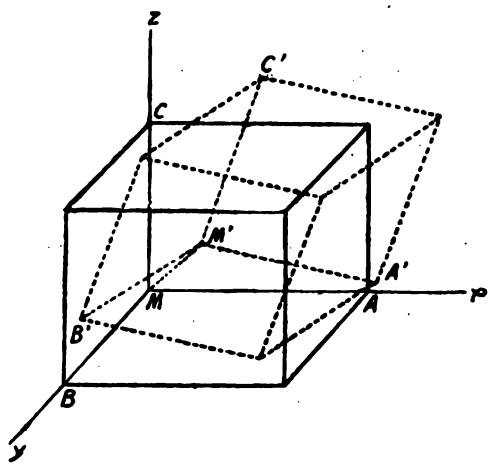


Figura 39.

Consideremos un punto, M, y determinemos para este punto la dilatación cúbica infinitamente pequeña.

Escojamos por ejes coordenados *los tres ejes principales* que hemos definido en esta conferencia, y construyamos el paralelepípedo de la figura 39, $MABC$, cuyo triedro coincide con el de los planos coordenados.

Designemos sus aristas por A, B, C.

Y determinemos la dilatación cúbica de este paralelepípedo, es decir, la dilatación por unidad de volumen.

Después de la deformación, el punto M habrá venido á parar á M', y las aristas MA, MB, MC se habrán convertido

en $M'A'$, $M'B'$, $M'C'$, que serán tres rectas, porque toda recta se transforma en otra, y el paralelepípedo se habrá convertido en otro paralelepípedo $M'A'B'C'$.

Como se trata de espacios infinitamente pequeños y de deformaciones infinitamente pequeñas también, puede suponerse y podría demostrarse que, con errores infinitamente pequeños de orden superior, las rectas paralelas se convierten en rectas paralelas, y los planos paralelos, en planos paralelos también; de suerte que el paralelepípedo primitivo se habrá convertido en otro paralelepípedo que está señalado de trazos en la figura.

Pero hay esta circunstancia, que facilita el problema: los ángulos rectos de las caras AMB, BMC, CMA se conservan ángulos rectos en la deformación, puesto que los ejes son principales, es decir, que tendremos

$$A'M'B' = 90^\circ, \quad B'M'C' = 90^\circ, \quad C'M'A' = 90^\circ;$$

luego el paralelepípedo deformado será también trirrectángulo como el primitivo, y su volumen será el producto de las tres aristas; y así, llamándolas A', B', C', tendremos para ambos paralelepípedos:

$$\text{Volumen } MABC = A.\,B.\,C.$$

$$\text{Volumen } M'A'B'C' = A'.B'.C'.$$

Si representamos por a'_1, a'_2, a'_3 las dilataciones principales que corresponden al punto M, las nuevas aristas serán, evidentemente, iguales á las primitivas, más el incremento que se obtendrá para cada una, multiplicando su longitud por la dilatación lineal por unidad.

Así,

$$A' = A + Aa'_1 = A\,(1 + a'_1)$$

$$B' = B + Ba'_2 = B\,(1 + a'_2)$$

$$C' = C + Ca'_3 = C\,(1 + a'_3).$$

De aquí se deduce

$$\text{volumen } M'A'B'C' = A'.B'.C' =$$
$$= A.B.C\ (1 + a'_1)\ (1 + a'_2)\ (1 + a'_3)$$
$$\text{y volumen } M'A'B'C' - \text{volumen } MABC =$$
$$= A.B.C\,(1 + a'_1)(1 + a'_2)(1 + a'_3) - A,B,C;$$

luego

$$\frac{\text{volumen } M'A'B'C' - \text{volumen } MABC}{\text{volumen } MABC} = \text{dilatación cúbica,}$$

será igual, llamándola θ, á la siguiente expresión:

$$\theta = (1 + a'_1)(1 + a'_2)(1 + a'_3) - 1;$$

ó desarrollando,

$$\theta = a'_1 + a'_2 + a'_3 + a'_1 a'_2 + a'_1 a'_3 + a'_2 a'_3 + a'_1 a'_2 a'_3.$$

Pero como las dilataciones lineales hemos supuesto que son muy pequeñas, los últimos términos de la expresión anterior serán de segundo y tercer orden y podremos despreciarlos. Tendremos, pues, para la dilatación cúbica en un punto M, la expresión sencillísima que ya obtuvimos en el año anterior;

$$\theta = a'_1 + a'_2 + a'_3.$$

Recordemos que estas tres cantidades son las derivadas parciales de primer orden de las componente del desplazamiento que experimenta M, tomadas dichas derivadas con relación á x, y, z, y aplicadas á dicho punto M: es decir,

$$a'_1 = \frac{du}{dx}, a'_2 - \frac{dv}{dy}, a'_3 = \frac{dw}{dz}.$$

Más claro: suponiendo el problema de la Elasticidad resuelto, conoceremos u, v, w en función de x, y, z; pues bien, se tomarán las derivadas de u, v, w en función de x, y, z: resultarán tres funciones de estas variables y se substituirán en ellas las coordenadas del punto M. Sumándolas tendremos la dilatación cúbica.

Todo esto suponiendo que se han elegido los ejes paralelamente á *los ejes principales* que corrresponden al punto M.

Esto parece que quita generalidad á la solución, porque la dilatación cúbica que acabamos de hallar,

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz},$$

sólo se aplica para cada punto á los ejes principales del mismo, y estos ejes tienen, en general, direcciones distintas.

Sin embargo, la solución veremos que es general, porque la *expresión precedente*, es lo que se llama una *invariante* cuando se cambian los ejes, conservándose siempre rectangulares.

***

Para demostrarlo, cambiaremos de ejes rectangulares, y veremos que la forma de $a_1 + a_2 + a_3$ no varía.

Ahora bien, para hallar los coeficientes a y b, cuando se cambian los ejes coordenados, basta seguir el mismo procedimiento que seguimos al tratar de las tensiones.

Los coeficientes a y b acabamos de ver, que son los coeficientes de x^2, y^2, z^2, yz, xz, xy en la ecuación de las dilataciones

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2 b_1 yz + 2 b_2 zx + 2 b_3 xy = \pm 1.$$

Por lo tanto, cambiaremos de ejes rectangulares mediante las fórmulas ordinarias

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z',$$
$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z',$$
$$z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z',$$

y determinaremos los coeficientes de la nueva ecuación.

Pero no hay ni siquiera que repetir los cálculos, no hay más que substituir á N_1, N_2, N_3 las cantidades a_1, a_2, a_3, que son los coeficientes de los tres primeros términos de la ecuación precedente antes de hacer el cambio de coordenadas, y substituir asimismo á N'_1, N'_2, N'_3, las cantidades a'_1, a'_2, a'_3, que representarán los coeficientes de x'^2, y'^2, z'^2 en la nueva ecuación.

Del mismo modo substituiremos á T_1, T_2, T_3 las cantidades b_1, b_2, b_3.

Tendremos, pues, copiando de las fórmulas que hemos citado, las tres primeras ecuaciones, y haciendo las substituciones indicadas:

$$a'_1 = a_1\alpha^2_1 + a_2\beta^2_1 + a_3\gamma^2_1 + 2b_1\beta_1\gamma_1 + 2b_2\gamma_1\alpha_1 + 2b_3\alpha_1\beta_1,$$
$$a'_2 = a_1\alpha^2_2 + a_2\beta^2_2 + a_3\gamma^2_2 + 2b_1\beta_2\gamma_2 + 2b_2\gamma_2\alpha_2 + 2b_3\alpha_2\beta_2,$$
$$a'_3 = a_1\alpha^2_3 + a_2\beta^2_3 + a_3\gamma^2_3 + 2b_1\beta_3\gamma_3 + 2b_2\gamma_3\alpha_3 + 2b_3\alpha_3\beta_3.$$

Supongamos que se pasa de ejes arbitrarios x, y, z, pero rectangulares, á los ejes principales x' y', z', que son también rectangulares; de suerte que los ángulos yz, xz, xy valdrán 90°.

En esta hipótesis, las nuevas a'_1, a'_2, a'_3, serán las dilataciones principales, y sumando las ecuaciones precedentes, tendremos:

$$a'_1 + a'_2 + a'_3 = a_1(\alpha^2_1 + \alpha^2_2 + \alpha^2_3) + a_2(\beta^2_1 + \beta^2_2 + \beta^2_3) +$$
$$+ a_3(\gamma^2_1 + \gamma^2_2 + \gamma^2_3) + 2b_1(\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3) +$$
$$+ 2b_2(\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3) + 2b_3(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)$$

Pero los coeficientes de a_1, a_2, a_3, por la propiedad de los

cosenos de los ángulos que forma una recta con tres ejes rectangulares, serán iguales á 1; y los coeficientes de b_1, b_2, b_3 que representan los cosenos de los ángulos de dos rectas perpendiculares entre sí, como son los ejes, serán iguales á cero; sin contar con que b'_1, b'_2, b'_3, puesto que los nuevos ejes son los principales para el punto de que se trata, también serán cero; de suerte que la ecuación se reduce á esta otra:

$$a'_1 + a'_2 + a'_3 = a_1 + a_2 + a_3.$$

Es decir, que para tres ejes rectangulares cualesquiera, la suma de las dilataciones, según los ejes, es igual á la suma de las dilataciones principales, y, por lo tanto, todas estas sumas son iguales entre sí. Al pasar de unos ejes rectangulares á otros, la suma de las dilataciones lineales no varía, es una invariante, pero ya sabemos que estos coeficientes son las derivadas u, v, w, con relación á x, y, z.

Es decir, que, en general,

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = \text{constante.}$$

Ni cambia el valor, ni cambia la forma; siempre son los tres términos de dicha expresión las derivadas primeras de las componentes de los desplazamientos con relación á x, y, z.

Pero hemos demostrado, que para los ejes principales esta suma representa la dilatación cúbica; luego, sean cuales fueren los ejes rectangulares que se consideren, tendremos:

$$\text{dilatación cúbica} = \theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

***

Y hemos terminado con esto, en los límites elementales de estas conferencias, el estudio de las dilataciones: debemos

ya pasar á la expresión, hablando en términos generales, de las dilataciones, ó *esfuerzos*, en función de las *deformaciones*.

Pero antes, y para terminar esta conferencia, insistiremos sobre un punto sumamente sencillo á que nos hemos referido anteriormente.

Hemos dicho, tratándose de deformaciones infinitamente pequeñas, y dentro de las aproximaciones que venimos aceptando, que *toda recta se transforma en otra recta* dentro del espacio infinitamente pequeño que rodea al punto *M*; y dentro del mismo espacio, todo plano se transforma en otro plano.

Pero dijimos más: que dos rectas paralelas se transforman en otras dos rectas paralelas, y que con dos planos paralelos sucede lo mismo, á saber: que después de la deformación se convierten en dos planos paralelos también.

En rigor, basta demostrar lo último, porque la intersección de dos planos que son paralelos á otros es paralela á la intersección de los dos primeros.

Nos proponemos, pues, demostrar que si dos planos, P, P', son paralelos, los planos en que se transforman, que llamaremos Q y Q', serán paralelos también.

Pero hay que fijarse bien; decimos que si P y P' son paralelos entre sí, Q y Q' lo serán también; pero no decimos que Q sea paralelo á P, ni Q' á P'.

Ni las rectas, ni los planos, ni las figuras en general se transportan paralelamente á sí mismas.

Sea la ecuación del plano P.. $x\alpha + \beta y + \gamma z = K$

y la del plano P'..... $x\alpha + \beta y + \gamma z = K'$,

en que α, β, γ son los cosenos directores de las normales: por eso ponemos los mismos coeficientes en los primeros miembros; porque siendo los planos paralelos, serán paralelas las normales.

Para seguir la notación general, y suponiendo que se toma por origen el punto M, que estamos considerando, llamaremos h, k, l á las coordenadas de ambos planos, y tendremos:

$$\text{plano } P \ldots\ldots\ldots \quad \alpha h + \beta k + \gamma l = K$$
$$\text{plano } P' \ldots\ldots\ldots \quad \alpha h + \beta k + \gamma l = K'.$$

La deformación convierte las h, k, l para cualquier punto en h', k', l', y sabemos que se expresan h', k', l' en función de h, k y l, por las fórmulas,

$$h' = h + u' - u$$
$$k' = k + u' - u$$
$$l' = l + u' - u,$$

y que á su vez $u' - u$, $v' - v$, $w' - w$ tienen por valores, introduciendo las constantes a, b, p,

$$u' - u = p_2 l - p_3 k + a_1 h + b_3 k + b_2 l$$
$$v' - v = p_3 h - p_1 l + b_3 h + a_2 k + b_1 l$$
$$w' - w = p_1 k - p_2 h + b_2 h + b_1 k + a_3 l,$$

que son lineales en h, k, l.

Tendremos, por lo tanto, substituyendo y ordenando

$$h' = (1 + a_1) h + (b_3 - p_3) k + (b_2 + p_2) l$$
$$k' = (p_3 + b_3) h + (1 + a_2) k + (b_1 - p_1) l$$
$$l' = (b_2 - p_2) h + (b_1 + p_1) k + (1 + a_3) l.$$

Según el método que hemos explicado, para hallar la ecuación de la transformada de una superficie, tendremos que despejar h, k y l de estas tres ecuaciones en función de h', k', l' y substituir estos valores en las ecuaciones de los dos planos.

Pero estas ecuaciones son lineales; luego se sabe por Ál-

gebra, que h, k y l se expresaran en función lineal y homogénea de h', k', l', y podremos representar, pues, estos valores del siguiente modo:

$$\begin{aligned} h &= Ah' + Bk' + Cl' \\ k &= A_1h' + B_1k' + C_1l' \\ l &= A_2h' + B_2k' + C_2l'; \end{aligned}$$

y substituyendo, en las ecuaciones de los dos planos, éstas se convertirán en las siguientes:
para la transformada de P_1

$$\alpha(Ah' + Bk' + Cl') + \beta(A_1h' + B_1k' + C_1l') + \\ + \gamma(A_2h' + B_2k' + C_2l') = K;$$

para el plano P'

$$\alpha(Ah' + Bk' + Cl') + \beta(A_1h' + B_1k' + C_1l') + \\ + \gamma(A_2h' + B_2k' + C_2l') = K';$$

y ordenando

$$(\alpha A + \beta A_1 + \gamma A_2)h' + (\alpha B + \beta B_1 + \gamma B_2)k' + \\ + (\alpha C + \beta C_1 + \gamma C_2)l' = K$$
$$(\alpha A + \beta A_1 + \gamma A_2)h' + (\alpha B + \beta B_1 + \gamma B_2)k' + \\ + (\alpha C + \beta C_1 + \gamma C_2)l' = K.$$

Estas ecuaciones finales son de primer grado en h', k', l'; luego representan dos planos como debía ser, á saber, los planos Q, Q'. Pero los coeficientes de las tres variables son iguales; luego son planos paralelos, con lo cual queda demostrado el teorema:

Si P, P' *son paralelos, los planos transformados* Q, Q *son también paralelos entre sí.*

De aquí se deduce, como ya habíamos dicho, que todo paralelepípedo se transformará en otro paralelepípedo, por-

que en el poliedro transformado las caras serán paralelas dos á dos.

Por eso en la figura 39 hemos podido suponer que el paralelepípedo $M\,A\,B\,C$ se transformaba en otro paralelepípedo $M'\,A'\,B'\,C'$.

En la conferencia próxima empezaremos el estudio de la tercera parte del método, es decir: *expresión de las tensiones en función de las deformaciones.*

XXXIII.— Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia séptima

SEÑORES:

Hemos estudiado en las conferencias precedentes las dos primeras partes de las varias, que han de formar la materia del presente curso. Y eran ambas, *el estudio de las tensiones* en un punto de un sólido elástico y alrededor del mismo; y el de *las deformaciones* en esta región infinitamente pequeña que comprenda al punto en cuestión.

Al terminar la conferencia precedente ya indicamos, que procederíamos en ésta á la *determinación de las tensiones en función de las deformaciones.* Empecemos, pues.

3.—Determinación de las tensiones en función de las deformaciones.

Y lo decíamos al empezar el estudio del método de Lamé: Puede considerarse como un resultado experimental este principio, á saber: que en un sólido elástico, las tensio-

nes son dependientes de las deformaciones, de suerte que, conocidas éstas, las primeras quedan determinadas. Y también puede decirse que, á la inversa, conocidas las tensiones, las deformaciones de ellas se deducen.

En suma: las tensiones y las deformaciones están enlazadas entre sí analíticamente.

E indicábamos que éste es ó puede considerarse como un hecho experimental: todo el arte de las construcciones y la mecánica aplicada á las mismas, no tiene otro fundamento.

Cuando una columna sostiene una carga y se acorta cierta longitud, este acortamiento es función de dicha carga y para cada material experimentalmente se determina.

Cuando un hilo sostiene un peso, el hilo se extiende y el estiramiento es función del peso también para cada clase de metal ó de substancia.

Casos son estos particulares del teorema general. Aquí la deformación es la más sencilla posible: un acortamiento ó un alargamiento.

Y la variación depende de la carga, y recíprocamente, á una variación dada, ó sea á una deformación en longitud, corresponde una fuerza exterior definida: una compresión determinada en todos lo puntos de la columna; ó una tensión determinada también en todos los puntos del alambre.

Por eso decimos, generalizando estos y otros resultados de la experiencia: el principio de que ahora partimos puede considerarse como un principio experimental.

No era así en el método de Cauchy, en que partíamos de una hipótesis relativa á la constitución de los sólidos elásticos, considerándolos compuestos de multitud de puntos materiales sujetos dos á dos por fuerzas recíprocas é iguales dependientes de las masas y de las distancias.

Dada esta hipótesis, era una consecuencia matemática, ó, mejor dicho, era una consecuencia de los principios de la Mecánica racional, que las deformaciones y los esfuerzos inte-

riores habían de estar entrelazados entre sí por expresiones analíticas.

En cambio, en el método de Lamé, ó en un método análogo al suyo, pero en que para nada se acuda á la idea de Cauchy, estas relaciones, entre las tensiones y la deformaciones, las consideramos, según queda dicho, como generalización de resultados experimentales.

***

Afirmamos, pues, que las tensiones dependen analíticamente de las deformaciones.

Pero no hay que tomar ni unas ni otras en su totalidad; porque como alrededor de cada punto hay infinitas tensiones, puesto que por dichos puntos pasan infinitos planos elásticos, y como alrededor de cada punto hay infinitas deformaciones, porque se pueden trazar infinitas rectas é infinitas figuras, el problema, tomado con la generalidad que lo tenemos expuesto, equivaldría á este otro: expresar infinitas cantidades en función de otras infinitas.

Afortunadamente, en estos casos no es difícil hacer que brote la luz.

Porque todas las tensiones alrededor de un punto, es decir, cada una de por sí, hemos visto que dependen de seis tensiones fundamentales, que llamábamos

$$N_1,\ N_2,\ N_3,\ T_1,\ T_2,\ T_3; \qquad (1)$$

siendo las tres primeras normales á los tres planos coordenados y estando las tres últimas situadas en dichos planos.

Hemos visto también, que todas las deformaciones alrededor de un punto dependen de otras *seis* cantidades que designábamos de este modo:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3; \qquad (2)$$

representando las tres primeras las dilataciones lineales correspondientes á los ejes; y representando las tres últimas las variaciones de los ángulos de dichos ejes, á que dábamos el nombre, según costumbre, de deslizamientos.

De aquí se deduce que expresar las tensiones en función de las deformaciones se reduce á expresar las seis cantidades (1) en función de las seis cantidades (2); es decir, las N y T en función de las a, b.

Luego el problema que ahora estamos resolviendo consiste en determinar las seis ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} N_1 &= \varphi_1 (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3), \\ N_2 &= \varphi_2 (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3), \\ N_3 &= \varphi_3 (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3), \\ T_1 &= \psi_1 (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3), \\ T_2 &= \psi_2 (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3), \\ T_3 &= \psi_3 (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\ b_3). \end{aligned} \qquad (3)$$

En el método de Cauchy, este problema era natural, y en teoría, sencillo: todas estas funciones φ y ψ se deducían de la hipótesis única que al principio del método se formulaba. Dichas funciones eran una consecuencia de las condiciones iniciales del sistema y de la función única que expresaba la ley de acción entre cada dos puntos.

En este caso, es decir, en este método de Lamé, no es así. Hay que acudir á un recurso á que siempre se acude en Física experimental, cuando partiendo sólo de la experiencia se quieren establecer relaciones matemáticas entre los datos y las incógnitas.

A saber: desarrollar ó suponer que están desarrolladas las funciones φ, ψ por la serie de Taylor, ó mejor dicho, para este caso por la serie de Maclaurin, puesto que vamos á obtener desarrollos, que estarán ordenados, no por las potencias de los incrementos de las variables, sino por las potencias de las variables mismas.

Claro es, que se nos podrá objetar, que otro tanto hacíamos en el curso anterior al explicar el método de Cauchy; pero aunque, en realidad, en uno y en otro caso vengamos á hacer lo mismo, los motivos son completamente distintos.

Allí, si acudíamos á los desarrollos, era para salvar impotencias del cálculo; era por una razón analítica, por decirlo de este modo, y además, porque no conocíamos la naturaleza de una sola función $f(r)$. Que si conociésemos esta función y el cálculo matemático fuera perfecto para toda clase de ecuaciones y de relaciones, se comprende que el desarrollo en serie hubiera sido inútil.

En este caso, y para el método que vamos explicando, acudimos al método de Maclaurin, porque ignoramos la naturaleza de todas las funciones φ y ψ, y como método de aproximación, tomamos los primeros términos de dicho desarrollo.

Así, en Física experimental, cuando se ignora la relación que hay entre dos variables, se supone *como primera aproximación,* dado que la experiencia lo confirme, que es *una función lineal,* de suerte que, geométricamente, está representada por una línea recta.

Pero prescindamos de esta discusión, que nos llevaría muy lejos, y volvamos á las ecuaciones (3), que expresan las seis tensiones características N, T en funciones de las seis deformaciones a, b, de las que dependen todas las demás.

Consideremos la primera, y lo que de ella vamos á decir, pudiéramos repetir para las restantes.

Admitimos hipotéticamente, que el segundo miembro se puede desarrollar por la serie de Maclaurin, y tendremos

$$N_1 = \varphi_1(0, 0, 0, 0, 0, 0) + \frac{d\varphi_1}{da_1} a_1 + \frac{d\varphi_1}{da_2} a_2 + \frac{d\varphi_1}{da_3} a_3 +$$
$$+ \frac{d\varphi_1}{db_1} b_1 + \frac{d\varphi_1}{db_2} b_2 + \frac{d\varphi_1}{db_3} b_3,$$

ó abreviadamente, y representando los coeficientes por una letra cada uno,

$$N_1 = C + A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + B_1 b_1 + B_2 b_2 + B_3 b_3.$$

Resulta, pues, la componente N_1 de la tensión sobre la cara de las yz, como función lineal de las deformaciones caracteristicas a, b.

Pero no se olvide que N_1 es función lineal de a, b como aproximación y no más. Si en el fenómeno de las deformaciones hubiera en algún caso particularidades tales, que no pudieran explicarse mediante esta forma lineal, habría que tomar mayor número de términos del desarrollo.

Además, suponemos que φ_1 puede desarrollarse por la serie de Maclaurin, y admitimos, por último, que las a, b son cantidades muy pequeñas, porque muy pequeñas son las deformaciones que estudiamos.

Los coeficientes A, B son las derivadas de las funciones con relación á las a, b, y además en dichas derivadas se ha hecho

$$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 0;$$

y, por lo tanto, no contendrán más que las x, y, z del punto M; porque en las ecuaciones (3), las constantes de las funciones φ eran precisamente x, y, z ó de ellas dependían, de suerte que, al anularse a, b, los coeficientes C, A, B, quedaban dependientes de x, y, z.

Si el cuerpo no es homogéneo, para cada punto C, A, B serán distintos, y sólo cuando el cuerpo es homogéneo, podremos suponer que son constantes para todos los puntos.

En este caso, como ya vimos en las conferencias del año anterior, aunque no variarán de un punto á otro, dependerán evidentemente de la dirección de los ejes.

Sólo cuando el cuerpo es isótropo, serán constantes en absoluto para todos los puntos del sólido elástico y para todo sistema de ejes trirrectangulares.

Lo que hemos dicho para la primera ecuación del grupo (3), podemos repetir para las ecuaciones restantes.

***

Pero el coeficiente C merece atención especial, pues aquí se presenta una cuestión de que ya tratamos en el curso precedente, y que no es tan fácil ni tan llana, como á primera vista pudiera imaginarse; ni en este punto que vamos á tratar de nuevo, están conformes todos los autores.

Nos referimos al problema *del estado natural* de los cuerpos elásticos, cuando sobre ellos no actúan fuerzas exteriores.

El estado natural de los cuerpos antes de que sobre ellos actúen las fuerzas, que han de producir las deformaciones, se define de diversas maneras, que no todas son claras, ni exactas, ni, sobre todo, evidentes.

Consideramos que sólo hay una manera rigorosa de tratar este problema, que es como lo hace el eminente matemático Mr. Poincaré.

En rigor, á lo que nosotros comprendemos, no parte monsieur Poincaré del estado natural que, á decir lo cierto, no es tan natural como parece, sino de un estado *inicial.*

Expliquémonos más claramente.

Consideremos un sólido elástico sometido á diferentes fuerzas, que habrán dado origen á diversas deformaciones.

Pues nosotros tomamos dicho estado, que representaremos por E_i, como *estado inicial,* como punto de partida, como dato del problema, pudiéramos decir.

Y ahora supongamos, que actúan nuevas fuerzas, que son los nuevos datos; fuerzas que producirán otras deformaciones y otras tensiones, que serán las verdaderas incógnitas.

Las nuevas fuerzas se agregarán á las antiguas, á las del estado inicial; pero de estas últimas no hacemos cuenta.

Las nuevas tensiones y las nuevas deformaciones se agregarán también á las tensiones y á las deformaciones del estado E_i.

Y tampoco estas sumas nos interesan, sino las tensiones que han producido las nuevas fuerzas en cuestión.

Más claro: tomemos la primera ecuación y marquemos por el subíndice i el estado inicial. La tensión N_{1i} estará dada por una expresión lineal de las a_i, b_i con término independiente para más generalidad: así

$$N_{1i}=C_i+A_{1i}a_{1i}+A_{2i}a_{2i}+A_{3i}a_{3i}+B_{1i}b_{1i}+B_{2i}b_{2i}+B_{3i}b_{3i}.$$

Para abreviar la escritura, llamemos C á todo el segundo miembro: resultará $N_{1i}=C$.

Consideremos nuevas fuerzas, que darán nuevas deformaciones y nuevas tensiones: así, la ecuación precedente será

$$N_{1i}+N_1=C+A_1a_1+A_2a_2+A_3a_3+B_1b_1+B_2b_2+B_3b_3$$

y suprimiendo N_{1i} y C, que son iguales, queda la ecuación sin término independiente:

$$\left.\begin{array}{l} N_1=A_1a_1+A_2a_2+A_3a_3+B_1b_1+B_2b_2+B_3b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad (3').$$

Para abreviar la escritura sólo hemos escrito la primera ecuación; pero las cinco restantes serán de la misma forma.

Esta simplificación, partiendo de un estado inicial, representando a, b las nuevas deformaciones y N, T las nuevas tensiones, es exacta, en cuanto lo es el principio de la superposición de efectos para deformaciones infinitamente pequeñas.

Pero no lo es, por lo menos no sería evidente, si se partiese del llamado estado *natural*.

***

En efecto, se entiende por *estado natural* aquel en que un

sólido elástico está abandonado á sí mismo y á sus fuerzas internas, atracciones ó repulsiones entre sus elementos; pero en que no actúa ninguna fuerza exterior, y en este estado natural, que llamaremos, para abreviar E_n, se supone arbitrariamente que no existen fuerzas internas elásticas, es decir, que las N, T son nulas.

Si esta hipótesis fuese legítima, la misma simplificación que hemos hecho para E_t podríamos hacer para E_n y anulando á la vez las a, b, N, T, vendríamos á parar á

$$0 = C + 0$$

.....

Por lo tanto, resultarían nulas todas las primeras constantes, obteniendo para las componentes de las tensiones expresiones de la forma (3').

Mas esta hipótesis no es evidente, pueden no actuar fuerzas exteriores y las tensiones interiores no ser nulas; por lo menos el problema es más complicado de lo que parece y el estado natural definido de este modo es un estado hipotético que no está demostrado que pueda realizarse.

Detengámonos todavía en este punto.

***

Puede formularse el problema de este modo:

¿Se comprende que exista un sistema elástico, que no esté sometido á ninguna fuerza exterior y en que, sin embargo, las tensiones interiores no sean nulas, es decir, que T y N tengan valores determinados para cada punto del sólido?

¿O, por el contrario, cuando un sólido elástico no esté sometido á fuerzas exteriores las tensiones habrán de ser forzosamente nulas?

Para fijar bien las ideas, supongamos que el sistema es discontinuo, según la hipótesis de Cauchy y de muchos físicos, y estudiemos el problema para este caso.

Supongamos siempre, que no existen fuerzas exteriores, que es la circunstancia característica de lo que se llama *estado natural* de los cuerpos elásticos.

Sea M (fig. 40) un punto del cuerpo, de masa m.

Este punto estará sometido, en la hipótesis de las fuerzas centrales, á la acción de todas las masas que le rodean dentro de la esfera de actividad molecular cuyo centro sea M.

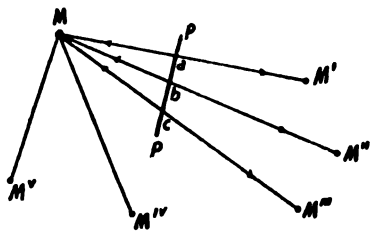


Figura 40.

Si estos puntos son M', M'', M'''....., sobre M actuarán fuerzas en la dirección MM', MM'', MM'''..... que dependerán, según ya hemos explicado varias veces, para cada par MM', de la distancia r y de las masas mm'.

De suerte que la acción de M' sobre M será de la forma, llamándola F,

$$F = mm'f(r).$$

Lo mismo pudiéramos decir para los pares de puntos M M'', M M'''.....

Sobre el sistema no actúan, pues, más que las fuerzas interiores F.

Y conviene distinguir tres cosas que no siempre se distinguen de una manera precisa.

1.° La intensidad de las fuerzas F, F' F''.....

2.° El equilibrio del punto M y, análogamente, de todos los demás puntos del sistema.

3.° La tensión sobre un elemento plano cualquiera, pp.

***

Empecemos por el estudio de las fuerzas F.

1.° Hemos supuesto, y seguiremos suponiendo, que to-

das estas fuerzas interiores son centrales, es decir, que para cada dos puntos, su acción actúa según la línea que los une; y que para ambos puntos se verifica el principio de la reacción igual y contraria á la acción.

Dichas fuerzas F, ya lo hemos dicho, dependen de la distancia r y de las masas.

Pero estudiando esta clase de problemas, en el curso precedente, y sobre todo, la naturaleza de la función $f(r)$, decíamos que para $r = \infty$ la función se reducía á cero. Que para cierto valor de r, por ejemplo r_0, la fuerza se anulaba, cambiaba de signo en este punto y crecía sin límites á medida que r disminuía, con el carácter de fuerza repulsiva; luego r_0 determinaba una distancia entre M y M' en que la fuerza F era nula, es decir, una posición de equilibrio.

Y se presenta este problema:

En rigor matemático, ¿puede colocarse en tal disposición geométrica un número n de masas que todas las fuerzas F correspondientes á cada dos masas contiguas, sean aisladamente nulas? Que es como decir, ¿pueden distribuirse los puntos de tal suerte que todos los puntos contiguos formen tetraedros cuyos lados sean siempre iguales á r_0?

Tal disposición puede demostrarse que es imposible.

No nos detenemos en esta demostración, por no separarnos demasiado de nuestro objeto, prolongando esta digresión que va siendo excesivamente larga; pero indicaremos, en términos generales, que basta tomar una recta r_0 como arista de uno de dichos tetraedros y alrededor de ella se ve que es imposible colocar un número exacto de estas figuras geométricas, porque habría que colocar un número exacto de veces r_0 en una circunferencia cuyo radio sería la altura del triángulo equilátero del radio r_0, como se indica en la figura 41.

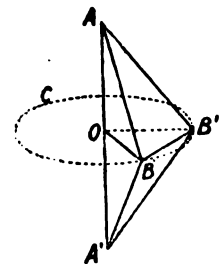


Figura 41.

Es decir, que si $A\ A'\ B\ B'$ es el tetraedro regular en que uno de los lados $A\ A'$ es igual á r_0, y $B\ B'\ C$ es la circunferencia trazada desde 0, punto medio de $A\ A'$, con el radio $0\ B$ igual á la altura de una de las caras $A\ A'\ B$, sería preciso, decimos, para que fuera posible el problema tal como lo hemos definido, que el lado $B\ B'$ igual r_0 estuviera contenido un número exacto de veces en la circunferencia C, lo cual es imposible, porque $0\ B < B\ B'$.

Desde nuestro punto de vista, por lo tanto, hay que renunciar á distribuir los n puntos materiales de manera que todas las fuerzas F sean nulas. Sin embargo, esto es lo que implícitamente suponen algunos autores.

Esto es contando sólo con la molécula contigua y despreciando las acciones de las más lejanas. En caso contrario, el problema aun sería de mayor complicación; pero análogo.

2.° Mas el problema puede plantearse de otro modo, aun no siendo nulas las fuerzas F; si no hay fuerzas exteriores, que es lo que vamos suponiendo, puede preguntarse: ¿habrá una distribución de los n puntos tal, que bajo la acción de las fuerzas interiores, cada punto esté en equilibrio?

Representemos por $x,\ y,\ z$ las coordenadas de M,

por $x',\ y',\ z'$ las de M',

y así sucesivamente hasta $x^{(n-1)},\ y^{(n-1)},\ z^{(n-1)}$, que representarán las de $M^{(n-1)}$.

El equilibrio del punto M supone tres ecuaciones, que serán las correspondientes á todas las fuerzas interiores, que actúan sobre dicho punto M, igualadas las sumas de las componentes á cero.

Estas ecuaciones no dependerán más que de las coordenadas de los puntos, porque cada r será de la forma

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

y los cosenos de los ángulos con los ejes de cada una de estas rectas, se expresarán asimismo en función de las mismas coordenadas.

El número de ecuaciones á que hay que satisfacer para el equilibrio de todo el sistema, será de *tres por cada punto*, y como hay n puntos, tendremos:

Número de ecuaciones. . . . . $3n$.

Más para cada punto también hay tres coordenadas, luego el número de incógnitas será.. . . . . $3\,n$.

Hay, pues, tantas ecuaciones como incógnitas y el problema *parece determinado* en términos generales; pero mientras no conozcamos la naturaleza de la función f, es aventurado ninguna afirmación precisa.

Porque pudieran suceder varias cosas: que algunas de las ecuaciones fueran incompatibles, y entonces el problema sería imposible; pudiera suceder también que encontrásemos una solución única para el sistema de ecuaciones, es decir, *una distribución* y *una sola* para los n puntos, aunque no es imposible que esta solución representase un *equilibrio inestable*; y, por último, parece lo más probable, juzgando por intuición, que hubiera *muchas soluciones*, que es como si dijéramos muchos estados naturales, y entonces el problema de la Elasticidad se complica.

Pero sigamos adelante y pasemos al tercer punto.

3.° Volviendo á la figura 40, vemos que pueden estudiarse varias cosas: ante todo la intensidad de las fuerzas F, que hemos visto que prescindiendo de tres casos: del de la distribución lineal; del caso en que n sea igual á 3 y en que se forme un triángulo equilátero de radio r_0; y del caso en que n sea igual á 4 en que podrá formarse un tetraedro, y pasando al caso general el problema, es imposible á no ser *por aproximación:* nuevo punto de vista que nos llevaría demasiado lejos.

Hemos pasado después á determinar el equilibrio de cada punto *M*, observando que á *primera vista* podemos imaginar un sistema en equilibrio con *n* puntos: sistema en que sólo actúan las fuerzas interiores.

Pero nos queda otra cuestión que tratar, que es la que se refiere el método de Lamé, en el cual no se estudia el equilibrio *de cada punto M*, bajo la acción de las fuerzas *F*, sino el equilibrio de un elemento sólido infinitamente pequeño bajo la acción de las tensiones *T*.

Y de aquí este tercer aspecto de la cuestión.

Imaginemos en la figura 40 un elemento plano muy pequeño que corte á las rectas ideales *MM'*, *MM''*.....

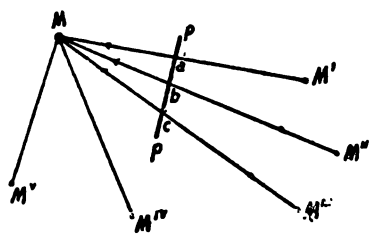


Figura 40.

Es decir, un plano que corte á la red de rectas sobre las cuales están aplicadas las fuerzas *F*.

Y se pregunta, y es lo que más nos interesa: ¿Aunque los puntos *M*..... estén en equilibrio, como las fuerzas *F* no pueden ser nulas y éstas son las que definen y determinan las tensiones, la resultante de dichas fuerzas *F* cortadas por el plano *pp* será nula para dicho plano, sea cual fuere la posición de éste?

La cuestión es más difícil de lo que parece, y aun á primera vista diríase, que es imposible que la tensión en *pp* sea nula no siéndolo las fuerzas *F*, *F'*, *F''*.... que cortan á dicho plano en *a*, *b*, *c*.

Porque no se trata ya de componer todas estas fuerzas con las restantes que pasan por el punto *M*, en cuyo caso hemos supuesto que dicha resultante es nula, puesto que el punto *M* está en equilibrio; sino de componer una parte de ellas, el haz cortado por el plano *pp*, y aunque la resultante en *M* sea nula, un grupo de las componentes no lo será en general.

Verdad es que puede suponerse que las fuerzas F, F', F''... que cortan á pp sean alternativamente positivas y negativas, según cierta ley, y que la resultante del haz sea también cero; pero esto supone falta de continuidad, porque las fuerzas en ángulos infinitamente pequeños han de pasar constantemente de positivas á negativas, y además, tal distribución, aplicada al punto M, pudiera no armonizarse con la distribución de otro punto cualquiera.

De suerte que, sin resolver el problema de una manera exacta, parece que, ó es imposible ó es muy difícil que, aun estando los puntos en equilibrio, las tensiones sean nulas en general, que es, sin embargo, lo que suponen muchos autores.

***

Hemos supuesto hasta aquí una distribución discontinua de puntos; para los sólidos continuos, el problema á la vez se complica y se simplifica, y la hipótesis que antes hemos rechazado, parece que adquiere grados de probabilidad.

Permítasenos sobre este punto una sola observación.

Supongamos, figura 42, que el número de puntos materiales es tan grande que el plano elástico pp, por pequeño que sea, pase por muchos de estos puntos M, M', M''....., figura 42.

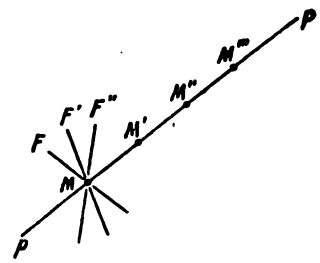


Figura 42.

En esta hipótesis, los dos casos que antes considerábamos, el del equilibrio de los puntos M y el de los planos elásticos coinciden ó tienden á coincidir; y como todos estos puntos M, M', M'' están en equilibrio, y como á la vez suponemos que todos están en el plano elástico, la resultante para gran nú-

mero de éstos, y aplicando la ley de continuidad para todos ellos, será nula.

De donde resulta que en estas hipótesis se comprende que la falta de fuerzas exteriores puede traer consigo la anulación de las tensiones.

Pero el problema es aún más complejo.

En las lecciones profesadas en Stokolmo, en Febrero y Marzo del aña 1906, sobre integración de ecuaciones diferenciales parciales, lecciones explicadas á invitación del Rey de Suecia, por el eminente profesor de la Universidad de Roma, Sr. Volterra, se presenta un ejemplo sumamente sugestivo.

Supongamos, figura 43, un anillo, 0, de una substancia elástica.

Supongamos que no está sujeto á fuerzas exteriores y que las tensiones interiores sean nulas.

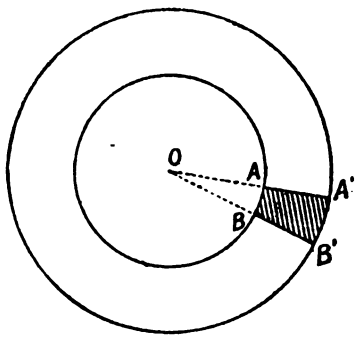


Figura 43.

Cortemos en este anillo una parte radial AA' BB'.

Y forzando lo que sea necesario el anillo, que será poquísimo, si el ángulo es muy pequeño, imaginemos que se unen, digámoslo así, por una soldadura molecular, las caras AA' BB'.

Se comprende intuitivamente, que en el interior del anillo se establecerán tensiones, que tenderán á darle su forma primitiva ó una forma aproximada.

Luego tendremos *un sólido elástico, que no estará sujeto á fuerzas exteriores y en el que las tensiones interiores no serán nulas*, contra la hipótesis que admiten muchos autores.

El ilustre profesor estudia matemáticamente este problema, distingue la forma cíclica de la forma acíclica, y en el primer caso deduce que, aun siendo nulas las fuerzas exteriores y

estando en equilibrio el cuerpo, pueden no ser nulas las tensiones, y que, por lo tanto, pueden no estar determinadas, es decir, pueden no ser *únicas*, si el cuerpo no es de conexión sencilla.

No podemos estudiar, sin embargo, la Memoria del insigne profesor Volterra, porque dicho estudio nos separaria mucho de nuestro objeto.

Perdónesenos aun así esta larga digresión, y volvamos al objeto principal de la conferencia.

***

Demostramos que las N y la T, componentes de las tensiones, se podían expresar por las siguientes fórmulas:

$$\left.\begin{array}{l} N_1 = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + B_1 b_1 + B_2 b_2 + B_3 b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} (3')$$

en las que admitimos que las constantes C sean nulas.

Los coeficientes, en general, si bien para un punto y para la región infinitamente pequeña que le rodea deben considerarse como constantes, serán variables de un punto á otro y serán en el equilibrio de un sólido elástico funciones de x, y, z.

Las cantidades a, b sabemos que están expresadas en función de las derivadas de las deformaciones, de este modo:

$$a_1 = \frac{du}{dx}, \quad a_2 = \frac{dv}{dy}, \quad a_3 = \frac{dw}{dz}; \quad 2b_1 = \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz};$$

$$2b_2 = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}; \quad 2b_3 = \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy};$$

por eso hemos dicho que las fórmulas (3′) expresan las tensiones en función de las deformaciones.

De aquí resulta que el problema de la Elasticidad queda virtualmente resulto con lo dicho. Por que, como ya hemos indicado varias veces, y por lo que explicaremos detenidamente en otras conferencias, ya no queda más que establecer las ecuaciones de equilibrio de una porción infinitamente pequeña del sólido, ecuaciones en que entrarán las fuerzas que actúan sobre las caras, siendo dichas fuerzas precisamente las tensiones; y substituyendo en vez de las tensiones los valores que expresan las fórmulas (3′), tendremos un sistema en el que entrarán las derivadas de las deformaciones.

Integrándolas obtendremos, en función de los datos, los valores de u, v, w.

Pero el problema en esta forma es de una dificultad enorme.

En primer lugar, entran las nueve derivadas primeras de u, v, w con relación á x, y, z; además, como veremos más adelante, entran las derivadas segundas y, en rigor, no conocemos los coeficientes A, B, ni es fácil conocerlos, porque todos ellos son funciones de x, y, z. Así, pues, con esta generalidad, el estado actual de la Ciencia no permite abordar tal problema.

Es preciso que nos contentemos con casos más sencillos, y aun así resultarán inmensamente difíciles.

En primer lugar, tenemos que desechar el caso general, en el que los coeficientes A, B son funciones de x, y, z; y esto prescindiendo de otros problemas aún más difíciles, en que pudieran depender del tiempo.

Supondremos, pues, en adelante, que los sólidos elásticos que vamos á estudiar, son homogéneos, entendiendo la homogeneidad como la explicábamos geométricamente en el curso anterior. Es decir, que supondremos que los coeficientes A y B son constantes, los mismos por lo tanto, para todos los puntos del cuerpo.

Así, estudiar un punto dado en *un sistema de ejes*, es estu-

diar otro punto cualquiera referido á ejes paralelos á los primeros.

Como decíamos en el curso anterior, el cuerpo coincide consigo mismo (prescindiendo de las superficies límites) en los movimientos de tráslación.

De suerte, que los coeficientes A, B serán constantes para todos los puntos del cuerpo, con tal que los ejes se conserven paralelos á sí mismos.

Si los ejes cambian de dirección, aun conservándose rectangulares, las constantes A y B cambiarán también; mas para todos los puntos del sólido elástico y para la misma dirección de ejes, conservarán el mismo valor numérico. Si bien serán distintos de los del primer sistema.

Claro es que, resuelto el problema, y conociendo A y B para un sistema de ejes, por un cambio de coordenadas podrán deducirse los nuevos valores de A y B en función de los primitivos y de las magnitudes que determinan los nuevos ejes con relación á los primeros.

De todas maneras, el ser constantes los coeficientes, simplifica mucho el problema.

***

Como, así y todo, el problema es inmensamente difícil, aun se introduce otra simplificación, á saber: se supone que el sistema es isótropo.

Tomándolo en toda su generalidad, suponiendo que A, B sean funciones de x, y, z, ya lo hemos dicho, la dificultad es insuperable, salvas raras excepciones, no sólo para las integraciones posteriores, sino aun para la determinación de los mismos coeficientes A, B, á no ser que la ley de dichos coeficientes sea uno de los datos del problema.

En el método de Cauchy, si bien es cierto que, en rigor, no hay más que una función desconocida, á saber: la que expre-

sa la ley de las acciones recíprocas en función de la distancia, función que en esta hipótesis es única, y se comprende que experimentalmente, por difícil que sea, pudiera determinarse; aun así, siempre quedará otro dato para conocer la constitución del cuerpo: el valor de las masas y la distribución inicial de éstas.

Y en todo esto, suponemos que se admite la hipótesis de las fuerzas centrales que, de no ser así, hay que acudir al método de Poincaré, que me propongo explicar en el curso próximo, substituyendo á dicha hipótesis de las fuerzas centrales otra hipótesis más general, la de la conservación de la energía.

Pero no debemos anticipar las ideas.

***

En resumen: hemos obtenido las seis componentes ó las seis cantidades N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 en función lineal de las seis deformaciones elementales a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, sin término independiente.

Hemos resuelto, por lo tanto, este problema: expresar las tensiones en función de las deformaciones; pero como el problema resulta de una dificultad inmensa, en la conferencia próxima introduciremos, como queda dicho, varias hipótesis que lo simplifiquen, y éstas serán: suponer el cuerpo homogéneo y suponer el cuerpo isótropo.

XXXIV. — Función de las fibras centrípetas respiratorias del nervio pneumogástrico.

POR JOSÉ GÓMEZ OCAÑA.

Los cambios de presión y de composición del aire en los pulmones, más los primeros que los segundos, engendran, por excitación de las terminaciones sensitivas del pneumogástrico, corrientes centrípetas que dicho nervio descarga en los centros respiratorios de la médula oblonga, y que, por acción refleja, modifican el ritmo y la amplitud de los movimientos de inspiración y espiración.

La función centrípeta respiratoria de los pneumogástricos se ha deducido, con repetición y por muchos experimentadores, de los efectos de la sección y excitación de los mismos nervios. Hay acuerdo, casi completo y unánime, respecto á las consecuencias de la doble vagotomía; más se discuten los efectos de la excitación de los nervios pneumogástricos.

En esta discusión, apoyaremos nuestro criterio en nuestros propios experimentos practicados durante estos últimos años en el laboratorio de Fisiología de la Facultad de Medicina de Madrid, y aduciremos como pruebas las gráficas que ilustran este trabajo, obtenidas también en nuestros experimentos. En ellos nos han auxiliado el Dr. Menéndez Potenciano y el interno Sr. Medina.

Si se traqueotomiza un perro, y á favor de un tubo de caucho se pone en comunicación la cánula traqueal con un tambor de Marey, las oscilaciones de la presión del aire, en el árbol aéreo, se traducirán por la palanca escribiente, elevándose en la espiración y descendiendo en la inspiración. Pero, enseguida, la sofocación y la asfixia modificarían el ritmo respiratorio, y para evitarla, se intercala en esta espe-

cie de circuíto gaseoso, un frasco de 10 á 15 litros de capacidad, conteniendo en su mitad (poco más ó menos) aire para que el animal respire, y en el resto de su cabida, agua, ó, mejor, una disolución de potasa para la absorción del anhídrido carbónico espirado. No está de más advertir que, salvo la comunicación con la tráquea y el tambor, debe estar el frasco herméticamente cerrado y que el aire ha de renovarse las veces que se crea necesario, según la duración del experimento.

En todos los que se mencionan, en este escrito, la excitación se verificó aplicando la corriente inducida al cabo cen-

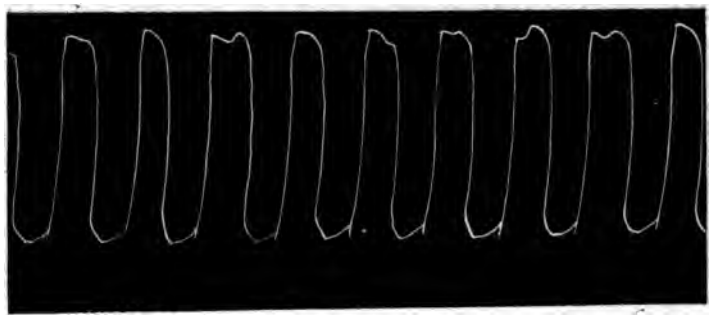


Figura 1.ª — Ritmo respiratorio de un perro anestesiado con el cloroformo, después de la sección de un nervio pneumogástrico. (La gráfica está reducida á los $^3/_4$ próximamente de sus dimensiones.)

tral de cualquiera de los pneumogástricos, porque siempre precedió la sección á la excitación de los nervios. Como corriente inductora, empleábamos la urbana é intercalábamos en el circuíto, á guisa de resistencia, una lámpara incandescente, y también en muchos casos, el cronógrafo de láminas vibrantes, construído por Kagenaap, de Utrech. En las gráficas obtenidas con el empleo de este aparato, sus vibraciones marcan el tiempo de la excitación; en otras, las letras *E* y *F* señalan, respectivamente, el principio y fin de la misma. Graduábamos la intensidad de la corriente excitante con la aproximación ó alejamiento de las bobinas (inductora é induci-

da), y considerábamos como máxima la que excitaba el nervio cuando la bobina inductora estaba completamente incluída en la inducida.

Dispuestas así las cosas, y obtenida una gráfica respiratoria normal para que sirva de tipo de comparación, se secciona uno de los nervios vagos, en el cuello, y nótase inmediatamente un cambio en el ritmo respiratorio. En la gráfica 1.ª pueden verse los movimientos respiratorios disminuídos en números y exagerados en su amplitud.

La sección del segundo nervio pneumogástrico exagera aún

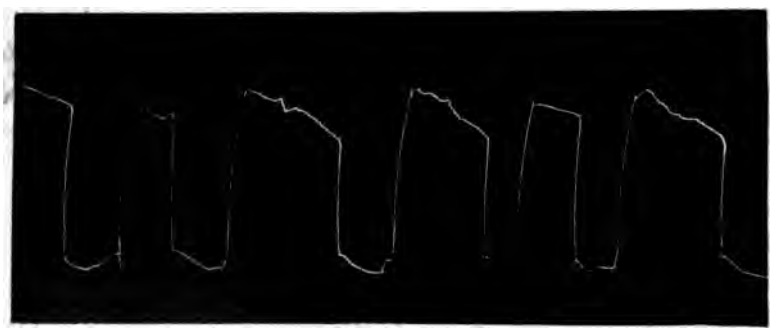


Figura 2.ª — Respiración del mismo perro después de la doble vagotomía. (La gráfica está reducida á los $^2/_3$ de sus dimensiones.)

más la lentitud y profundidad de los movimientos respiratorios: obsérvese en la gráfica 2.ª, cómo decrece el número de movimientos respiratorios con relación al trazado de la 1.ª, y cómo las inspiraciones son mucho más durables que las espiraciones. Por la simple inspección del animal, nótase la respiración enrarecida, profunda y ruidosa.

Menos exageradas, aunque muy notables, se ofrecen análogas modificaciones del ritmo respiratorio en los conejos, á consecuencia de la sucesiva sección de uno y otro nervio pneumogástrico, y como prueba, ofrecemos la gráfica representada en la figura 3.ª, en la que se muestran los efectos de

la simple y doble vagotomía, practicadas seguidamente en un conejo anestesiado con el hidrato de cloral.

En este punto no hay para qué hacer cuestión de si los animales pueden sobrevivir mucho tiempo á la sección de ambos nervios pneumogástricos, porque en los perros la tenemos resuelta experimentalmente en sentido afirmativo (*).

También Nicolaides, habiendo logrado la supervivencia de los perros después de la sección de los dos nervios vagos en dos operaciones, separadas por un lapso de algunos meses, ha conseguido el mismo efecto en los conejos, mediante un rodeo experimental, que consistió en la extirpación aséptica del pulmón derecho, y cuando el animal se

Figura 3.ª — Modificaciones del ritmo respiratorio por la sucesiva sección del vago izquierdo (*S V Y*) y del derecho (*S V D*) en un conejo. (La gráfica está reducida á la mitad próximamente de sus dimensiones.)

encontraba restablecido le seccionaba el vago izquierdo; inmediatamente después de esta sección, el animal respiraba como los que han sufrido la doble vagotomía (**).

Mas no transcurre mucho tiempo sin que se restablezca la regularidad respiratoria, hondamente perturbada por la doble vagotomía, si bien, como recuerdo perdurable de ella, conserva el animal la afonía y cierta falta de acomodación á las excitaciones extraordinarias; así, por ejemplo, los perros se sofocan enseguida si corren ó juegan, y otro animal de esta misma especie murió en nuestro laboratorio, sin causa

(*) Gómez Ocaña. Comunicación al XIV Congreso Internacional de Medicina.—Madrid, 1903.

(**) R. Nicolaides. *Das Ueberleben von Kanincheu nach Ausschaltung beider Lungenvagi. Siebenter inter. Physiol Congress.* — Heidelberg, 1907.

aparente (probablemente por hipertemia), en un día calurosísimo de Agosto de 1903, á los seis meses de haber sufrido la doble sección de los pneumogástricos. Los perros se defienden del calor con la polípnea, y es posible que los vagotomizados no puedan ejercitar este recurso fisiológico.

Si después de seccionados uno ó los dos nervios vagos se excita el cabo central de cualquiera de ellos, obsérvase, por lo general, que la respiración, enrarecida y profunda á consecuencia de la doble vagotomía, se acelera y disminuye

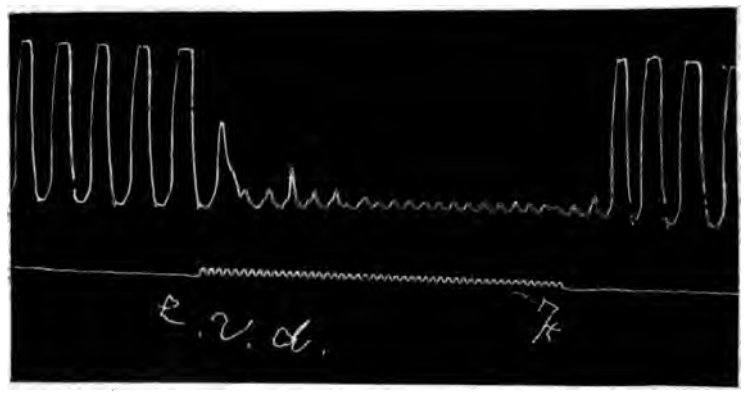


Figura 4.ª — Aceleración respiratoria, en un conejo, por excitación tarádica del cabo central del nervio vago derecho (*e v d*). (La gráfica aparece reducida á los $^2/_3$ de sus dimensiones.)

de amplitud, y á medida que la excitación aumenta de intensidad, crece el número de movimientos respiratorios hasta que la respiración se suspende en inspiración.

Nótese en la gráfica representada en la figura 4.ª la aceleración respiratoria que se sigue á la excitación del cabo central de uno de los nervios vagos; en el experimento de referencia fué el vago derecho el que se excitó pocos minutos después de haber sido seccionado, y nótese como al mismo tiempo que se aceleran, disminuyen de amplitud los movimientos respiratorios, tendiendo á la suspensión inspiratoria. Esta se consigue cuando se aumenta mucho la excitación,

como lo testifican las gráficas representadas en las figuras 5.ª y 6.ª

Las dos gráficas se refieren á perros distintos poco después

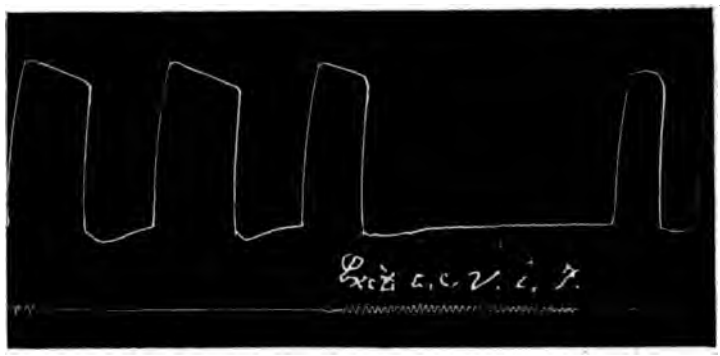


Figura 5.ª—Suspensión inspiratoria ocasionada por la excitación uerte del cabo central del vago izquierdo en un perro (8/5 del tamaño natural).

de haber sufrido la doble sección de los pneumogástricos, y en los dos nótase la suspensión inspiratoria después de la res-

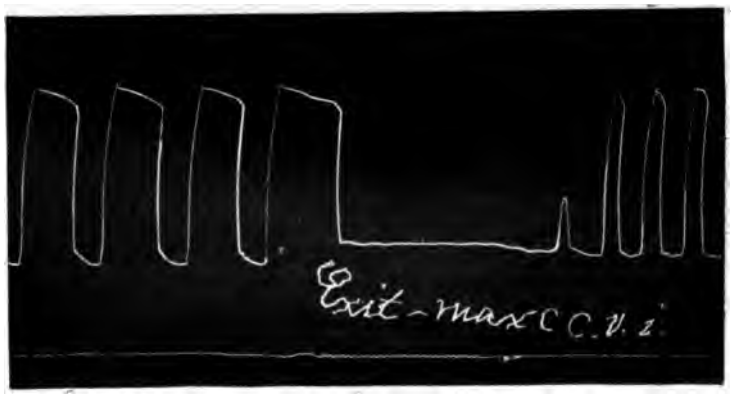


Figura 6.ª—Efectos inspiratorios de la excitación del cabo central del vago izquierdo, en un perro, después de la doble vagotomía. (Gráfica reducida á la mitad próximamente.)

piración característica en los animales vagotomizados; mas con una diferencia. En la gráfica 5.ª no es máxima la corriente excitante del vago, y después de la excitación vuel-

ve á caer la respiración en el tipo pneumogástrico, mientras que en la 6.ª la corriente es máxima y el ritmo respiratorio se normaliza después de haberse suspendido en inspiración.

Convienen, en general los autores, en los hechos así sencillamente referidos; mas como ocurre que por excitación de los nervios pneumogástricos se producen á veces fenómenos espiratorios y hasta suspensiones respiratorias, en la fase de espiración, truécase la sencillez en complicación y se dividen las opiniones de los fisiólogos.

Una de las más antiguas y extendidas concede á los nervios vagos influencia centrípeta sobre los movimientos de

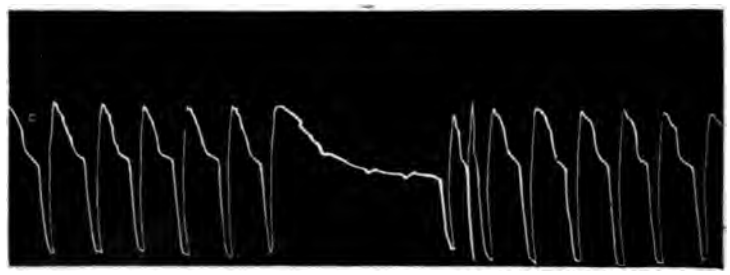


Figura 7.ª—Suspensión espiratoria por excitación del cabo central del vago derecho en un perro anestesiado con una mescla éter-clorofórmica. (Reducción á los $^2/_3$.)

inspiración y espiración, si bien especializa la última en una de sus ramas, en las fibras del laríngeo superior ó nervio de la tos. Mas esta especialidad no puede sostenerse, al menos con carácter exclusivo, cuando muchos experimentadores hemos observado efectos espiratorios por la excitación del tronco del vago. Nosotros hemos observado efectos espiratorios, tanto en los animales anestesiados como despiertos, y ejemplos de lo uno y de lo otro ofrecemos en las gráficas de las figuras 7.ª y 8.ª, siendo de notar, en la primera, la caída de tono al final de la suspensión espiratoria; y la aceleración que precede y sigue, en la segunda, á la excitación del cabo central del pneumogástrico.

Las muchas opiniones que se han emitido acerca de la función centrípeta respiratoria de las fibras del pneumogástrico, pueden seleccionarse en tres grupos:

1.° El nervio vago contiene dos clases de fibras centrípetas, inspiratorias las unas y espiratorias las otras (Hering, Schenck, Meltzer).

2.° La función centrípeta normal de los vagos es francamente inspiratoria; los efectos espiratorios, observados algunas veces, se deben á la anulación de las fibras inspiratorias

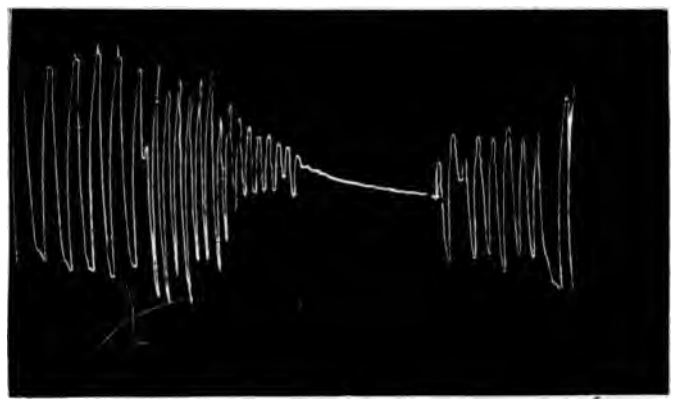


Figura 8.ª — Suspensión respiratoria por excitación del cabo central del vago en un perro despierto. (Reducción á los $^2/_3$ próximamente.)

por la acción de los anestésicos (L. Fredericq), por la degeneración (R. Nicolaides) ó por la fatiga.

3.° La función de los pneumogástricos no es inspiradora en las condiciones normales (Gad y Schenck), ni tampoco fisiológicamente espiradora, sino sencillamente inhibitoria de la inspiración. Para promover la inspiración se bastan los centros bulbares, aguijoneados por el anhídrido carbónico de la sangre, y la acción centrípeta de los vagos tiene por objeto poner fin á la inspiración para que la espiración pueda verificarse (M. Arthus).

A estas tres opiniones, sumariamente expuestas, opongo las gráficas de las figuras 7.ª y 8.ª, en las que se ven sus-

pensiones espiratorias determinadas por excitación del cabo central del vago en perros anestesiados y despiertos, y las de las figuras 9.ª y 10, en las que se observan doble suspensión espiro-espiratoria.

Llamamos la atención sobre la significación de entrambos

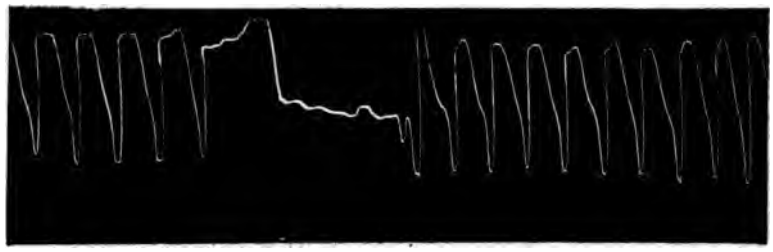


Figura 9.ª — Doble suspensión espiro-inspiratoria por excitación del cabo central del vago derecho en un perro anestesiado. (Tamaño del original.)

experimentos, porque lo mismo en los animales anestesiados por la mezcla éter-clorofórmica (gráfica 9.ª) que en los que ya se habían despertado de la anestesia (gráfica 10), se

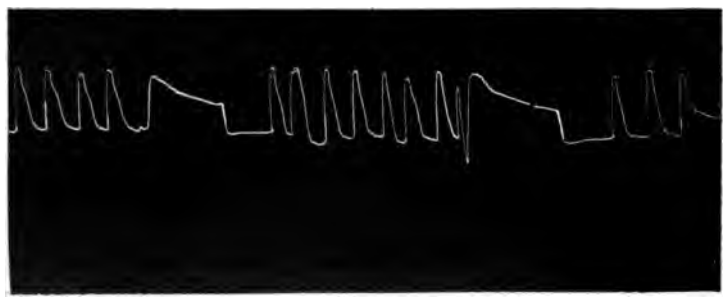


Figura 10. — Suspensiones espiro-inspiratorias observadas por excitación del cabo central del vago en un perro vuelto de su anestesia. (Reducción á los $^2/_3$ del tamaño del original.)

producen en un solo acto, y á consecuencia de una excitación, los dos fenómenos espiratorio y inspiratorio discutidos por los autores. Aquí no pueden invocarse en favor del primero ni la anestesia ni la fatiga, pues en las mismas cir-

cunstancias se producen juntamente la espiración y la inspiración.

Tampoco puedo avenirme con las conclusiones que Nicolaides comunicó al VII Congreso internacional de fisiólogos celebrado en Bruselas. Decía el Profesor de Atenas que únicamente había observado fenómenos espiratorios cuando excitaba con fuertes corrientes de inducción el cabo central del nervio vago en los conejos, á los cuales dos meses antes, por lo menos, se les habían seccionado entrambos nervios

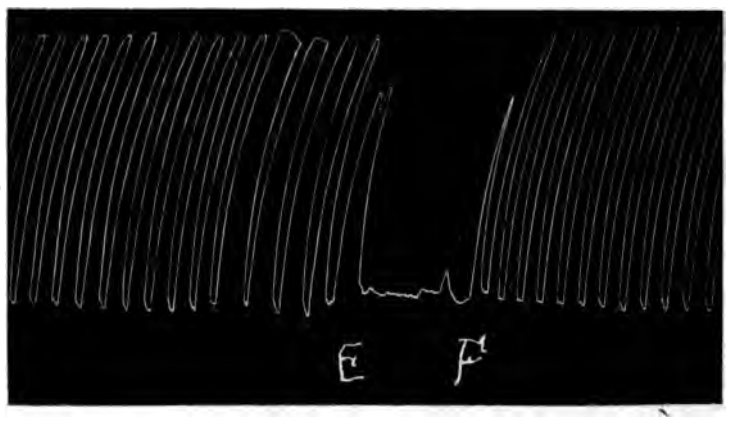


Figura 11.—Efectos inspiratorios producidos en un conejo anestesiado, con el hidrato de cloral, por excitación del cabo central del nervio vago derecho, á los cincuenta y seis días de la doble sección de los pneumogástricos.

pneumogástricos y en los que ya probablemente habían degenerado las fibras inspiradoras (*).

Los argumentos experimentales que me separan de la opinión del Profesor Nicolaides aparecen claramente expresados en la gráfica de la figura 11, en la que se ven los efectos inspiratorios de la excitación del vago en un conejo á los cincuenta y seis días de la sección del dicho nervio.

También observamos efectos inspiratorios, por excitación

(*) R. Nicolaides. *Ueber die im vagus enthaltenen zentripetalen. Fasser welche auf das Atemzentrum wirken.* Bruxelles, 1904.

de los cabos centrales de los nervios pneumogástricos, en un perro, operado de doble vagotomía, treinta y ocho meses antes; desgraciadamente, las gráficas de este notable experimento se nos han traspapelado y confundido con otras muchas obtenidas en la misma época.

Favorables á la acción inhibitoria, que se supone en los nervios vagos, son los experimentos de Garrelon y Langlois, puesto que en los perros, en estado de polipnea térmica central, la sección de los vagos acelera aún más el ritmo polipneico; mas ni este fenómeno es constante ni conviene, á los efectos de la teoría inhibitoria, con el hecho de no acelerarse el ritmo, ó retardarse (como en los animales no polipneicos) cuando en los afectos de polipnea se seccionan los vagos después de enfriar la sangre carotídea que va á regar el bulbo. En los experimentos de los citados autores, el enfriamiento de la sangre carotídea con agua fría (alrededor de 0 grados) en los perros, artificialmente puestos en estado de polipnea térmica y con temperatura de 41° c. y más, en el recto, produce notable aceleración, precedida de ligero y fugaz enrarecimiento de los movimientos respiratorios. En uno de los experimentos, era el ritmo polineico de 215; cayó á 200 en los primeros veinte segundos de la acción del agua fría, y se elevó enseguida hasta 350. Pues bien, la sección de los pneumogástricos suprime esta acción local del agua fría sobre la médula oblongada.

La sección fisiológica de los nervios vagos á favor de una corriente electrotónica continua, ha producido, en manos de los citados autores, los mismos fenómenos que la sección anatómica, siendo de notar el efecto tónico espiratorio que acompaña, algunas veces, á la aceleración respiratoria que en los animales polipneicos determina la anulación funcional de los vagos (*).

(*) L. Garrelon et J. P. Langlois. *Etude sur la polypnée thermique. Jour. de Phys et Path.*, núm. 2, 1906; núm. 4 et 6, 1907.

RESUMEN

A mi juicio, en la interpretación de los hechos se ha concedido más atención á las fibras centrípetas que á los centros respiratorios del bulbo en donde van á descargar sus corrientes: éstas llegan á la médula oblongada con la raíz sensitiva del nervio vago y pueden derivarse á los núcleos inspiradores ó espiradores y á unos y otros, según su intensidad y las facilidades que ofrezca á su transmisión el estado de las prolongaciones nerviosos de las neuronas con las que se ponen en relación las fibras de la dicha raíz; ésta, en efecto, constituyendo el manojo ó fascículo solitario, se relaciona con los núcleos grises que le son adyacentes y con el ganglio, que puede considerarse como centro respiratorio (ganglio comisural de Cajal). Hace mucho tiempo que pienso que la suerte de los efectos que sobre el corazón ejercen las corrientes nerviosas afectivas que descienden del cerebro, dependen de su derivación hacia los núcleos inhibitorios de la médula oblongada ó aceleradores de la espinal, y de igual suerte, los efectos centrípetos de la excitación de los vagos dependerán de la manera como se extiendan y deriven por los núcleos bulbares. Y concluyo aquí, en análogos términos á los que empleé en mi comunicación al VII Congreso internacional de fisiólogos: si suponemos que la anestesia, el dolor, la temperatura, la asfixia y los venenos, influyen en el plan de distribución de las corrientes centrípetas que llegan al bulbo, por las raíces sensitivas de los nervios vagos, nos explicaremos la variedad de los fenómenos que se siguen á la excitación de los mismos (*).

(*) Gómez Ocaña. *Recherches sur les fibres centripetes inspiratrices et espiratrices des vagues. Siebenter internationaler Physiologen-Congress. Heidelberg, 1907.*

¿Los pneumogástricos influyen normalmente, por sus fibras centrípetas, en el ritmo y amplitud de los movimientos respiratorios? Opinemos por la afirmativa, aun teniendo presente el restablecimiento de la normalidad respiratoria en los animales afectos de doble vagatomía, pues cabe que los nervios se regeneren ó sean suplidos, por otros, en sus funciones. La que los pneumogástricos ejercen cerca de los centros respiratorios, *aunque normal no es constante,* y puede compararse á la encomendada á las fibras inhibitorias de los mismos nervios respecto al corazón: entrambas son funciones de perfeccionamiento cuya falta se denuncia por graves alteraciones (aceleración cardíaca y rareza y profundidad respiratoria); mas, al cabo, estos síntomas se desvanecen y los animales recobran la regularidad de la circulación y la respiración.

XXXV.—Mareómetros y mareógrafos de sifón.

POR EDUARDO MIER Y MIURA.

21.—Mareómetros-testigos. Niveles.

Uno de los varios defectos que los usuales mareógrafos tienen, puede producir groseros errores, imposibles de conocer desde el gabinete, y deja sentir su influjo con sobrada frecuencia; defecto que consiste en que, por descuido, se corran los eslabones de la cadena que sujeta el flotante, originándose así un error constante y sistemátieo en todas las ulteriores observaciones, calculadas en una hipótesis falsa acerca de la longitud de la cadena.

Este mismo error prodúcese á veces automáticamente, no por correrse la cadena, sino por abrirse sus eslabones, con el

continuo esfuerzo que sufren, suceso nada extraño, ya que el grueso de éstos debe procurarse que sea el menor posible, para disminuir así cuanto se pueda el efecto perjudicialísimo de la inercia.

Es, por lo tanto, de gran interés poder conocer desde el gabinete cuándo se presentan semejantes errores, y no deja de tener importancia que los mareómetros de sifón puedan testificar el buen ó mal funcionamiento de los mareógrafos, porque esta aplicación, por sí sola, justificaría plenamente su utilidad, evitando hacer cálculos de resultados ilusorios y dando medios para corregirlos prontamente.

Se comprenderá, con lo expuesto, que un mareómetro-testigo se reduce no más que á cualquiera de los ya descriptos, sin otra variación, al instalarlos, que la exigencia de haber de sumergir su tubo de plomo en el agua del pozo del maréografo y no en el mar libre.

Todavía puede prestar ese mismo mareómetro otro servicio no menos importante, porque, utilizando la misma tabla é idéntica escala que para aquél sirva, cabe disponer á su lado otro tubo mareométrico, cuyo extremo vaya á sumergirse en el mar libre, y de este modo las oscilaciones de ambas columnas líquidas indicarán el retraso con que penetra el agua en el pozo del mareógrafo, y servirán de guía segura para acudir á la limpieza del tubo de conducción antes de que se encuentre obstruído en términos que pueda perjudicar demasiado á los trazados mareográficos.

En realidad, el aparato que acabamos de describir sirve para indicar constantemente la diferencia de nivel que entre las aguas del pozo del mareógrafo y las del mar existe, y claro es que pudiera emplearse, modificándole convenientemente, para determinar las diferencias de cotas entre dos puntos no muy alejados entre sí.

Uno de los aparatos que con ese objeto pudiera usarse, es el que representa la figura 13, en la que *abc* es un tubo barométrico, en *u*, fijo sobre la tabla *AB; de* y *fg*, tubos de

caucho; *m* y *n* depósitos de agua, cuyo diámetro es de uno y medio ó dos decímetros; *r* un nivel esférico, y *c* un pie para apoyar el aparato en el suelo, colocándole próximamente vertical.

Entre las dos ramas del tubo barométrico hay una regla graduada, en la que pueden apreciarse las alturas de las co-

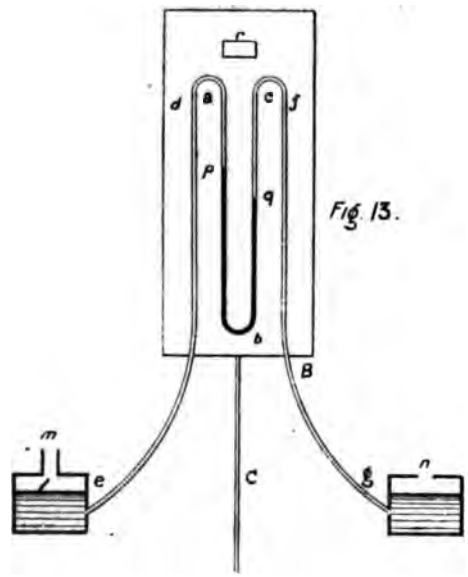


Fig. 13.

lumnas de mercurio *bp* y *bq*, cuya diferencia mide el desnivel que entre los líquidos de *m* y *n* existe.

La proximidad de los tubos *ab* y *bc*, permitirá prescindir, en la mayor parte de las aplicaciones, de los errores que en sí lleva la falta de verticalidad de la tabla *AB*, toda vez que serían necesarias grandes inclinaciones para que se hicieran sensibles en las diferencias de lecturas de la escala.

La práctica demostraría hasta dónde era conveniente alargar los tubos de caucho *de* y *fg;* pero desde luego parece que una longitud de 25 ó 30 m., para cada uno, no es exagerada, consiguiéndose de este modo efectuar niveladas

de 50 ó 60 m., y debiendo tenerse presente que esos mismos tubos pueden utilizarse para la estimación aproximada de las distancias.

Si no con gran precisión, al menos con la que exigen la casi totalidad de los trabajos prácticos, puede nivelarse rápidamente con el aparato que acabamos de describir, sin poseer grandes conocimientos topográficos, teniendo, además, la ventaja de abreviar los trabajos de campo y de gabinete, y siendo, por otra parte, de reducidísimo precio. A estas condiciones cabe agregar las no despreciables de poder emplearse en terrenos muy quebrados y pendientes, en donde otros instrumentos fracasarían, y la de hacer posible las nivelaciones, aun cuando entre los puntos nivelados existan obstáculos que impidan la recíproca visibilidad.

Estableciendo una de las cubetas en el punto más alto del terreno, y moviendo la otra en torno de aquélla, de modo que permanezca constante la situación de las dos columnas de mercurio, quedará trazada una curva de nivel á la distancia vertical que se tenga por conveniente, dentro de muy amplios límites, y estableciendo la cubeta fija en puntos de esta primera curva, fácil será determinar los de la segunda, etcéra, etc., etc.

Las sencillas correcciones por temperatura se obtendrán fácilmente leyendo las indicaciones de un termómetro, que puede establecerse sobre la tabla AB, y se comprende que, complicando algo el aparato, puede exagerarse su sensibilidad, labor que no emprendemos por habernos propuesto tan sólo esbozar estas aplicaciones de los principios en que los mareómetros se fundan.

22.—Mareómetros de alarma.

Se desea frecuentemente, en las aplicaciones industriales de mareómetros y mareógrafos, que éstos sirvan para señalar cuándo se llega á un nivel determinado, y con el siste-

ma de aparatos de sifón que hemos descripto, fácilmente se llena ese fin, con independencia absoluta de la distancia que exista entre el punto en que se verifican los cambios de nivel y aquél en que han de recibirse las señales.

En un mareómetro *A* (fig. 14), provisto de una bolsa impermeable y lleno con un líquido cualquiera, poco ó nada conductor de la electricidad (aceites, agua destilada ó poco impura, etc., etc.) y mercurio, se introduce una punta metálica *a* á la altura del extremo de la columna de mercurio, que corresponde al mínimo nivel del líquido cuya señal desea obtenerse, y de una manera análoga se establece la comunicación eléctrica del mercurio con la tierra por medio de un alambre *c*, y la de la otra rama de mercurio con el alambre *b d*, siendo *b* la posición del extremo de la columna del referido metal, de la que se desea obtener noticia.

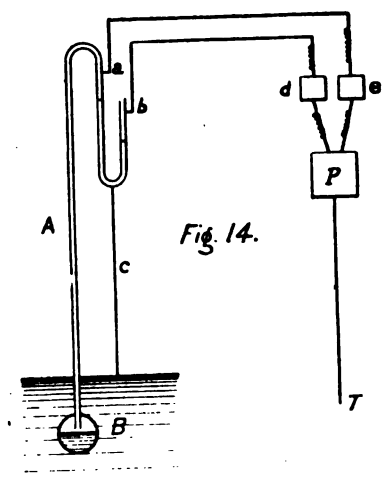


Fig. 14.

Cada uno de los dos alambres de línea que parten de los puntos *a* y *b* se enlazan á timbres *d* y *e* de diferentes sonidos, los cuales, á su vez, comunican con el mismo polo de una pila *P*, unida á tierra.

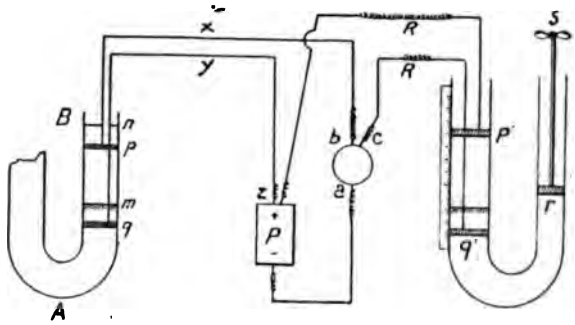
El mercurio, al llegar á sus posiciones extremas, cerrará automáticamente los circuitos *caePT* ó *cbdPT* y hará sonar los correspondientes timbres, indicando el peligro de que el nivel de las aguas exceda en uno ú otro sentido de los límites considerados como convenientes.

23.—Mareómetros eléctricos.

Una de las ventajas que el sistema de mareómetros de sifón ofrece es que pueden instalarse á distancias relativamente grandes de la orilla del mar, ya que teóricamente las presiones hidrostáticas se transmiten íntegras, cualquiera que sea la distancia.

Sin embargo, como las grandes distancias llevan consigo el aumento de la inercia de los aparatos, que retrasaría de considerable modo las fluctuaciones del nivel de las aguas,

Fig. 15.



cuando se trate de distancias superiores á 200 ó 300 metros podrá emplearse la disposición que vamos á describir, fácil de usar, sea la que quiera la separación que medie entre el punto en que se verifiquen las oscilaciones del líquido y aquel en que quieran observarse.

El sistema adoptado consta de dos aparatos: el transmisor y el receptor, unidos por una línea de alambre, doble.

El aparato transmisor (fig. 15) es un mareómetro ordinario, en cuya rama abierta *AB* se ha echado un líquido *m n* sobre el mercurio, mal conductor, relativamente, de la electricidad, tal como una disolución poco concentrada de sulfa-

to de cobre, de cloruro de sodio, de sulfato de cinc, etc., etc. Dentro de esa rama hay establecidas, en posición invariable, dos rodajas *p* y *q*, que no impiden la circulación de los líquidos y que se utilizan para que arranquen, de chapas metálicas puestas en ellos, dos alambres recubiertos, perfectamente aislados entre sí y con el líquido que los rodea.

Una parte del aparato receptor es idéntica á la descripta, sin más diferencia que estar substituída la rama del mareómetro, que va á sumergirse en el agua, por un trozo de ella, en que puede obrar el émbolo *rs*.

La pila *P*, establecida en la estación receptora, tiene unido uno de sus polos: el + por ejemplo, con el alambre de línea que corresponde á la rodaja *q* de la estación transmisora, y también con la *p'* de la receptora. Las chapas de las dos rodajas restantes *q'* y *p* están enlazadas con los dos polos *b* y *c* de un galvanómetro diferencial, y los otros dos polos de éste van unidos al negativo de la pila.

Resistencias, *R* y *R'*, intercaladas cual la figura muestra, hacen que las secciones de circuito *pxb* y *qyz* ofrezcan la misma dificultad al paso de la corriente que *zRp'* y *cR'q'*, siendo igual la suma de las resistencias eléctricas de este último par de trozos y de los anteriormente mencionados.

De ese modo, siempre que las dos resistencias *pq* y *p'q'* sean iguales, circularán por el galvanómetro dos corrientes idénticas y de sentido contrario, cuyos efectos sobre la aguja imanada se anularán, y cuando una de ellas prepondere el sentido de la desviación de esa aguja, indicará en qué dirección ha de moverse el émbolo *sr* para conseguir la igualdad entre *pq* y *p'q'*.

Con eso no hemos hecho más que reproducir, á muchos ó pocos kilómetros de distancia, una imagen aproximada de lo que en el mareómetro pasa á orillas del mar, de modo que la lectura hecha en la rama *p'q'*, equivaldrá aproximadamente á la que hubiésemos hecho sobre *pq*.

Puede introducirse en este aparato multitud de variaciones que nada de lo substancial alteren, y entre ellas cabe la de aplicar á las corrientes el sistema del puente de Weahstone, siendo iguales las resistencias de los dos brazos fijos, $yqpx$ la variable que ha de medirse y $R'q'p'R'$ la usual caja de resistencias.

Fig. 16.

Aún se podría simplificar la aplicación de ese sistema haciendo móviles las chapas q, substituyéndolas por un flotante q'' (fig. 16), y reduciéndose la parte $p'q'rs$ de la estación receptora á un simple tubo lleno del líquido resistente y con una de las dos rodajas móviles, que se llevaría á ocupar la necesaria posición para obtener la equivalencia de resistencias eléctricas buscada.

24.—Medimareómetros.

No conocemos más medimareómetro que el del eminente geodesta, Mr. Lallemand, autor de la primera teoría acerca de tales aparatos que, gracias á su baratura, se han extendido rápidamente por Francia y por Italia.

Recordemos que, en principio, consiste ese medimareómetro en un tubo de fundición, que se introduce verticalmente en el agua del mar y que en su extremidad inferior lleva un tabique ó diafragma poroso, que deja salir y entrar el agua en aquél difícilmente, siendo la cantidad de ésta que existe en el tubo función del tiempo en que ha estado penetrando ó saliendo, de la porosidad del diafragma y de las alturas que el agua exterior ha tomado.

Recordemos también que la altura que el agua toma en el tubo se mide introduciendo en él una sonda cubierta de papel, sensible á la acción del agua del mar, y aparecerán ya los dos principales defectos que, en nuestra opinión, tiene el

medimareómetro de Mr. Lallemand: lo enojoso y poco preciso de estas mediciones, y, sobre todo, la variable porosidad que el diafragma ha de presentar en el transcurso del tiempo.

El inconveniente de las mediciones puede subsanarse desde luego sin más que introducir en el tubo del medimareómetro el de plomo de un mareómetro de los que describimos en este trabajo, puesto que desaparece la operación del sondeo, que queda reducida á una simple lectura, que, de todos modos, había de practicarse sobre la sonda.

En cuanto al capital defecto de lo variable que ha de ser la resistencia que al paso del agua de mar ofrece el tabique poroso, inútil es, á nuestro entender, que trate de negarse ó de disminuirse, porque es del dominio de todo el mundo que los filtros corrientes (y esto vienen á ser, en su esencia, los medimaréometros de que hablamos), se ensucian en tales términos, á pesar de operar con aguas relativamente limpias, respecto á las del mar, que el poder filtrante disminuye rápidamente y han de limpiarse con frecuencia.

Y no puede acontecer otra cosa, dígase lo que se quiera, en los medimareómetros de Mr. Lallemand, porque si el agua de mar, rica en toda suerte de impurezas, concluye por obturar los tubos rectos de grandes diámetros, ¿qué no hará con esa inextricable red de conductos microscópicos que, con su conjunto, dan el poder filtrante á los diafragmas?

Contribuyen á verificar esa obturación, de una parte, las mil partículas de substancias inertes que el agua de mar acarrea, y de otra, los micro-organismos, vegetales ó animales, que, detenidos en las encrucijadas de los conductos ultracapilares de la substancia filtrante, se aposentan en ellos, crecen y se reproducen, convirtiendo á ésta con el tiempo en una materia perfectamente impermeable.

Veamos cuán fácilmente se remedian todos esos inconvenientes con los medimareómetros en sifón, bien tengan de común con el de Mr. Lallemand el aprovecharse de diafragmas filtrantes, ó bien se recurra á algún otro artificio.

Ya resultaría más barato y cómodo que emplear el medimareómetro de Mr. Lallemand, usar uno de estos mareómetros que describimos, sin otro aditamento que proveer el extremo del tubo de plomo, que en el agua queda, de su correspondiente tabique poroso.

Pero de ese modo sólo resulta anulado el defecto de los sondeos, mas no en modo alguno el de la pérdida de porosidad de la substancia filtrante.

Para remediar este esencial defecto, atemos perfectamente al extremo *D* del tubo (fig. 17) una bolsa ó saco impermeable *E*, en cuyo interior claro es que queda la substancia filtrante *F;* antes de echarle al mar, llenemos todo el mareómetro *ABCDE* de un líquido estéril cualquiera: de agua, que es barata, por ejemplo, después de haberla filtrado por bizcocho de porcelana Chamberland ó de pasta de amianto, y después de haberla hervido para matar los micro organismos vivos que puedan quedar, echando además en ella un poco de sublimado corrosivo para evitarnos el peligro, ya muy remoto, de ulteriores generaciones de seres.

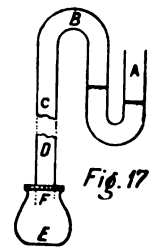


Fig. 17

La bolsa *E*, cuyas superficies interna y externa estarán siempre á igual presión, comunica ésta al medimareómetro de sifón, que funcionará ya en condiciones muy superiores, respecto á su constancia, que si no hubiéramos tomado las precauciones indicadas, siendo de recomendar, para darse cuenta de las posibles roturas de esa bolsa, teñir ligeramente el líquido con anilina y elegirle algo más denso que el agua de mar, indicando entonces la disminución de color la fractura de la bolsa *E*.

Claro es que este expediente de usar la bolsa *E* y echar dentro del medimareómetro líquido estéril, también puede adoptarse en los medimareómetros Lallemand, y con ello creemos que ganarían mucho; pero de todos modos, es en los de sifón una garantía más la incomunicación que resulta entre el líqui-

do *EDCB* empleado y el aire, que, como es sabido, tan rápidamente siembra seres microscópicos en los líquidos que con él están en contacto.

Tanto en estos medimareómetros como en los de Mr. Lallemand no es fácil vigilar el diafragma filtrante ni puede hacerse su reposición sin desmontar el aparato. Veamos si también, y empleando siempre recursos sencillos, puede hacerse frente á estas dificultades en los mareómetros de sifón.

No es difícil, en efecto, establecer en la rama libre *A* (figura 18), de uno de esos aparatos, un diafragma *mn*, que siempre esté más bajo que la posición inferior, que el nivel *r* puede llegar á ocupar y que desempeñará funciones análogas á las que llenaba colocado en el extremo del tubo de plomo.

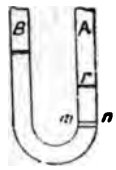


Fig. 18.

Y es claro que no hace falta que precisamente sea el mercurio el que atraviese la substancia filtrante, porque encima de él se puede echar otro líquido estéril, colocar dentro de éste el diafragma y tapar la boca *A* con algodón esterilizado como exceso de precaución, siendo las presiones transmitidas desde el mar por la columna líquida del mareómetro las que determinarán, en función del tiempo, la altura con que el líquido auxiliar resulte encima del diafragma.

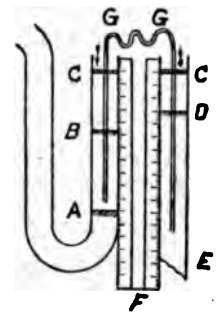
Aquí daríamos punto á estas ideas acerca de los medimareómetros de sifón si no nos asaltara el deseo de describir otro tipo, en que no sigan empleándose más que tubos, más ó menos acodados y de ésta ó la otra substancia, que sirvan de recipiente á uno ó más líquidos, emancipándonos, de esta suerte, del uso de diafragmas filtrantes.

Uno de esos medimareómetros puede ser el que representa la figura 19, en que *AB* es un líquido auxiliar, puesto sobre el mercurio de un mareómetro; *CE* un tubo del mismo diámetro que el anterior y lleno, en su parte *ED*, del mismo líquido que aquél contenía; *F* una escala, que puede utilizar-

se para hacer las lecturas de las posiciones de las superficies de nivel en ambos tubos, y *GG* un sifón de tubo capilar, con más ó menos curvaturas, para dificultar la trasvasación del líquido y que entra á rozamiento duro en los tapones *CC*, provistos éstos, además, de otros pequeñísimos orificios que permitan la entrada y salida de aire.

Se comprenderá sin dificultad que la teoría de estos aparatos es la misma que la de los medimareómetros, cuya base son las substancias filtrantes, toda vez que, á cada fase del nivel del agua del mar, corresponde otra simultánea y proporcional de la superficie *A*, mientras que las oscilaciones de ésta determinarán otras en el nivel *D*, que se efectuarán con cierto retraso por las dificultades que el tubo *G* opone al paso del agua, así como el diafragma filtrante transformaba los movimientos de las mareas en otros de reducida amplitud.

Fig. 19.



En resumen; el fin que se persigue con estos medimareómetros, cual su nombre indica (medidores de las mareas medias), es determinar el nivel medio diurno de las aguas del mar por una simple lectura, y pueden y deben considerarse como una variedad de los llamados, no con gran propiedad, mareógrafos totalizadores, que á continuación examinamos, y que son, en cuanto á los resultados que proporcionan, intermediarios entre los mareómetros, que sólo dan, por cada lectura, la situación que en aquel instante tienen las aguas del mar, sin dejar huella material alguna de sus indicaciones, y los mareógrafos propiamente tales, que inscriben una curva, resumen de todas las indicaciones que proporcionan, de cuyo estudio se deducen elementos suficientes para conocer en cada instante la situación que el mar tenía.

25. – Mareógragos totalizadores.

Uno de los mareógrafos totalizadores de sifón que pudiera construirse está representado en la figura 20, en la que *P* es un flotante de hierro, que se mueve en la rama libre del mareómetro y que transmite su acción, por medio de una cuerda ó delgado alambre, á la varilla metálica *v*, que, dirigida en su movimiento rectilíneo alternativo por las guías *gg'*, no puede girar en torno de su propio eje por impedírselo su sección, de forma rectangular, que encaja en el vaciado, de dimensiones iguales, que las guías tienen.

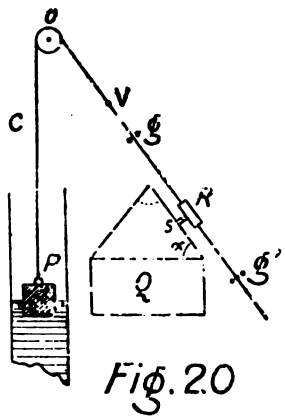


Fig. 20

Impropiamente hemos hablado de la varilla *v*, porque ésta se halla interrumpida en su parte media por un contador de revoluciones *R*, al cual vienen á unirse los dos segmentos que en realidad constituyen aquélla, en tal forma, que la permiten un ligero juego en sentido normal al de *gg'* y paralelo al plano del dibujo; juego que, como se comprenderá fácilmente, se consigue sin más que efectuar esas conexiones por el mismo medio con que se enlazan ambos pies de los usuales compases.

Debajo de ese contador de revoluciones puede haber un cilindro *Q*, provisto de movimiento de relojería y apuntado por un cono, sobre el cual descanse una roldana *s* del contador de revoluciones, el cual, al girar, por su roce con la superficie cónica, produce el movimiento del contador; siendo evidente que para que resulte la necesaria solidaridad entre los movimientos del cono y del contador, convendría que la

superficie de aquél esté sin pulimentar y que lo propio suceda con la de este último. Semejante adherencia puede conseguirse fácilmente forrando el cono con papel de esmeril del doble cero y de buena clase, ó rayando el cono metálico en sentido de sus generatrices y poniendo en uno y otro caso una llanta de caucho á la roldana del contador.

Aunque sobre este mismo sistema de totalización, sustituyendo el cono por un disco giratorio, hay fundados gran número de aparatos, tales como planímetros, integradores, cinemómetros y mareógrafo de Reitz, no estará de más recordar que, dado el movimiento uniforme del cono, en el caso especial que hemos adoptado, el número de revoluciones que da la roldana s y, por lo tanto, los que marca el contador, son directamente proporcionales, en su consecuencia, á los radios de paralelo, sobre los que aquélla insiste.

En un cono circular recto, si α es el ángulo constante que sus generatrices forman con la base, las longitudes de ellas, contadas desde el vértice, están enlazadas con los radios de las secciones rectas, que limitan la longitud considerada, por la relación

$$r = l . \cos \alpha,$$

de la que se deduce que, si el número de revoluciones de la roldana s es proporcional al radio de la sección de contacto, r, también lo es á la correspondiente longitud l de la generatriz, contada desde el vértice, ya que α es constante.

Siendo la dirección del peso del contador R pararela al eje del cono, y guardando también paralelismo las generatrices de éste con la dirección gg', evidente resulta que si p es el peso de aquél, la componente en dirección de las generatrices ó esfuerzo que habrá de destruirse por la tensión de la cuerda C, es

$$p . \operatorname{sen} \alpha,$$

y la normal á ésta, ó parte del peso que gravita sobre la superficie cónica y determina la adherencia, es

$$p \,.\, \cos \alpha.$$

Y observaremos, aunque sea de paso, que la solución que damos es general, porque la más usualmente admitida, ó sea la del disco giratorio, resulta de aquélla haciendo

$$\alpha = 0^\circ;\ (r = l;\ p \,.\, \cos \alpha = p;\ p \,.\, \operatorname{sen} \alpha = 0),$$

y á ella no hay imposibilidad de acudir, aunque en el caso presente no nos parezca la preferible.

Dejando eso á un lado, conviene observar que, por la solución adoptada, está en nuestra mano, dentro de ciertos límites, disponer de las dos componentes del peso del contador, repartiéndole entre ellas en la forma que mejor nos plazca. En aumentar ese peso, claro es que no hay dificultad alguna ni tampoco ventajas; en disminuirle sí debe haber empeño, ya que de este modo decrecen también los perjudiciales efectos de la inercia.

Claro es que las exigencias prácticas de construcción imponen un límite mínimo al peso de los contadores; pero este mínimo es suficientemente pequeño.

Hemos pesado un aparato de éstos, de la casa Schaeffer und Budenberg, de cuatro cifras, y encontrado el peso de 155 gramos; pero es de advertir que ese contador, bien hecho para el objeto á que le destinábamos al adquirirlo, consiente importantes reformas al aplicarlo á los mareómetros.

El mecanismo que, en rigor, constituye el contador de que hablamos, está montado dentro de una caja metálica, que pesa más de las dos terceras partes del peso total; así es que, sin cometer en ello exageración alguna, bien puede afirmarse que, sin gran esfuerzo ni gasto, pueden obtenerse contadores de cinco á seis cifras, cuyo peso sea de unos 100 gramos.

Aceptando este número y para α el valor de 45°, por ejemplo, resultará que la componente de adherencia valdrá unos 50 gramos, y otros tantos la de tracción sobre la cuerda C, habiendo de aumentarse á esta componente el peso de las varillas huecas de aluminio $g\,g'$ y resultando una tracción para la cuerda ó alambre que, seguramente, no excederá de 200 gramos.

Aun cuando la cuerda PC sola y el flotante P pesaran otros 250 gramos, resultará que la masa que ha de moverse, $PcovRr'$, será la correspondiente á medio kilogramo, y sus efectos de inercia podrán despreciarse desde luego sin poderse comparar jamás á los que se desarrollan en el mareógrafo de Reitz.

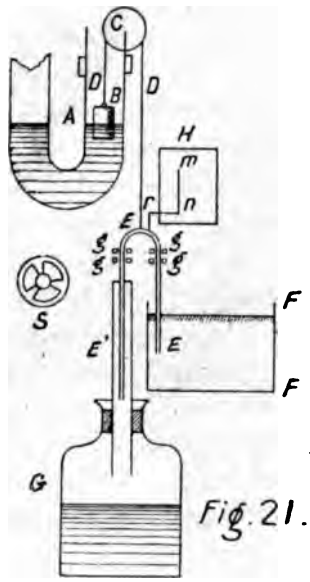


Fig. 21.

Ofrécense, desde luego, al discurso de cualquiera, infinitas variaciones que el aparato descripto puede experimentar, sin que resulte alterado su esencial modo de ser, y, solamente como ejemplos, citaremos el suprimir, cuando haya miedo ó excesivo peso, las varillas $g\,g'$, reemplazándolas por guías, entre las que resbale el contador, directamente sujeto por la cuerda, así como el poderse reeemplazar el cono por otras superficies, ó bien por un disco rotatorio paralelo á la dirección $g\,g'$, etc., etc.

Otro totalizador más barato aún que el precedente y más práctico, á juicio nuestro, es el que representa la figura 21.

Aparece en ella la inevitable rama libre del mareómetro A, el flotante B y la polea C, montada en una armadura, sujeta á la boca del tubo. Pasa por esa polea el cordón DD, de cuyo extremo derecho pende un delgado tubo de cristal EE,

guiado por cuatro anillos fijos *g g*, cuya seccion horizontal, en mayor tamaño, va indicada en el mismo grabado, en *S*.

Sumérgese una de las ramas de ese sifón en un depósito de agua *FF*, de nivel constante, ó de dimensiones suficientemente grandes, para que, prácticamente, pueda admitirse esa constancia y puede moverse la otra en el interior de un tubo de mayor diámetro, que sale de la boca de un frasco *G*.

Una vez cargado el sifón, la cantidad de agua que del depósito *F* se trasvase al frasco *G*, claro resulta que es proporcional para una situación dada, al tiempo en que esa trasvasación se verifique; y que, para posiciones diferentes, en el mismo espacio de tiempo, la cantidad de líquido que en el frasco *G* se recoja, será proporcional á la diferencia de nivel que exista entre la superficie líquida de *FF* y el extremo de la rama de sifón *E'*.

Hay, por lo tanto, proporcionalidad directa entre las cantidades de agua que á *G* pasan y los desniveles antes citados; la hay también entre aquéllos y los tiempos, y existirá proporción directa entre los productos de los desniveles por los correspondientes tiempos y las cantidades de aguas trasvasadas.

Supongamos elevado el sifón hasta que su rama *E* quede á flor de agua, y fácilmente se ve que los desniveles de que antes hemos hablado, no son otra cosa que las elevaciones que la superficie del mercurio en la rama *A* va experimentando, y como éstas son directamente proporcionales á las aguas del mar, por esta larga serie de relaciones que hemos enumerado, resulta en definitiva que el agua recogida en el frasco *G*, durante un espacio determinado de tiempo, siendo directamente proporcional al producto de las alturas que el agua de mar ha ido tomando por el tiempo en que se han sostenido en ellas, es, ni más ni menos, que el valor de la superficie *XAA' Y* (fig. 22), multiplicado por un coeficiente de proporcionalidad.

En esa figura, al par que sobre el eje *XY* de los tiempos

se han levantado las ordenadas XA... YA', que miden las alturas de las aguas del mar, hemos representado en la curva BB' las correspondientes oscilaciones del mercurio, y en CC' los gastos de agua del sifón, resultando tres curvas iguales ó posiciones distintas de una misma. La cantidad de agua recogida da directamente la superficie $XCC'Y$ y su

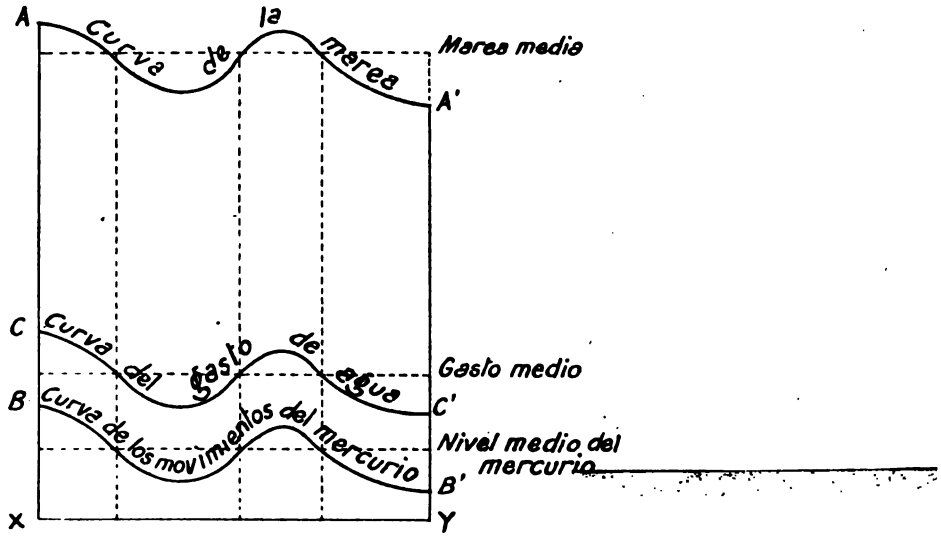


Fig. 22.

división por XY proporciona el gasto medio del que inmediatamente se deducirá la marea media.

Aclaremos todo esto con un ejemplo. Si N es el número de centímetros cúbicos de líquido recogidos en el frasco durante veinticuatro horas, el cociente $\frac{N}{86400^s}$ nos dará el gasto medio $g = \frac{N}{86400^s}$, y como á cada gasto corresponde una posición fija del sifón, sabremos cuál es la de su vértice E, y, por lo tanto, la del mercurio y la de la superficie del nivel del mar, ó sea el nivel medio de éste durante las veinticuatro horas consideradas.

Tanto este manómetro indicador, como el precedente, tienen el defecto de no indicar cuáles sean los máximos y mínimos valores que las alturas de las aguas tomen; datos ambos de gran importancia para las aplicaciones prácticas de esos aparatos. Pero ese defecto puede subsanarse fácilmente, bastando para ello colocar un cilindro *H* (fig. 21), giratorio á voluntad, sobre el que se arrolla una hoja de papel cuadriculado, en la que traza la pluma ó lápiz *n*, sujeto al sifón por el brazo *r*, una ordenada *mn*, que indica las situaciones extremas del nivel del mar.

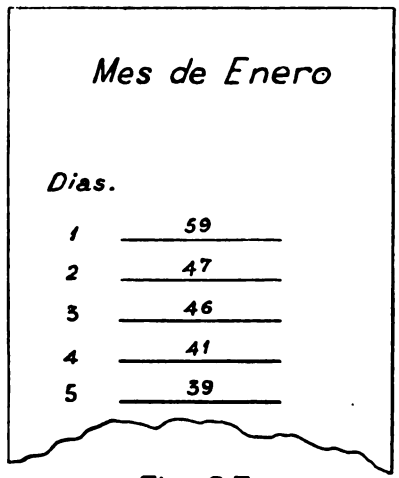


Fig. 23.

Cada veinticuatro horas, en la generalidad de los casos, se moverá á mano el cilindro *H*, y escribiendo en el trazo que á cada día corresponda la lectura del contador ó del frasco *G*, quedarán condensadas en una hoja, en la forma que la figura 23 expresa, todas las observaciones que á un mes correspondan.

Ese mismo cilindro puede emplearse para la graduación experimental de los aparatos, observando á cada posición de *n* la lectura que da el contador ó el gasto que el sifón efectúa, y formando una tabla de dos columnas en que consten los resultados, que servirá después para el cálculo de cotas.

La medida del agua que el frasco *G* contenga se hará valiéndose de probetas graduadas, con las que fácilmente se aprecian cuartas partes de centímetros cúbicos, y el diámetro del sifón puede elegirse del tamaño conveniente, con arreglo á la mayor ó menor precisión que en las observaciones trate de conseguirse.

XXXVI.—Estudio acerca de la determinación volumétrica del óxido de carbono.

POR ENRIQUE HAUSER

Se refiere especialmente el presente trabajo á la determinación del gas CO en el resíduo de una mezcla de gases combustibles ó procedentes de una combustión imperfecta ó incompleta, es decir, que puede hallarse en presencia de hidrógeno y metano, con un exceso de nitrógeno y cierta cantidad de oxígeno.

Dos clases de métodos volumétricos pueden emplearse, á saber: los fundados en la absorción directa del óxido de carbono por medio de ciertos reactivos y los dependientes de la determinación indirecta del volumen de dicho gas, produciendo previamente su combustión. Voy á estudiar separadamente el mejor modo de practicar las dos clases de métodos.

I) Determinación volumétrica del óxido de carbono por absorción.

Este método depende casi exclusivamente del empleo de los cloruros cuprosos.

Tiénese por sabido que la absorción del óxido de carbono por los cloruros cuprosos (ácido ó amoníacal), jamás es completa, y que el gas absorbido puede ser fácilmente desprendido, agitando ó elevando la temperatura del reactivo. Como el modo de preparación de dichos cloruros influye bastante en los resultados obtenidos, y el número de recetas indicadas es bastante grande, creo conveniente explicar la manera de operar que me ha dado mejores resultados. Desde luego debo decir, que si bien el cloruro cuproso ácido absorbe el CO más rápidamente que el preparado amoníacal, la canti-

dad absorbida es menor (desde cuatro veces su volumen, según Hempel; á diez veces, según Clowes y Coleman, en vez de seis á diez y seis), y se desprende con más facilidad que del cloruro cuproso amoníacal; además, como el cloruro ácido tiene el inconveniente de atacar al mercurio y sus vapores dificultan la absorción del hidrógeno por el paladio, de ahí que, aunque sea de preparación más fácil, se dé la preferencia al compuesto amoníacal, que al igual del ácido, tiene la propiedad de absorber el etileno (Hempel) y, además, el acetileno.

De otra parte, no se logran buenos resultados sin tener presentes, ante todo, ciertas reglas prácticas y pormenores operatorios respecto del modo de preparación y manejo de tales reactivos, que se deducen del estudio que la evolución del modo de prepararlos ha tenido. Desde luego, el inconveniente señalado que tienen las disoluciones de cloruro cuproso, en cuya virtud desprenden fácilmente parte del CO absorbido cuando el gas que lo cubre no le contiene, puede, según Drehschmidt, ser contrarrestado en gran parte por la presencia de un exceso de amoníaco que, reaccionando sobre el cloruro cuproso oxicarbonado, transforma el óxido de carbono en ácido carbónico fijándolo con formación de carbonato amónico, según la ecuación siguiente:

$$Cu_2Cl_2CO + 4NH_3 + 2H_2O = Cu + 2NH_4Cl + (NH_4)_2CO_3.$$

De este hecho, deduce Drehschmidt el método de preparación siguiente:

Se disuelve el cloruro cuproso *recientemente precipitado*, casi exento de agua, agitándolo con amoníaco de 0,90 de densidad hasta disolución casi por completo (en un frasco bien cerrado), y al líquido obtenido se añade de un quinto á un cuarto de su volumen del mismo amoníaco. Clowes y Coleman, preparan este reactivo de un modo parecido, y lo consideran capaz de absorber seis veces su volumen de óxi-

do de carbono dejando sólo un residuo de cinco milésimas (0,5 por 100) de dicho gas por absorber en el volumen final (*). Sin embargo, como un exceso de vapores amoníacales aumenta la duración de la absorción, este modo de preparar el reactivo no está aceptado por todos los experimentadores, y siendo, además, necesario tener en cuenta que estos compuestos cuprosos de adición pierden parte de su amoníaco al contacto del aire ú otro gas precipitando sales básicas y que se alteran por la acción de la luz (Berthelot), ha habido que buscar un medio de evitar tales inconvenientes. Se ha conseguido, añadiendo á la solución amoníacal cierta cantidad de cloruro amónico, que aparte tiene la ventaja de aumentar su poder de absorción.

El reactivo amoníacal conteniendo cloruro amónico ha sido preconizado por Hempel, y creo suyas las dos fórmulas que aquí se ponen y publicó el Profesor Treadwell. En ambos se parte de agitar en un frasco cerrado 200 gramos de cloruro cuproso *comercial* con una disolución de 250 gramos de cloruro amónico en 750 de agua, á la que añade, en la primera receta (1901-2), tres veces y media su volumen de amoníaco de 0,905 *p.e.*, y en la última (1906-7), sólo el tercio de su volumen de amoníaco de *p.e.* = 0,910. En los dos casos considera la absorción del óxido de carbono casi cuantitativa, y el reactivo capaz de absorber seis veces su volumen la primera disolución y diez y seis la última. De todos modos recomienda terminar la absorción en una segunda pipeta con disolución poco usada.

Creo inútil añadir que, queriendo conservar las disoluciones, el frasco habrá de estar *completamente lleno* de torneaduras de cobre, debiendo observar que, si bien las disoluciones amoníacales de cloruro cuproso diluídas son casi incoloras, las concentradas son azules, pero su color no ha de ser

(*) Clowes & Redwood. *Detection & Estimation of Inflamable gas & Vapours*, pág. 144-5.

tan intenso que no deje pasar francamente la luz en un espesor de 5 centímetros; de todos modos, su reducción por las torneaduras de cobre se acelera mucho manteniendo los líquidos cerca de una estufa (unos 40° C). Siendo más fácil juzgar á simple vista del estado de actividad de una disolucion ácida que de otra amoníacal, considero preferible partir, para la preparación del cloruro cuproso amoníacal, del cloruro cuproso recién precipitado de su solución ácida en la forma que voy á indicar, exponiendo antes el modo de preparar la disolución amoníacal de cloruro cuproso, conforme la empleo.

Son base del procedimiento los estudios de Drehschmidt y los resultados de Clowes & Redwood. Disuelvo unos 20 gramos de cloruro cuproso, recién precipitado, contenido en un frasco, en la cantidad de amoníaco indispensable (0,90 á 0,91 *p.e.*), añadiéndole después un cuarto de volumen de dicho líquido; agrego luego cosa de 20 gramos de cloruro amónico disuelto en el menor volumen posible de agua, ó lo que es más cómodo, el volumen correspondiente de una disolución saturada de dicho cloruro, pudiendo trasvasarse enseguida la mezcla resultante á la pipeta de absorción, cuya bola deberá contener cantidad suficiente de torneaduras ó alambre fino de cobre. Los resultados obtenidos por mí con este reactivo, son muy satisfactorios, y puedo decir que, una vez que traté de absorber el residuo de óxido de carbono que queda en el gas tratado por dicho reactivo absorbente, agitándole después durante veinticinco minutos con ácido nítrico fumante (según Treadwell & Stokes), y más tarde con la potasa, no obtuve mayor contracción que la que hubiera obtenido absorbiendo los vapores amoníacales de dicho gas con la disolución sulfúrica que empleo. Esto no obsta para que de todos modos haya que contar con un residuo, conteniendo pequeña cantidad de óxido de carbono para otra también corta de metano, bastante más hidrógeno y exceso de nitrógeno, cuya determinación exacta explicaré en breve. Ahora resta decir

que, para absorber los vapores amoníacales que los gases arrastran al salir de la disolución absorbente, y antes de hacer la lectura, empleo una disolución, conteniendo 10 por 100 de ácido sulfúrico y 4 por 100 de sulfato amónico.

En cuanto á la necesidad de disponer de cloruro cuproso recién precipitado, la considero fundada en que este cuerpo, conservado bajo agua, se halla con frecuencia muy oxidado, de tal manera, que su disolución clorhídrica es obscura y no precipita al echarla sobre agua, y como, por otra parte, el cloruro cúprico disuelto en ácido clorhídrico se reduce muy fácilmente en veinticuatro horas, empleando torneaduras de cobre (que deben llenar el frasco), dando un líquido incoloro ó ligeramente amarillo, y que un frasco de cuello esmerilado, sin que el tapón ajuste, hará cierre hermético si se le deja medio flotante en el ácido que moja el gollete, conservándose muy bien el cloruro, de ahí que prefiera el método apuntado. De todos modos, la operación de precipitar es fácil, disolviendo 40-50 gramos de cloruro cuproso por litro de ácido y después de reducir con cobre la parte oxidada, conforme se indica más arriba, ó dándola por perdida si se tiene prisa, vertiendo la solución ácida en ocho ó diez veces su volumen de agua, contenida en un frasco con buen tapón; una vez aposado el cloruro cuproso, no hay más que decantar el agua que sobrenada y trasvasarle á otro frasco más pequeño, en el que habrá de prepararse el reactivo, como se explicó antes.

Debo mencionar una observación muy importante para el buen uso de estos cloruros absorbentes y especialmente del amoniacal, y se refiere á su cualidad de disolventes del nitrógeno, tanto más sensible cuanto el gas está concentrado luego de terminada la absorción del óxido de carbono. Por esta razón recomiendo saturar bien con nitrógeno el reactivo, pues es muy fácil cometer errores de 0,5 por 100, ó mayores, si todavía aquél no ha sido previamente saturado de nitrógeno, llegándose entonces á creer en una absorción completa

del CO, cuando lo que se ha absorbido es una cantidad casi equivalente de nitrógeno.

Por lo dicho se ve que la determinación del óxido de carbono por absorción, si bien de exactitud suficiente en muchos casos, sólo da valores aproximados, restando sin absorber un pequeño volumen que habrá que determinar por combustión, y así es generalmente preferible, en el sentir de muchos químicos y en el mío propio, realizarle, desde luego, con la totalidad del óxido de carbono de la manera que voy á indicar. De no tener presente la existencia del óxido de carbono en el residuo; si hacemos la combustión creyendo que hay únicamente los gases combustibles hidrógeno y metano, asignaremos al último gas un valor mayor que el verdadero, igual al que representa el volumen del óxido de carbono no absorbido y disminuído en otro tanto el valor deducido para el hidrógeno: este error lo he observado con harta frecuencia en los resultados publicados de análisis llamados industriales y también en otros de carácter científico.

Laboratorio de la Escuela de Minas.

(Se continuará.)

XXXVII.— Estudio comparativo de los instrumentos más usados en Sismología.

POR MANUEL-M.ª S. NAVARRO (S. J.)

1.—Péndulos verticales.

Sismometógrafos y microsismógrafos de Agamennone, Cancani y Vicentini.

Los péndulos verticales, en el sentido estricto de la palabra, que hoy se usan como instrumento de Observatorio, son de tipo y construcción casi siempre italiana, derivados del sismometrógrafo fabricado en Roma en 1886 por E. Brassart, después de un concienzudo estudio de los instrumentos japoneses (*).

En 1892, el Dr. Agamennone, Asistente entonces en el *Ufficio Centrale Meteorologico e Geodinamico* de Roma, del que era mecánico Brassart, introdujo algunas mejoras en dicho instrumento, aumentando su masa de 10 kilogramos hasta 75 y la longitud á 6 metros, habiendo logrado magníficos resultados para aquella época, entre los que se cuentan sismogramas de terremotos del Japón, y el primero obtenido en Europa de un terremoto lejano, con ocasión del de Samotracia (Turquía), el 9 de Febrero de 1893 (**).

A mediados de 1894 instaló otro, también en el Colegio Romano, de 16 metros de longitud, 200 kilogramos de masa y sólo 10 veces de aumento externo, inscribiendo, como los

---

(*) Dr. R. Ehlert: Zuzamenstellung, etc., der Seismometer, in *Gerland's Beiträge zur Geophyisik*, III, Bd. 3 Hft., SS. 375, 376.

(**) Dr. G. Agamennone: L'indirizzo nella construzione degli strumenti sisimici in Italia.—In *Bolletino della Societá Sismologica Italiana*, X (1904-1905), pp. 241-242.

anteriores, con tinta sobre papel blanco (*), que desplaza con dos velocidades: una, la ordinaria, de 30 á 60 centímetros por hora; la otra de hasta 30 centímetros por minuto y aun más, cuando el mismo péndulo al agitarse, ó uno ó más sismoscopios eléctricos pongan en libertad un disparador adosado al motor de relojería del receptor.

En los primeros modelos, un cronógrafo actuado por un cronómetro de marina marcaba el tiempo en las bandas de media en media hora, en los actuales se hace, como en casi todos los demás sismógrafos, de minuto en minuto, levantándose las agujas cada media hora, con lo que se puede determinar bastante bien el *paralaje* de las mismas, excepto en las grandes desviaciones, y todavía mejor que en otros muchos péndulos en los que es fácil incurrir en errores de varios segundos al determinar esta cantidad, que precisa añadir al tiempo señalado por el cronógrafo, con las otras correcciones y el signo que tenga.

Hoy existen sismometrógrafos Agamennone (**) en las estaciones sismológicas de Rocca di Papa, Catania, Pavía, Torino, Salo, Ferrara, Giacherino, Firenze (R. M.), Urbino, Portici, Caggiano, Reggio (Calabria), Messina, Barcelona (O. Fabra), cinco en Grecia y dos en Constantinopla (***).

Fuera de la velocidad exagerada de seis metros por hora, y el registrar hoy sus movimientos sobre papel ennegrecido con el humo del petróleo, aceite, gas del alumbrado, etc., muy poco se diferencian los sismometrógrafos del Profesor A. Cancani de los Agamennone. El que parece dar mejores

---

(*) Dr. G. Agamennone: Sopra un nuovo tipo di sismometrografo. *Ibid.*, I (1895) p. 160.

(**) Constructor, Luigi Fascianelli, Via Caravita, 7, A., Roma.— Precio (sin la masa de plomo), 500 liras, con la doble velocidad, y 400 con la única de 80 cms. por hora.

(***) Id.: Winke über die Konstruktion der Erdbebenmesser in Italien. in *Die Erdbebenwarte* Herausgeb. Prof. A. Belar, Laibach, 1904-1905,, n.° 5 bis, 9. S. 6.

resultados mide 25,3 metros de longitud, su masa pesa 300 kilogramos y su aumento es de 12,5 veces (*).

El Observatorio Fabra, de Barcelona, posee uno de estos instrumentos (**), hallándose instalados otros en Roma, Catania, y según el Dr. Agamennone, también en Esmirna y Tiflis (***).

Pero el péndulo vertical, cuyo uso se halla hoy más extendido, es, sin disputa, el del Profesor paduano, G. Vicentini, que además de los cuatro ejemplares construídos para el Gobierno español, tiene otros veinte repartidos, sobre todo, en Italia, Austria y España (****).

En nuestra patria existen ya instalados tres, respectivamente, en los Observatorios Fabra (Barcelona), del Ebro (Tortosa) y de Cartuja (Granada) (*****).

El Profesor Vicentini ha tratado sistemáticamente de hacer con sus péndulos algo análogo á lo que el Profesor Milne con los suyos: perfeccionarlos cada vez más, de modo que su funcionamiento sea cada vez mejor, y, sobre todo, más seguro, pero modificando sólo pequeños detalles, con el objeto de que los sismogramas obtenidos sean fácilmente comparables entre sí, lo que parece conseguido, sobre todo, cuando los péndulos se hallan muy próximos.

Así es que, fuera del de 15 metros del celebérrimo Instituto de Geofísica de Potsdam, y de otro, de 10,68 metros de longitud por 400 kilogramos de peso, que funciona en su

---

(*) Prof. A. Ricco. R. Osservatorio Geodinamico di Catania, in *Bol., S. S. Ital.*, III (1897), p. 150.

(**) Constructor L. Fascianelli. — Precio (sin la masa), 500 liras.

(***) Idem Winke..... S. 6

(****) Idem Winke..... S. 6.

(*****) Los dos primeros, del *tipo universal*, han sido construidos bajo la dirección de su inventor. El de Cartuja (Granada), bastante mayor (312 kilogramos por 3,50 metros de longitud y 155 veces de aumento), lo fué por el Director propietario del Observatorio de Quarto di Castello (Florencia), Profesor R. P. D. Rafaelle Stiattesi, que ha hecho algunas modificaciones.

Instituto de Física, donde lo montó á mediados de 1896 con el auxilio del malogrado Dr. G. Pacher, y *que destinó á medidas comparativas* (*), todos los péndulos construídos bajo la dirección del Profesor Vicentini tienen masas de 100 kilogramos, 1,50 metros de longitud y un aumento externo comprendido entre 80 y 120 veces (**). En cuanto á la velocidad con que se mueve la banda de papel ennegrecido, oscila entre 30 y 90 centímetros por hora, aunque, de acuerdo con lo propuesto por el reputado Profesor vienés Pernter, Director del servicio Metereológico y Geodinámico austriaco, se propone que sea en adelante de 60 (***), tratando de que, en las componentes horizontales, en las que ahora nos ocupamos, fuese el aumento de 100 veces con corta diferencia.

De igual manera que los sismometrógrafos de Agamennone y Cancani, el microsismógrafo Vicentini se deriva del péndulo de Brassart, y la palanca vertical, á la que debe su aumento, tan considerable en comparación del de éstos, y aun en absoluto, de las ya empleadas por Gray, Wagner, Bouquet de la Grye, etc., lo mismo que algunos importantes detalles proceden directamente del instrumento de Agamennone (****), pero esto no obsta para que el conjunto presente muchos elementos originales que, á primera vista, pudieran parecer insignificantes; mas de ellos depende el éxito práctico de un instrumento.

Consta esencialmente el microsismógrafo Vicentini de una masa cilíndrica de plomo, de poca altura, en relación á su base, formada de varios discos, y la atraviesa por el centro

---

(*) Giuglio Pacher, *I Microsismografi dell' Istituto di Fisica della R. Universita di Padova*, pág. 40.

(**) Precio: 1.500 liras, completo con la componente vertical, masas, etc.

(***) Profesor G. Vicentini.—*Considerazione sopra l'uniformita di funzionamiento dei microsismografi.* – Atti del R. I. Veneto. (Ad del 21 Gennaio 1906), páginas 501-506.

(****) Doctor Pacher.—Op. cit., pág. 21.

un tubo de hierro que le sirve de sostén y cuyo extremo superior remata en un trozo de alambre de acero de 1,5 milímetros de diámetro y pocos centímetros de longitud, del cual pende el péndulo y al que sirve á su vez de apoyo una barra de hierro empotrada en un fuerte muro ó pila *ad hoc*, etcétera, del que se separa poco.

En el centro de la base del cilindro de plomo, cubierta de latón como el resto, existe una pequeña abertura provista de un compresor de muelle, en la que se introduce la aguja terminal del brazo corto de la palanca multiplicadora vertical de aluminio, cuyo aumento suele ser de 20 veces. Su punto de apoyo se halla sujeto en un soporte empotrado en el mismo pilar que el péndulo, soporte en el que se apoyan también las restantes piezas del aparato multiplicador inscriptor y el cilindro motor de la banda de papel ennegrecido donde se han de registrar los movimientos.

El extremo inferior de la palanca vertical citada penetra entre unas horquillas cerradas, que forman los brazos menores cruzados de dos palancas, recta la una, en ángulo recto con su brazo menor la otra, y que aumentan unas cinco veces, terminando en finísimas tiras de cristal hilado, sumamente flexibles, y cuyas puntas, diminutas esferillas, han de registrar los movimientos sobre el papel.

El objeto de estas segundas palancas es variado; de una parte multiplican, por su aumento propio, el de la vertical; de otra, forzadas á moverse sólo en la dirección perpendicular á aquélla en que se mueve el péndulo, descompondrán en sus dos componentes horizontales los movimientos del mismo. Así conviene que se muevan en dirección *N-S* una y *E-W* la otra.

Un precioso cronógrafo para marcar minutos y horas sobre la misma banda en que se registran los movimientos del péndulo citado y de la componente vertical, forma también parte de este instrumento, cuyos detalles resultan una obra de arte mecánica.

La presión de las agujas de vidrio ha de regularse subiendo ó bajando el mecanismo de relojería, y de no hacerlo cuidadosamente, el instrumento funciona muy mal y la excesiva delgadez de las agujas parece apropiada para causar deformaciones en los gráficos.

El mecanismo que mueve la banda de relojería tampoco está al abrigo de toda crítica. Las bandas resultan muy largas, dos ó más metros, á no querer dar á las agujas inscriptoras una separación incompatible con su ligereza, ó adoptar otra disposición muy diferente, y esa excesiva longitud hace bastante penoso su estudio, y, lo que es peor, y muy frecuente, á juzgar por los gráficos del magnífico álbum del terremoto de Valparaíso, debido al Profesor Dr. E. Rudolph, las líneas montan unas sobre otras, y se unen y separan, resultando un todo no muy fácil de descifrar, y donde es facilísimo equivocarse en hora, etc.

Mucho más cómodos son los motores que avanzan girando sobre una hélice de paso determinado y con los que se puedan usar bandas cortas, todo lo más de 1,50 metros, por ser más difícil, y en algunos imposible, el que se mezclen las vueltas á no tener la culpa el péndulo, evitando ese desagradable accidente, que alguna rara vez nos ocurrió, y aún ocurre con motores italianos del tipo del del péndulo que acabamos de citar, y que creíamos obra de nuestro descuido, cuando el álbum del Profesor Rudolph nos ha indicado su frecuencia en los más célebres Observatorios.

2.—Péndulos invertidos: Wiechert.

Como fruto de numerosos ensayos, llevados á cabo con rara perseverancia, y de un viaje á Italia, ha construído el Profesor de la Universidad de Gotinga, Dr. E. Wiechert, un péndulo, cuyo uso se extiende á cada punto (*), y cuya pri-

(*) Según carta que nos dirigió el 6 de Febrero de 1906 el mecánico de dicha ciudad Georg Bartels, constructor del modelo de 1.000

mera idea quizás es la del péndulo invertido del infatigable Director de los Observatorios de la Isla de Ischia, Profesor Doctor G. Grablovitz, que, según parece, no llegó á construir (*).

La masa se halla formada por varios discos de fundición, cuyo conjunto constituye un cilindro de 80 centímetros de diámetro por cerca de 40 de altura, con 1.000 á 1.200 kilogramos de peso, y termina, en su extremidad inferior, por una larga y robusta punta cilindro-cónica de acero, que le da el aspecto de una gigantesca peonza.

Esa punta descansa sobre un disco del mismo metal, montado á la Cardan. Por la parte superior existe un saliente central al que van á parar las dos palancas dobles, dispuestas en ángulo recto, y que sirven para multiplicar é inscribir los movimientos. Una prolongación de cada una de las mismas va á parar á su aparato de amortiguamiento, especie de émbolo donde opone el aire encerrado, al ser comprimido, una resistencia creciente con la amplitud á los movimientos propios del péndulo, resistencia que puede aumentar ó disminuir conforme se cierren ó abran más ó menos las llaves que dan paso al aire.

El otro extremo remata en una larga y delicada palanca de aluminio, como todas las partes del aparato inscriptor que no exigen otro metal más resistente, cuyos ejes descansan sobre ágatas ó rubíes, y cuya pequeña aguja inscriptora, de vidrio, registra los movimientos del péndulo sobre una banda sin fin de papel ahumado de 90 centímetros de largo, que da una vuelta por hora, al propio tiempo que, gracias á un tornillo, avanza $4^1/_2$ milímetros durante dicho tiempo.

Un cronógrafo levanta las agujas de entrambas componen-

---

kilogramos por 2,300 Mk., ya entonces había péndulos de este sistema en Göttingen, Munich, Estrasburgo, Potsdam, Leipzig, Jena, Apia (Samoa), Viena, Budapesth, Upsala, Pribram. También se piensa montar uno en Toledo.

(*) Dr. Ehlert: op. cit. S. 376, figura 26.

tes durante algunos segundos de hora en hora y, por menos tiempo, todos los minutos.

Aunque las dimensiones de todo el instrumento, fuera de su masa, sean bastante modestas, pues el robusto armario vidriado que le cobija no mide más de 186 centímetros de altura por 176 de longitud y 138 de fondo, se pueden obtener períodos completos oscilatorios de 15 segundos, correspondientes á longitudes pendulares de 56 metros, á lo que se une su considerable aumento de 100 á 300 veces (*).

En la reciente Asamblea, primera general Sismológica, celebrada en el Haya á fines de Septiembre del pasado año, tuvimos ocasión de ver un precioso péndulo astático, también del Profesor Wiechert, y que es una reducción del anterior con algunas modificaciones. Lo construye la acreditada casa de Götinga Spindler & Hoyer en tres tipos, según sea el peso de su masa, de 80, 125 y 200 kilogramos, con períodos de 4 á 10^s en el pequeño modelo y hasta 15^s en los otros dos y aumentos, de 40, 80 y 160 veces (**).

3.—Péndulos horizontales de registro mecánico.

Péndulos de Grablovitz, Omori, Bosch, Hecker, Cancani, Stiattesi, Agamennone, Mainka.

Los péndulos horizontales ó cónicos permiten obtener mayores períodos oscilatorios que los invertidos é incomparablemente superiores á los que pudieran proporcionar los

---

(*) E. Wiechert.—*Ein astatisches Pendel höher Empfindlichkeit..... Physkalisches Zeitschrift*, 4. J., núm. 28.

(**) Precios: 350, 425 y 450 Mk., respectivamente, completos, más 50 Mk. de embalaje y otros 35 Mk. si se desea el aparato para ennegrecer las bandas y fijarlas, según carta de dichos señores, fechada el 10 Octubre 1907.

verticales (*), sin los graves inconvenientes que esto acarrearía, como elevado coste del local, influencia perniciosa de los vientos, cambios de temperatura, etc.

En su reciente obra *La Registrazione dei terremoti*, trae el Doctor Agamennone un ejemplo familiar, que permite hacerse cargo, con gran facilidad, del modo de funcionar los péndulos horizontales. Lo ponemos á continuación, algo acortado y cambiado.

Figurémonos la puerta de un estante, cuyos goznes tengan poco rozamiento, y tendremos un péndulo horizontal, cuyos puntos de suspensión y de apoyo, ó sea el eje sobre que gira, son sus goznes y la *masa* la misma puerta.

Si el estante está bien nivelado, la puerta permanecerá en la posición en que se la deje. Si, por el contrario, se halla inclinado hacia adelante, tendrá tendencia á permanecer abierta, inclinándose á uno ú otro lado, según se desnivele el mueble lateralmente, sin que acuse desviación si se le inclina tan solo atrás ó adelante. Al agitarlo de un lado á otro, nuestra puerta-péndulo oscilará á permitírselo sus goznes, y su período oscilatorio será tanto mayor cuando menos inclinado hacia adelante se halle el estante, á la vez que tendrá tanta menor tendencia á tomar su propio período oscilatorio cuanto más largo sea éste y menor su roce.

Los péndulos horizontales pueden montarse de varias maneras:

Una de ellas es la bifiliar de Lord Kelvin, empleada en el péndulo fotográfico de Horace Darwin, que antes había usado ya Zöllner en sus péndulos existentes en algunas estaciones rusas y que el Dr. Mainka también ha adoptado.

(*) El sismógrafo más largo hoy existente, parece ser el suspendido no ha mucho por el sabio Director del Observatorio de Catania á 50 metros en la torre de una iglesia. Ya en 1753, el Coronel Barón de Grant había montado uno de 311 pies (93 metros), en el Castillo de Saint-Pierre de Vauvrais, cerca de Louviers (Normandía).—P. Camilo Melzi d'Eril, B. in Boll, S. S. I. X. (1904-1905), pág. 181.

En otra, la masa se suspende por medio de hilos, casi siempre metálicos, y en número de dos, de un soporte apropiado, á la vez que, valiéndose de un estribo, dispuesto horizontalmente, se le obliga á descansar en equilibrio inestable, bien sobre una cavidad cónica ó parabólica, por medio de una punta de acero fijada en el extremo libre del estribo, bien la cavidad labrada en acero, ágata, etc., se halla sujeta en dicho extremo y la punta en el pie del instrumento, suspensión empleada en los péndulos de Grablovitz, Omori, Milne, Bosch, etc. Finalmente, puede montarse la masa en el vértice de una sólida armazón metálica de forma más ó menos parecida á un triángulo isósceles, en el que los puntos de apoyo, convenientemente dispuestos, ocupan los otros dos vértices, y descansan también sobre dos puntas, como en los péndulos de von Rebeur, Rebeur-Ehlert, R.-Hecker, Cancani, Stiattesi.

Las ventajas principales de los péndulos cónicos estriban en dos puntos: la enorme longitud equivalente que pueden alcanzar, aun haciendo caso omiso de su aumento externo, y la poca tendencia que tienen, si su período es suficientemente largo, esto es, superior al de las fases 2.ª y 3.ª de la porción principal de los sismos, aún lejanos, y están *bien construídos* y *cuidados*, á adquirir su propio período oscilatorio.

Cierto es que hoy, con los amortiguadores, se puede conseguir lo mismo, cualquiera que fuese su período.

Lo primero los hace muy sensibles á las desviaciones de la vertical, y lo segundo más propios que los verticales, aún largos, para el estudio de las agitaciones que hayan logrado conmoverlos; en ellos se suele hallar el máximo del movimiento en plena porción preliminar, y en los cortos, como los Vicentini, casi al principio de los primeros movimientos preliminares, aunque su ritmo suela ser muy superior al suyo propio (unos 5ˢ ó poco más, como término medio en Cartuja).

La fórmula que expresa la longitud de un péndulo simple

ó vertical, cuyo período oscilatorio fuese igual al de un péndulo horizontal, es bien sencilla.

Representemos (fig. 1.ª, B) un triángulo rectángulo, cuyo cateto menor $b'e'$ sea igual á la distancia que existe entre el centro de gravedad de la masa M' y la línea que media entre dicho punto y la que une á entrambos puntos de apoyo $c'd'$ en los péndulos Rebeur, Cancani, Stiattesi, ó be (figura 1.ª, A), distancia entre dicho centro de la masa M y el punto de apoyo del estribo e, en los péndulos Milne, Grablovitz, Omori, etc., y llamemos α al ángulo que forma la línea ec ó $c'd'$, cateto mayor, con la vertical, línea que es prolongación de la que une al punto de apoyo con el de suspensión.

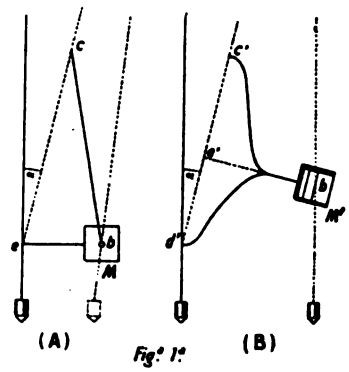


Fig.ª 1.ª

Este ángulo α, es, prácticamente, igual al sustentado por el cateto menor eb ó $e'b'$, dado que este último se halla horizontal, ó poco menos, y ambos son ángulos alternos-internos entre paralelas. De donde tendremos, llamando L y L' á las longitudes buscadas:

$$L = \frac{be}{\text{sen } \alpha} \; ; \; L' = \frac{b'e'}{\text{sen } \alpha},$$

lo que nos da su valor en funcion inversa de α; así, para

$$\alpha = 0 \quad L = \infty.$$

De aquí se deduce que, en igualdad de circunstancias, y á no mediar alguna otra razón más poderosa en contra, resulta conveniente suspender los péndulos á buena altura y proveerlos de estribos, etc., suficientemente largos.

Sin embargo, esto tiene sus límites, lo mismo que el período, el cual, si se exagera para lo que pueda resistir el péndulo (*), éste se transforma en *lábil*, esto es, carece de la fuerza suficiente para oscilar y volver á su punto de reposo, quedándose desviado á uno ú otro lado.

Los péndulos del Profesor Omori, que son los que acostumbran á trabajar con períodos más considerables, no suelen pasar de 60ˢ, ó poco más, enorme longitud equivalente á un kilómetro, aunque haya construído péndulos capaces de trabajar con 120ˢ = 3.600 metros (**), y hasta hace poco, con 135ˢ, casi 4.500 metros (***).

Esas longitudes son hoy irrealizables en los péndulos verticales. Si supusiéramos uno suspendido en la cúspide de la torre Eiffel y á ésta encima de la mina más profunda existente, en la que se correspondiesen todos los pozos unos debajo de otros, apenas pasaríamos de la mitad de la última cifra citada.

(*) La longitud del período de un péndulo se halla íntimamente ligada con el estado de sus puntos de suspensión y de apoyo, así, por ejemplo, en un caso en que empleamos uno de los últimos de acero mal templado y blando, el péndulo que resistía bien períodos de 42ˢ y aún más sin hacerse *lábil*, no podía pasar, á los 8 ó 10 meses, de 22ˢ. Esto es, se había reducido su longitud de 441 á 121 metros.

(**) *Publications*..... Núm. 5, 1901, pág. 10.

(***) *Bulletin of the Imperial Earthquake*, I, C., vol. 1, núm. 4.— *Tokyo August 1907*, pág. 192, pl. XLIIᵀ.

XXXVIII.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia octava.

SEÑORES:

Obtuvimos en la Conferencia precedente las N y T en función de la a, b, que era resolver este problema: determinar las tensiones en función de las deformaciones, porque toda deformación, sea la que fuere, con tal que sea continua y finita, depende de las seis cantidades a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3; éstas hacen conocer por las fórmulas en cuestión los valores de N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, y, por último, toda tensión interior depende de estas seis cantidades.

Pero no lo olvidemos; esto supone resuelto el problema general, supone conocidas u, v, w en función x, y, z, si se trata del equilibrio, y de estas variables y además del tiempo, si se trata del movimiento.

Ahora bien; si dicho problema general estuviera resuelto, para cada punto del cuerpo podríamos determinar las a, b, porque ya sabemos que dependen de las derivadas de primer orden u, v, w en función de x, y, z.

Y conocidas a y b para cada punto quedaban conocidas N, T.

***

Pero aunque las fórmulas siguientes,

$$\left.\begin{array}{l} N_1 = A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3 + B_1b_1 + B_2b_2 + B_3b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ T_1 = C_1a_1 + C_2a_2 + C_3a_3 + D_1b_1 + D_2b_2 + D_3b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} (3'),$$

nos expresen las N y las T, es decir, las tensiones en función lineal de a y b, ó sea de las deformaciones, en el caso general los coeficientes A, B, C, D serán funciones de x, y, z, y, por lo tanto, distintos para cada punto del cuerpo, si es heterogéneo; circunstancia que, salvo casos particulares, hace del problema algo superior á los recursos de la ciencia actual.

Y por eso decíamos al terminar la última conferencia, que procuraríamos introducir hipótesis que simplificasen la cuestión. En términos aún más claros, aunque más modestos: que sólo intentaríamos resolver casos particulares, que se refieren á los cuerpos homogéneos, y más concretamente á los cuerpos isótropos, de que ya hablábamos en las conferencias del año anterior.

En resumen, vamos á dedicar esta conferencia á simplificar las fórmulas (3′), ó mejor dicho, sus coeficientes.

Para ello, siguiendo la marcha de Mr. Sarrau, que es una de las más sencillas, más claras y más metódicas, vamos á examinar cuatro casos particulares y al fin uno solo, el de los *cuerpos isótropos*, porque los tres primeros no hacen más que preparar la solución del último.

En realidad, el caso de los cuerpos isótropos es el que tiene más aplicación en la práctica, como que en los cuerpos de la Naturaleza lo más común es que los sistemas elásticos, ó sean homogéneos, ó sean isótropos, ó *próximamente* lo uno ó lo otro.

Los casos que vamos á estudiar son los siguientes:

Considerando siempre un punto del cuerpo, supondremos:

1.° Que por ese punto pasa un plano de simetría.

2.° Que pasan dos planos de simetría rectangulares.

3.° Que pasan tres planos de simetría, formando un triedro trirrectángulo.

4.° Que el cuerpo sea isótropo en ese punto, y es claro que, si además de ser isótropo en dicho punto es homogéneo, será totalmente isótropo, sea cual fuere el punto que se

elija, y ésta es la mayor y la más práctica de las simplificaciones.

Y aun así y todo, como ya dijimos el año anterior, no puede llegarse á una solución general.

El problema se plantea, se escriben las ecuaciones diferenciales, de las cuales depende, pero el cálculo integral es impotente hoy para dar una solución absolutamente general.

Pasemos, pues, á la simplificación del problema.

***

Y, ante todo, establezcamos *un principio general*, del que haremos aplicación á los casos particulares indicados.

Suponemos, para en adelante, mientras no advirtamos otra cosa, que se trata de sólidos elásticos homogéneos, de suerte que, lo que digamos para un punto, se entiende que puede repetirse para todos los demás puntos del sistema.

Y el principio á que nos referimos, es el siguiente:

Si en un punto de un sistema elástico, las ecuaciones que determinan N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, en función a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, son las mismas y tienen, por lo tanto, los mismos coeficientes para dos sistemas de ejes trirrectangulares determinados, que tengan dicho punto por origen, entre los coeficientes únicos A, B, C, D existirán relaciones que se obtienen fácilmente y que reducen el número de estos coeficientes.

Para abreviar la demostración, emplearemos un sistema de notaciones simbólicas, que vamos á explicar.

Hemos visto que las seis ecuaciones (3'), determinan las N y T en función de las a y b; pues esto lo expresaremos con una sola ecuación simbólica, en esta forma:

$$(N, T) = L\,(a, b, A, B, C, D), \qquad (1)$$

la cual significa que hay seis ecuaciones, que dan los valores

de N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, en función lineal a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, y en que los coeficientes son las letras A, B, C, D, con diferentes subíndices.

Supongamos que la ecuación (1) se refiere al primer sistema de ejes.

Otra ecuación simbólica, análoga á la anterior, expresará otras seis ecuaciones lineales, que determinarán N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, T'_2, T'_3 en función de a'_1, a'_2, a'_3, b'_1, b'_2, b'_3 con los mismos coeficientes que la anterior, porque ésta es la hipótesis: que las N', T' se expresan del mismo modo en función de las a', b', que las N, T se expresaban en función de la a, b.

Tendremos, pues,

$$(N', T') = L(a', b', A, B, C, D). \qquad (2)$$

Pero hemos visto que, cuando se cambia de coordenadas rectangulares, las nuevas tensiones se expresan en función de las precedentes, y que otro tanto puede repetirse para las deformaciones.

Los valores de las seis cantidades N', T', que desarrollamos en una de las conferencias precedentes en función de las N, T, las expresaremos por la siguiente ecuación simbólica análoga á las (1) y (2)

$$(N', T') = L(N, T), \qquad (3)$$

en que los coeficientes de los términos lineales en N y T dependerán tan sólo de las constantes que determinan los nuevos ejes con relación á los primitivos; es decir, de los cosenos de los ángulos que forman entre sí unos y otros ejes.

Del mismo modo, las nuevas deformaciones elementales a', b', se expresarán en función lineal de las deformaciones

primitivas a, b y de los coeficientes que determinan los nuevos ejes con relación á los primeros.

Tendremos, pues,

$$(a', b') = L(a, b). \qquad (4)$$

Resumamos, pues, estos cuatro grupos de ecuaciones en que L significa función lineal, y tendremos el sistema

$$(N, T) = L(a, b, A, B, C, D), \qquad (1)$$
$$(N', T') = L(a', b', A, B, C, D), \qquad (2)$$
$$(N', T') = L(N, T), \qquad (3)$$
$$(a', b') = L(a, b). \qquad (4)$$

Ahora bien, substituyendo las N', T', tomadas del grupo (3), y las a', b', tomadas asimismo del grupo (4), en el grupo (2), éste no dependerá más que de N, T, a, b, y de las constantes A, B, C, D, y es claro que debe coincidir con el grupo (1), porque N, T se expresan de una manera única en función de a, b.

Si representamos por la ecuación simbólica

$$L(N, T, a, b, A, B, C, D) = 0, \qquad (5)$$

el grupo de seis ecuaciones que resulten no habrá más que identificar el grupo (5) con el grupo (1), igualando coeficiente, lo cual nos dará cierto número de relaciones entre A, B, C, D, que es precisamente lo que nos proponíamos demostrar, y con esto se habrá reducido el número de los treinta y seis coeficientes A, B, C, D que entraban en el grupo (1).

En todo punto del sistema en que se verifique la propiedad indicada podrá reducirse el número de coeficientes; y si el sistema es homogéneo y los coeficientes son constantes por lo tanto, la simplificación será valedera para todos los puntos del sólido elástico.

Hagamos aplicación de este principio á los cuatro casos sencillísimos que antes indicábamos.

***

Primer caso, en que para el punto que se considera hay *un plano de simetría.*

Supongamos (fig. 44) que el plano de las y, z es un plano de simetría del sólido elástico, que se considera, y que, por consiguiente, los *valores de* N *y* T, *en funciones de* a, b, *se expresan del mismo modo,* y con los mismos coeficientes en el sistema de ejes (M, x, y, z) que en el sistema (M, x', y, z).

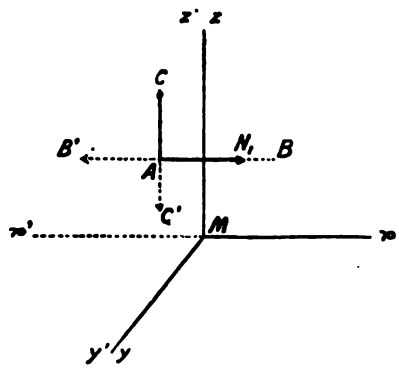


Figura 44

Apliquemos el principio que acabamos de explicar.

Empecemos por los grupos (3 y 4), es decir, por expresar las N', T' en función de las N, T; y las a', b' en función de las a, b.

Para ello necesitamos determinar los nuevos ejes x', y', z' respecto á los antiguos x, y, z, fijando los valores de los cosenos de los ángulos que forman unos con otros.

Formaremos, pues, el siguiente cuadro

	x'	y'	z'
x	$\alpha_1 = -1$	$\beta_1 = 0$	$\gamma_1 = 0,$
y	$\alpha_2 = 0$	$\beta_2 = 1$	$\gamma_2 = 0,$
z	$\alpha_3 = 0$	$\beta_3 = 0$	$\gamma_3 = 1,$

en el que los cosenos de los ángulos que forman los ejes de la línea superior x', y', z' con los ejes de la línea vertical x, y, z están escritos en el encuentro de las horizontales con las verticales, así como sus valores.

En efecto; el eje de las x' (fig. 44) forma con el eje de las x un ángulo de 180°; por eso hemos escrito $\alpha_1 = -1$.

El eje de las y' que coincide con el eje de las y, forma un ángulo de 90°, y por esta razón hemos puesto $\beta_1 = 0$.

Lo mismo para el eje de las z' que coincide con las z: $\gamma_1 = 0$.

El eje de las x' forma con el eje de las y un ángulo recto, de suerte que su coseno es cero; por esta razón tenemos $\alpha_2 = 0$.

El eje de las y' coincide con el eje de las y, su ángulo es cero, y el coseno, 1; por esta razón escribimos $\beta_2 = 1$.

Así hemos obtenido todos los términos del cuadro precédente.

La primera fórmula del grupo (3), que expresa N_1' en función de $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$, es la siguiente:

$$N'_1 = N_1\alpha_1^2 + N_2\beta_1^2 + N_3\gamma_1^2 + 2T_1\beta_1\gamma_1 + 2T_2\gamma_1\alpha_1 + 2T_3\alpha_1\beta_1,$$

según vimos en una de las conferencias anteriores.

Y substituyendo los valores de α, β, γ, tomados del cuadro anterior, resulta

$$N'_1 = N_1.$$

Haciendo igual substitución en los valores N_2, N_3, tendremos igualmente,

$$N'_2 = N_2, \qquad N'_3 = N_3.$$

De la misma manera, la ecuación que da T'_1, en función de $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$, es la siguiente:

$$T'_1 = N_1\alpha_2\alpha_3 + N_2\beta_2\beta_3 + N_3\gamma_2\gamma_3 + T_1(\beta_2\gamma_3 + \gamma_2\beta_3) + \\ + T_2(\gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3) + T_3(\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3),$$

y substituyendo en ella los valores de las α, β, tomados del cuadro fundamental, se reducirá á

$$T'_1 = T_1,$$

porque todos los términos, menos $T_1\beta_2\gamma_3$, se reducen á *cero*, y además, $\beta_2 = 1, \gamma_3 = 1$.

Asimismo, el valor de T'_2, en función de las N y T, es el siguiente:

$$T'_2 = N_1\alpha_3\alpha_1 + N_2\beta_3\beta_1 + N_3\gamma_3\gamma_1 + T_1(\beta_3\gamma_1 + \gamma_3\beta_1) + \\ + T_2(\gamma_3\alpha_1 + \alpha_3\gamma_1) + T_3(\alpha_3\beta_1 + \beta_3\alpha_1).$$

Y substituyendo los valores de α, β, γ, que da el cuadro anterior, se reduce la ecuación precedente á

$$T'_2 = -T_2,$$

porque todos los términos se anulan, menos el término $T_2\gamma_3\alpha_1$, y tenemos, $\gamma_3 = 1$, $\alpha_1 = -1$.

Lo mismo pudiéramos decir de la expresión que da T'_3, en función de las N y T, y tendremos:

$$T'_3 = -T_3.$$

En resumen; el grupo (3), que determinan las N', T', en función de las N, T, se convierte en el grupo siguiente:

$$\left.\begin{array}{lll} N'_1 = N_1, & N'_2 = N_2, & N'_3 = N_3 \\ T'_1 = T_1, & T'_2 = -T_2, & T'_3 = -T_3 \end{array}\right\} (3_1).$$

Tenemos ahora que tomar el grupo (4) y expresar las deformaciones principales a', b', en función de las del primer sistema a, b.

El cálculo es el mismo, y las simplificaciones, idénticas.

Pero es inútil repetir lo ya expuesto, porque de las fór-

mulas desarrolladas en las conferencias anteriores, se deduce, que unas se transforman en otras, poniendo en vez de las N, las a; en vez de las T, las b; asimismo, en vez de N', las a', y en vez de las T', las b'. Como todos los coeficientes son idénticos, las substituciones de α, β, γ darán el mismo resultado, y tendremos que el grupo (4), aplicado á este caso, se convertirá en

$$\left.\begin{array}{lll} a'_1 = a_1, & a'_2 = a_2, & a'_3 = a_3 \\ b'_1 = b_1, & b'_2 = -b_2, & b'_3 = -b_3 \end{array}\right\} (4_1).$$

Sólo nos falta, aplicando el método que antes explicamos, substituir estos valores en el grupo (3) é identificar las ecuaciones que resulten con el grupo (1).

La primera ecuación que comprende el grupo (3) es la siguiente:

$$N'_1 = A_1 a'_1 + A_2 a'_2 + A_3 a'_3 + B_1 b'_1 + B_2 b'_2 + B_3 b'_3;$$

y substituyendo los valores de N'_1, a'_1, a'_2, a'_3, b'_1, b'_2, b'_3, según resulta de (3_1) y (4_1), tendremos,

$$N_1 = A a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + B_1 b_1 - B_2 b_2 - B_3 b_3,$$

Esta ecuación ha de ser idéntica á la primera del grupo (1), que es

$$N_1 = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + B_1 b_1 + B_2 b_2 + B_3 b_3;$$

luego será preciso que tengamos:

$$B_2 = 0, \qquad B_3 = 0,$$

y dicha ecuación se reducirá á

$$N_1 = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 b_3 + B_1 b_1;$$

habrán, pues, desaparecido los términos b_2, b_3, que eran los que cambiaban de signo, y habrán desaparecido dos coeficientes.

Para abreviar la escritura, substituiremos á esta ecuación la siguiente forma:

$$N_1 = L_1 (a_1, a_2, a_3, b_1),$$

entendiéndose que el segundo miembro es una expresión lineal de las cantidades que contiene el paréntesis.

Como la forma de N'_2 y de N'_3 es exactamente la misma que la de la ecuación que hemos considerado, y como las substituciones son también idénticas, porque ni la N, ni las a, ni b_1 varían, y únicamente cambian de signo las b_2, b_3, tendremos otras dos ecuaciones de la misma forma que la última, y que también podremos escribir abreviadamente de este modo:

$$N_2 = L_2 (a_1, a_2, a_3, b_1),$$
$$N_3 = L_3 (a_1, a_2, a_3, b_1);$$

entendiéndose que los segundos miembros son funciones lineales de las cantidades que contienen, que son las mismas que en el segundo miembro del valor N_1.

Es decir, los tres segundos miembros serán funciones lineales de a_1, a_2, a_3, pero los coeficientes serán distintos; por eso la letra que caracteriza la función es distinta para las tres fórmulas, á saber: L_1, L_2, L_3.

Pasemos ahora á las tres ecuaciones restantes del grupo (2), que nos dan los valores de las T' en función de las a', b'.

De estas tres ecuaciones, la primera se encuentra en el mismo caso que las tres ecuaciones que determinan N'_1, N'_2, N'_3, porque ni varía T' ni a_1, a_2, a_3, b_1, y sólo cambian de signo las dos restantes b_2, b_3.

Más claro: el valor de T'_1, que es lineal, es de esta forma:

$$T'_1 = C_1 a'_1 + C_2 a'_2 + C_3 a_3 + D_1 b'_1 + D_2 b'_2 + D_3 b'_3,$$

y substituyendo los valores de los grupos (3_1), (4_1), tendremos

$$T_1 = C_1a_1 + C_2a_2 + C_3a_3 + D_1b_1 - D_2b_2 - D_3b_3,$$

que identificándola con la ecuación cuarta del grupo (1), que es

$$T_1 = C_1a_1 + C_2a_2 + C_3a_3 + D_1b_1 + D_2b_2 + D_3b_3,$$

dará

$$D_2 = 0, \qquad D_3 = 0;$$

y se reducirá el valor de T_1 á

$$T_1 = C_1a_1 + C_2a_2 + C_3a_3 + D_1b_1,$$

ó, abreviadamente, á esta otra:

$$T_1 = L'_1\,(a_1, a_2, a_3, b_1).$$

No sucede lo mismo con las dos ecuaciones que nos quedan, porque ya la T cambia de signo.

Si la ecuación del grupo (3) era

$$T'_2 = C'_1a'_1 + C'_2a'_2 + C'_3a'_3 + D'_1b'_1 + D'_2b'_2 + D'_3b'_3,$$

al substituir los valores de (3_1) (4_1),

$$T'_2 = -T_2, \quad b'_2 = -b_2, \quad b'_3 = -b_3,$$

tendremos

$$-T_2 = C'_1a_1 + C'_2a_2 + C'_3a_3 + D'_1b_1 - D'_2b_2 - D'_3b_3,$$

ó, cambiando signos:

$$T_2 = -C'_1a_1 - C'_2a_2 - C'_3a_3 - D'_1b_1 + D'_2b_2 + D'_3b_3,$$

y comparándola con la correspondiente del grupo (1), que es la quinta:

$$T_2 = C'_1 a_1 + C'_2 a_2 + C'_3 a_3 + D'_1 b_1 + D'_2 b_2 + D'_3 b_3,$$

para que sean idénticas, es decir, de *idéntica forma,* será preciso que los términos que llevan signos contrarios se anulen; de donde

$$C'_1 = 0, \quad C'_2 = 0, \quad C'_3 = 0, \quad D'_1 = 0.$$

Y la ecuación queda reducida á

$$T_2 = D'_2 b_2 + D'_3 b_3,$$

ó, en forma abreviada,

$$T_2 = L'_2 (b_2, b_3).$$

Otro tanto podemos decir para la última ecuación, ó sea la que determina T_3, y resultará

$$T_3 = L'_3 (b_2, b_3).$$

En resumen: cuando en un sistema homogéneo existe para cada punto un plano de simetría, con lo cual es claro que por ser el sistema homogéneo, todos los planos de simetría serán paralelos, las ecuaciones que determinan las N y T serán de la forma

$$N_1 = L_1 (a_1, a_2, a_3, b_1), \qquad T_1 = L'_1 (a_1, a_2, a_3, b_1),$$
$$N_2 = L_2 (a_1, a_2, a_3, b_1), \qquad T_2 = L'_2 (b_2, b_3),$$
$$N_3 = L_3 (a_1, a_2, a_3, b_1), \qquad T_3 = L'_3 (b_2, b_3).$$

Todas estas funciones L son lineales respecto á las a, b: las cuatro primeras tendrán cuatro términos; las dos últimas, dos términos nada más cada una de ellas; de suerte que el

número de coeficientes será *veinte* en vez de los *treinta y seis* primitivos. Para recordar su forma, podemos dar esta regla práctica:

Si el plano de simetría corresponde á los dos subíndices 2 y 3, en las ecuaciones que determinan las N entrarán a_1, a_2, a_3 y la b_1, que corresponde al tercer índice, que aquí será 1; porque los dos subíndices del plano de simetría son 2 y 3.

En la ecuación que determina la T_1, que es la de este tercer subíndice, entrarán las mismas cantidades que en los valores de las N, es decir, a_1, a_2, a_3, b_1.

Por último, en T_2 y T_3, que corresponden á los dos subíndices del plano de simetría, sólo entrarán las dos b con estos mismos subíndices: b_2, b_3.

***

Segundo caso, en que hay dos planos de simetría.

Supongamos que los dos planos de simetría son el de las $y\ z$, que corresponden á los subíndices 2, 3, y el de las $x\ z$, que corresponden á los subíndices 1, 3.

Por tener el sistema el primer plano de simetría según hemos visto, los valores de N y T serán la forma:

$$N_1 = L_1(a_1, a_2, a_3, b_1), \qquad T_1 = L'_1(a_1, a_2, a_3, b_1),$$
$$N_2 = L_2(a_1, a_2, a_3, b_1), \qquad T_2 = L'_2(b_2, b_3),$$
$$N_3 = L_3(a_1, a_2, a_3, b_1), \qquad T_3 = L'_3(b_2, b_3).$$

Y por tener el segundo plano de simetría, aplicando la regla práctica que hace un momento hemos explicado, deberán ser de la forma siguiente:

$$N_1 = L_1(a_1, a_2, a_3, b_2), \qquad T_1 = L'_1(b_1, b_3),$$
$$N_2 = L_2(a_1, a_2, a_3, b_2), \qquad T_2 = L'_2(a_1, a_2, a_3, b_2),$$
$$N_3 = L_3(a_1, a_2, a_3, b_2), \qquad T_3 = L'_3(b_1, b_3).$$

Como todas estas formas son lineales, la única manera de que los primeros valores de T y N sean compatibles con los segundos, es que los coeficientes de las letras que no sean comunes se anulen.

Por ejemplo: en el primer valor de N_1 entra b_1; pero no entra en el segundo valor de N_1; luego b_1 debe desaparecer, y lo mismo podemos decir de b_2, que no entra en el primer valor.

Otro ejemplo todavía: en el primer valor de T_1, entran a_1, a_2, a_3, pero no entra en el segundo valor, que sólo contiene b_1, b_3; luego a_1, a_2, a_3 deben desaparecer de T_1, y otro tanto puede decirse de b_3, que entra en el segundo valor, pero no en el primero.

En suma; para formar los valores de N y T, cuando hay dos planos de simetría, formaremos sistemas lineales que sólo contengan las letras comunes á las dos ecuaciones correspondientes.

Y tendremos para dichos valores de N y T, en el caso en que hay dos planos de simetría, y éstos corresponden á los subíndices 2, 3 y 1, 3:

$$N_1 = L_1(a_1, a_2, a_3), \qquad T_1 = L'_1(b_1) = h_1 b_1,$$
$$N_2 = L_2(a_1, a_2, a_3), \qquad T_2 = L'_2(b_2) = h_2 b_2,$$
$$N_3 = L_3(a_1, a_2, a_3), \qquad T_3 = L'_3(b_3) = h_3 b_3;$$

estas ecuaciones son lineales como todas las anteriores.

Las tres primeras contienen tres términos con a_1, a_2, a_3; las tres últimas, uno sólo con cada una de las b_1; por eso, llamando h_1, h_2, h_3 á los coeficientes, les hemos dado la forma que va indicada.

El número de coeficientes será, por lo tanto, *doce*, que á éstos se reducen los *treinta y seis* de las fórmulas primitivas, para el caso en que hay dos planos de simetría.

***

Tercer caso, en que hay tres planos de simetría que corresponderán á las combinaciones de subíndices 2 . 3; 3 . 1; 1 . 2.

Por tener dos planos de simetría, 2 3, 3 1, los valores de N y T, tendrán la última forma que hemos hallado, á saber:

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1(a_1, a_2, a_3), & T_1 &= h_1 b_1, \\ N_2 &= L_2(a_1, a_2, a_3), & T_2 &= h_2 b_2, \\ N_3 &= L_3(a_1, a_2, a_3), & T_3 &= h_3 h_3. \end{aligned} \qquad (A)$$

Mas por tener el tercer plano de simetría correspondiente á los subíndices 1 y 2, su forma debe ser

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1(a_1, a_2, a_3, b_3), & T_1 &= L'_1(b_1, b_2), \\ N_2 &= L_2(a_1, a_2, a_3, b_3), & T_2 &= L'_2(b_1, b_2), \\ N_3 &= L_3(a_1, a_2, a_3, b_3), & T_3 &= L'_3(a_1, a_2, a_3, b_3). \end{aligned} \qquad (A')$$

Si el sistema elástico ha de tener tres planos de simetría, será preciso que las fórmulas A, A' sean compatibles, y para ello, basta evidentemente que desaparezcan los términos que no sean comunes á ambas fórmulas, para que resulte una fórmula general compatible con las de los grupos A, A'.

Y aquí resulta, que en los valores N_1, N_2, N_3 del grupo A', deberá desaparecer b_3; y que en los valores T_1, T_2, T_3 de este grupo A' deberán desaparecer asimismo: de la primera b_2, de la segunda b_1 y de la tercera a_1, a_2, a_3.

Con lo cual quedan las fórmulas A.

En suma; las fórmulas que sirven para el caso de dos planos de simetría, sirven, asimismo, para el de tres planos de simetría del sistema.

Estas últimas fórmulas tienen, evidentemente, doce coeficientes, á saber: tres para cada uno de los valores N_1, N_2, N_3; además, h_1, h_2, h_3 para los valores de T.

Se han reducido, por lo tanto, á la tercera parte de los 36 coeficientes primitivos.

***

Antes de proceder á mayores simplificaciones, conviene fijar las ideas sobre los resultados obtenidos hasta aquí.

La simetría de que venimos hablando no es enteramente una simetría geométrica, aunque sí lo sea para la construcción del sistema.

Esto merece una explicación.

Sea, por ejemplo, A, un punto del plano de las $y\ z$, y supongamos que AB representa la componente N_1.

Es claro que su simétrica es AB', pero referida á los nuevos ejes $x'\ y'\ z'$, ó bien, x', y, z, porque los dos últimos no cambian.

Aun así, choca la igualdad

$$N'_1 = N_1,$$

que hemos obtenido, porque la dirección de N'_1 es la del eje negativo de las x, y parece á primera vista que debía tener signo contrario.

Mas obsérvese que hay una hipótesis fundamental en los ejes primitivos, y que subsiste en la transformación de ejes, á saber: que las N y T se calculan determinando la acción de la región positiva sobre la negativa, y como la x' ha cambiado de dirección, la $N'_1 = AB'$ representa la acción de la parte negativa de los antiguos ejes sobre la positiva; luego AB cambia, por decirlo así, dos veces de signo: por actuar en el sentido de las x' negativa debía llevar el signo —, pero por expresar la acción de la parte negativa sobre la positiva debe cambiar de signo otra vez, y en valor numérico y en signo queda por fin igual á N_1.

Aplicando estas consideraciones á T_2, por ejemplo, se explica el cambio de signo de esta componente, y por qué el cálculo nos ha dado

$$T'_2 = -T_2.$$

En efecto; la T_2 era AC; en el nuevo sistema de ejes, T'_2 es AC', porque no representa ya la acción de la región po-

sitiva primitiva sobre la negativa, sino la de ésta sobre aquélla, por el cambio de dirección de las x. T'_2, en el nuevo sistema, tendrá el mismo valor numérico que T_2, pero signo contrario, como se ven en la figura.

De aquí la ecuación precedente.

Estas consideraciones nos hubieran bastado, sin necesidad de cálculo ninguno, para establecer en el caso de un plano de simetría,

$$N_1 = N'_1, \qquad T_1 = T'_1,$$
$$N_2 = N'_2, \qquad T_2 = -T'_2,$$
$$N_3 = N'_3, \qquad T_3 = -T_3.$$

***

Otra observación todavía.

Obtuvimos antes un resultado notable, á saber: que si el sistema tenía dos planos de simetría rectangulares, tenía otro más, rectangular con los primeros.

Si se tratara de un problema de Geometría pura, esto sería completamente falso. En el caso presente, el cálculo demuestra su exactitud, puesto que la hipótesis de tres planos de simetría conduce á la misma *forma* que el de dos.

También pudiera preverse esto y de una manera sencilla.

Si el plano de simetría es el de yz, no cambia de signo T_1 y cambian T_2 y T_3, así

$$T'_1 = T_1, \quad T'_2 = -T_2, \quad T'_3 = -T_3.$$

Si es plano de simetría además, el de las xz no cambia T'_2 y cambian las otras dos.

De modo que

$$T''_1 = -T'_1 = -T_1, \quad T''_2 = T'_2, = -T_2,$$
$$T''_3 = -T'_3 = T_3;$$

pero

$$T''_1 = -T_1, \quad T''_2 = -T_2, \quad T''_3 = T_3$$

corresponde al caso en que el plano de simetría es el de las xy.

De todas maneras, para no alargar estas discusiones, no insistiremos sobre dicha observación.

Pasemos ahora á la simplificación definitiva, es decir, veamos á qué formas quedan reducidos los valores de las N y T, cuando el sistema elástico es homogéneo é isótropo.

***

Cuarto caso. Suponemos que el sistema es, como queda dicho, homogéneo é isótropo.

Por el pronto, si el sistema es homogéneo y es isótropo en un punto, será isótropo en todos los puntos.

Suponemos, además, que en el punto M es completamente isótropo, es decir, que tiene la misma constitución física, todo alrededor de M.

Analíticamente esto se expresa diciendo: que si para un sistema de ejes trirrectangulares, cuyo origen sea M, las N y las T tienen expresiones lineales con determinados coeficientes en función de las a, b, para otro sistema cualquiera de ejes trirrectangulares, los coeficientes serán los mismos.

No hay, pues, más que cambiar de coordenadas é identificar las nuevas fórmulas con las primitivas para todos los valores de las constantes, que determinan los nuevos ejes, respecto á los primeros.

Pero podemos simplificar el cálculo, puesto que si el sistema es isótropo, tendrá evidentemente tres planos de simetría; de suerte que no debemos tomar los valores generales de las N y T, sino que podemos partir de los valores simpli-

ficados *(A)* que hemos obtenido hace un momento, y que corresponden al caso en que el sólido elástico es simétrico respecto á tres planos rectangulares.

Partamos, pues, de estas fórmulas, que abreviadamente escribiremos:

$$N_1 = L_1(a_1, a_2, a_3), \qquad T_1 = h_1 b_1,$$
$$N_2 = L_2(a_1, a_2, a_3), \qquad T_2 = h_2 b_2,$$
$$N_3 = L_3(a_1, a_2, a_3), \qquad T_3 = h_3 b_3,$$

en que L significa una función lineal, según hemos dicho hace un momento.

Las fórmulas que dan los valores de N y T para el caso en que el sólido sea completamente isótropo, deben estar evidentemente contenidas en las anteriores.

Claro es que si el cuerpo es isótropo y cambiamos de ejes coordenados rectangulares, conservando, desde luego, el mismo origen M, la forma no deberá cambiar.

Pues sometamos los ejes x, y, z á una substitución circular

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ y, & z, & x \end{vmatrix}.$$

Es decir, que al eje de las x substituimos el eje de las y, que será la nueva x'; á y substituiremos el eje z, que llamaremos y'; y á z substituiremos x, que será el nuevo eje z'.

En este caso, es evidente que las N y las T sufrirán una substitución circular: lo que antes era N_1, será N_2, y así sucesivamente, y lo mismo para las T, de modo que tendremos para las N y T:

$$\begin{vmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ N_2 & N_3 & N_1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ T_2 & T_3 & T_1 \end{vmatrix}.$$

Otro tanto podremos repetir para las a y b: es decir,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Y siempre las fórmulas deberán quedar las mismas que en el primer sistema de ejes.

Apliquemos este principio.

Los valores de N_1, N_2, N_3, desarrollados, serán:

$$N_1 = A_1\ a_1 + A_2\ a_2 + A_3\ a_3,$$
$$N_2 = A'_1\ a_1 + A'_2\ a_2 + A'_3\ a_3,$$
$$N_3 = A''_1 a_1 + A''_2 a_2 + A''_3 a_3.$$

Si á la primera fórmula aplicamos las substituciones circulares de las N y las a, tendremos

$$N_2 = A_1 a_2 + A_2 a_3 + A_3 a_1.$$

Pero esta fórmula debe coincidir con la segunda del grupo anterior, que da el valor N_2, luego deberemos igualar los coeficientes, y tendremos las relaciones

$$A'_1 = A_3, \qquad A'_2 = A_1, \qquad A'_3 = A_2,$$

con lo cual, los coeficientes de la segunda, se reducen á los de la primera, y tendremos

$$N_2 = A_1 a_2 + A_2 a_3 + A_3 a_1.$$

Aplicando á ésta las mismas substituciones circulares de las N y a, pasaremos del eje de las y al eje de la z, de modo que

$$N_3 = A_1 a_3 + A_2 a_1 + A_3 a_2.$$

Pero como el cuerpo es isótropo, y este cambio de ejes no

varía, ni los valores, ni la forma de estos valores, la última ecuación debe coincidir con la tercera del grupo anterior; es decir, que

$$N_3 = A_1 a_3 + A_2 a_1 + A_3 a_2$$

y

$$N_3 = A''_1 a_1 + A''_2 a_2 + A''_3 a_3$$

deben ser idénticas, para lo cual es preciso que los coeficientes de a_1, a_2, a_3, sean iguales, y tendremos las relaciones,

$$A''_1 = A_2, \qquad A''_2 = A_3, \qquad A''_3 = A_1.$$

De este modo, todavía habremos reducido los tres últimos coeficientes á los de la primera, y el valor de N_3 se expresará así:

$$N_3 = A_1 a_3 + A_2 a_1 + A_3 a_2.$$

En resumen: las tres fórmulas primeras se expresan de este modo, en función de tres coeficientes A_1, A_2, A_3,

$$N_1 = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3,$$
$$N_2 = A_1 a_2 + A_2 a_3 + A_3 a_1,$$
$$N_3 = A_1 a_3 + A_2 a_1 + A_3 a_2.$$

Pasemos ahora á los valores de T, aplicando las mismas substituciones circulares.

Si á

$$T_1 = h_1 b_1,$$

le aplicamos la substitución de las T y b, puesto que no entra a, tendremos

$$T_2 = h_1 b_2,$$

que ha de ser idéntica á

$$T_2 = h_2 b_1,$$

de donde

$$h_1 = h_2.$$

Aplicando á

$$T_2 = h_2 b_2,$$

las mismas substituciones, resulta

$$T_3 = h_2 b_3,$$

que ha de coincidir con

$$T_3 = h_3 b_3;$$

de modo que

$$h_2 = h_3,$$

y como antes decíamos,

$$h_1 = h_2,$$

se obtendrá por fin

$$h_1 = h_2 = h_3.$$

Resulta en definitiva,

$$T_1 = hb_1, \qquad T_2 = hb_2, \qquad T_3 = hb_3,$$

siendo h una constante única, igual á h_1, h_2, h_3.

En resumen: por virtud de esta simplificación, fundada en la isotropía del sistema, tendremos para N y T las fórmulas siguientes en que ya no entran más que cuatro constantes, A_1, A_2, A_3, y h.

$$\begin{aligned} N_1 &= A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3, & T_1 &= hb_1, \\ N_2 &= A_1 a_2 + A_2 a_3 + A_3 a_1, & T_2 &= hb_2, \\ N_3 &= A_1 a_3 + A_2 a_1 + A_3 a_2. & T_3 &= hb_3. \end{aligned}$$

Fundándonos siempre en la isotropía del sistema, que aplicamos por grados para simplificar los cálculos, aunque hu-

biéramos podido aplicarla de una vez, y dejando el mismo el eje de las x, cambiemos los ejes de las y y z, uno en otro.

Claro es que cambiando los ejes y, z, uno por otro, lo que antes era a_2, será ahora a_3, y recíprocamente, porque cada dilatación acompaña á su eje, no hace más que cambiar de nombre; en rigor, tendríamos, acentuando las nuevas dilataciones, $a'_2 = a_3$, y $a'_3 = a_2$, de suerte, que la primera fórmula, que debe conservar la misma forma, sería,

$$N'_1 = A_1 a_1 + A_2 a'_2 + A_3 a'_3,$$

y substituyendo

$$N'_1 = N_1, \quad a'_2 = a_3, \quad a'_3 = a_2,$$

tendríamos

$$N_1 = A_1 a_1 + A_2 a_3 + A_3 a_2.$$

Para que esta fórmula sea idéntica á la primitiva,

$$N_1 = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3,$$

lo cual es preciso; porque el valor de N_1 debe ser siempre el mismo y debe estar expresado del mismo modo por a_1, a_2, a_3, deberemos establecer la condición

$$A_2 = A_3,$$

con lo cual disminuímos un coeficiente y reducimos el valor de N_1 á

$$N_1 = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_2 a_3,$$

ó bien

$$N_1 = A_1 a_1 + A_2 (a_2 + a_3),$$

que también puede ponerse, agregando y restando $A_2 a_1$, bajo la forma

$$N_1 = A_2 (a_1 + a_2 + a_3) + (A_1 - A_2) a_1.$$

Introduzcamos esta simplificación en el valor de N_2, y tendremos

$$N_2 = A_1 a_2 + A_2 a_3 + A_2 a_1,$$

y agregando y restando A_2, a_2,

$$N_2 = (A_1 - A_2)\, a_2 + A_2\, (a_1 + a_1 + a_3).$$

Del mismo modo, introduciendo en el valor de N_3 la condición $A_2 = A_3$, tendremos que

$$N_3 = A_1 a_3 + A_2 a_1 + A_3 a_2$$

se convertirá en

$$N_3 = A_1 a_3 + A_2\, (a_1 + a_2),$$

y sumando y restando $A_2\, a_3$,

$$N_3 = (A_1 - A_2)\, a_3 + A_2\, (a_1 + a_2 + a_3).$$

Resulta de lo expuesto que los valores $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$, haciendo para simplificar, y según la costumbre,

$$A_1 - A_2 = 2\mu, \qquad A_2 = \lambda,$$

tomarán la forma

$$\begin{aligned} N_1 &= \lambda\,(a_1 + a_2 + a_3) + 2\mu a_1, & T_1 &= h b_1, \\ N_2 &= \lambda\,(a_1 + a_2 + a_3) + 2\mu a_2, & T_2 &= h b_2, \\ N_3 &= \lambda\,(a_1 + a_2 + a_3) + 2\mu a_3, & T_3 &= h b_3, \end{aligned}$$

que son siempre funciones lineales de la a y b; pero que en vez de los 36 coeficientes primitivos, sólo contienen tres coeficientes distintos.

Todavía vamos á reducir estos tres á dos tan sólo, partiendo siempre de la hipótesis de que el sólido elástico es

isótropo, y apurando, por decirlo de esta manera, dicho carácter.

A este fin, cambiaremos de ejes rectangulares, aplicando las fórmulas de transformación.

Llamando α_1, β_1, γ_1 á los cosenos de los ángulos que forma el nuevo eje de las x' con los ejes primitivos x, y, z y N'_1 á la componente de la tensión paralela á dicho eje x', expresaremos el valor de N_1 en función de las componentes primitivas y de las constantes α_1, β_1, γ_1 por la fórmula siguiente, que ya obtuvimos en una de las anteriores conferencias:

$$N'_1 = N_1\alpha_1^2 + N_2\beta_1^2 + N_3\gamma_1^2 + 2T_1\beta_1\gamma_1 + 2T_2\gamma_1\alpha_1 + 2T_3\alpha_1\beta_1.$$

Asimismo, la dilatación paralela al eje de las x', por virtud de la transformación de ejes, y según demostramos en otra conferencia, se expresará por la fórmula siguiente:

$$a'_1 = a_1\alpha_1^2 + a_2\beta_1^2 + a_3\gamma_1^2 + 2b_1\beta_1\gamma_1 + 2b_2\gamma_1\alpha_1 + 2b_3\alpha_1\beta_1.$$

Y no tomamos más que estas dos fórmulas, porque son las únicas que necesitamos para la simplificación que nos proponemos hacer.

El principio de esta simplificación es el siguiente:

Por ser el sólido isótropo, la expresión que da el valor de N'_1 debe tener exactamente la misma forma en los nuevos ejes que N_1 tenía en los primitivos, sean cuales fueren estos nuevos ejes; es decir, independientemente de los valores de α_1, β_1, γ_1.

Todo está reducido á substituir en el valor de N'_1 los valores de N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, y de establecer las condiciones necesarias para que N'_1 se reduzca á la forma N_1.

Tendremos, pues:

$$N'_1 = [\lambda(a_1 + a_2 + a_3) + 2\mu a_1]\,\alpha_1^2 +$$
$$+ [\lambda(a_1 + a_2 + a_3) + 2\mu a_2]\,\beta_1^2 + [\lambda(a_1 + a_2 + a_3) + 2\mu a_3]\,\gamma_1^2$$
$$+ 2\beta_1\gamma_1 \times hb_1 + 2\gamma_1\alpha_1 \times hb_2 + 2\alpha_1\beta_1 \times hb_3,$$

y ordenando:

$$N'_1 = \lambda(a_1 + a_2 + a_3)(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) +$$
$$+ 2\mu(a_1\alpha_1^2 + a_2\beta_1^2 + a_3\gamma_1^2) + h(2\alpha_1\beta_1 b_3 + 2\gamma_1\alpha_1 b_2 + 2\beta_1\gamma_1 b_1).$$

Substituyendo á la cantidad

$$2\alpha_1\beta_1 b_3 + 2\gamma_1\alpha_1 b_2 + 2\beta_1\gamma_1 b_1,$$

su valor deducido de la ecuación que da a'_1 que es

$$a'_1 - a_1\alpha_1^2 - a_2\beta_1^2 - a_3\gamma_1^2,$$

y recordando que

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1,$$

resultará

$$N'_1 = \lambda(a_1 + a_2 + a_3) + (2\mu - h)(a_1\alpha_1^2 + a_2\beta_1^2 + a_3\gamma_1^2) + ha'_1.$$

Hemos demostrado que $a_1 + a_2 + a_3$ es la dilatación cúbica, cantidad constante para todos los sistemas rectangulares de ejes, es decir, que

$$a_1 + a_2 + a_3 = a'_1 + a'_2 + a'_3,$$

de suerte que el valor de N'_1 tomará la forma

$$N'_1 = \lambda(a'_1 + a'_2 + a'_3) + ha'_1 + (2\mu - h)(a_1\alpha_1^2 + a_2\beta_1^2 + a_3\gamma_1^2).$$

Para que N'_1 tenga la misma forma y los mismos coeficientes que N_1, es decir,

$$N'_1 = \lambda(a'_1 + a'_2 + a'_3) + ha'_1,$$

es preciso que sean cuales fueren α_1, β_1 y γ_1 la última parte

del segundo miembro sea *cero*, de suerte, que deberemos tener

$$2\mu - h = 0 \qquad \text{ó} \qquad h = 2\mu.$$

Resulta, pues, que los valores de las N y T, en el caso de que el cuerpo sea isótropo, toman la forma definitiva

$$\begin{aligned}
N_1 &= \lambda(a_1 + a_2 + a_3) + 2\mu a_1, \\
N_2 &= \lambda(a_1 + a_2 + a_3) + 2\mu a_2, \\
N_3 &= \lambda(a_1 + a_2 + a_3) + 2\mu a_3, \\
T_1 &= 2\mu b_1, \\
T_2 &= 2\mu b_2, \\
T_3 &= 2\mu b_3,
\end{aligned}$$

en que no entran más que dos constantes λ, μ.

Estas fórmulas son las mismas que obtuvimos en el curso precedente aplicando el método de Cauchy, y aún redujimos ambas constantes á una sola; pero como no todos los autores aceptan esta última simplificación, nos atendremos á la opinión más general, adoptando definitivamente las fórmulas que preceden.

Si recordamos la significación de las a, b, cuyos valores eran estos,

$$a_1 = \frac{du}{dx}, \; a_2 = \frac{dv}{dy}, \; a_3 = \frac{dw}{dz},$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right), \; b_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right),$$

$$b_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right),$$

representando los tres primeros las dilataciones principales y los tres últimos los deslizamientos, tendremos para N y T en función de las deformaciones las seis fórmulas clásicas.

$$N_1 = \lambda\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) + 2\mu\frac{du}{dx},$$
$$N_2 = \lambda\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) + 2\mu\frac{dv}{dy},$$
$$N_3 = \lambda\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) + 2\mu\frac{du}{dz},$$
$$T_1 = \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right),$$
$$T_2 = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right),$$
$$T_3 = \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right).$$

Los tres primeros aún pueden escribirse en forma más sencilla, recordando que la dilatación cúbica θ la hemos expresado de este modo:

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz},$$

y los valores de N pondrá escribirse en la siguiente forma:

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx},$$
$$N_2 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dv}{dy},$$
$$N_3 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz}$$

Los valores de T serán siempre

$$T_1 = \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right),$$
$$T_2 = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right),$$
$$T_3 = \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right).$$

Queda, pues, resuelto el tercero de los problemas cuyo conjunto constituye el método de Lamé y sus análogos, á saber:

Expresión de las componentes N, T de las tensiones, en función de las deformaciones u, v, w.

En la conferencia próxima estudiaremos el cuarto de los problemas que ya hemos enumerado, á saber:

Ecuaciones de equilibrio de un elemento cualquiera del sólido elástico; y además, si éste está limitado por superficies, *condiciones de equilibrio* de un punto cualquiera de éstas.

Claro es, por los principios de la mecánica, que el problema del movimiento de un sistema elástico se reduce al del equilibrio, contando entre las fuerzas exteriores las fuerzas de inercia.

XXXIX.—Nuevos tuberáceos de España.

POR B. LÁZARO É IBIZA.

Las investigaciones realizadas en los últimos tiempos, han ampliado considerablemente el número de las especies comprobadas que en nuestro país representan la dilatada serie de los hongos, sin que tales avances hagan suponer que estemos cerca de considerar ultimado el catálogo de nuestra flora micológica, mucho más rica, sin duda, que lo que, por la situación y clima generalmente seco, se pudo suponer hace algunos años.

Lo hecho hasta hoy sirve para fundamentar la creencia de que las plantas de éste y de otros grupos de la criptogamia abundan más de lo que los antiguos creyeron; pero queda aún mucha labor, tanto en el terreno de la observación y

comprobación de las especies, como en el de la determinación de las áreas y en el reconocimiento de las formas características y endémicas de la península, pues aun siendo especies muy difundidas la mayoría de las plantas inferiores, no todas ellas tienen esta condición, y es de suponer que país de flora tan rica como el nuestro ha de contener no pocas criptógamas endémicas.

Pensando así, había fijado alguna vez mi atención en el grupo de los hongos tuberáceos, los que, por ser de difusión difícil y por hallarse entre los menos llamativos y vistosos de estos organismos, reunían á todas las condiciones de interés que en los hongos concurren, la probabilidad de ser los menos conocidos entre los macroscópicos, y por consiguiente, de ofrecernos posible y aun probable novedad en su estudio.

Pero pensé también que, no siendo estos hongos de fácil hallazgo sino en localidades muy conocidas y en las que se recogen todos los años en condiciones y estaciones determinadas, la investigación exclusivamente personal, por activa que fuese, había de dar resultados escasos, aun tratándose de otoños é inviernos tan favorables á la producción trufera, como lo han sido los últimamente transcurridos, por la abundancia y continuidad de las lluvias.

Cierto es que, efecto de estas condiciones favorables, durante todo el invierno último han abundado tanto estos hongos en los mercados de Madrid, que rara vez los he visto en mayor cantidad y frecuencia; pero los hongos vienen al mercado desprovistos de una porción de datos, entre ellos, de la clase de terrenos en que viven, de indicación de localidad y de toda noticia acerca de las plantas que los producen, y las referencias que los vendedores suministran respecto de las localidades de origen, merecen, en general, poco crédito, porque el interés comercial mueve á los proveedores á la ocultación de estas noticias ó á darlas trocadas para evitar posibles competencias.

Ocurrióseme entonces dirigirme á las personas indicadas

por su profesión ó por sus aficiones naturalistas, solicitando de ellas datos y ejemplares que pudieran servir de primera materia para mi estudio, y este llamamiento fué tenido en cuenta por buen número de personalidades, especialmente farmacéuticos, en la medida que puede verse al indicar las localidades correspondientes á cada uno de los hongos que son objeto de este trabajo. Justo es que consigne aquí mi personal gratitud á quienes han demostrado interés por este asunto, enviándome para su determinación y estudio ejemplares convenientemente embalados, datos curiosos sobre los yacimientos locales, y algunos de ellos han tenido la feliz idea de enviarme muestras de las plantas consideradas como truferas en cada una de las localidades.

No corresponden los datos reunidos á todas las comarcas españolas, sino muy especialmente á ambas Castillas, Extremadura y alguna localidad de Aragón y de Andalucía.

De la provincia de Madrid, el comercio me las ha procurado de Colmenar Viejo, El Molar, Sierra de Guadarrama y Aranjuez; de Méntrida me las ha enviado D. Sergio García; de Chapinería, mi discípulo Sr. Panadero; de la Póveda, el señor Más y Guindal, y de Valdemorillo, D. Pedro Pérez Peinado; de la provincia de Ciudad Real me han procurado variada y abundante recolección, procedente de las cercanías de la capital, de Corral de Calatrava y de Puertollano, el ilustrado profesor de Historia Natural de aquel Instituto, D. Antonio Martínez y Fernandez Castillo, así como D. Federico Navarro, farmacéutico de Calzada de Calatrava; de la de Toledo, los he recibido de Huerta de Valderrábanos, remitidos por D. Gustavo López y García, y de Santa Cruz del Retamar, por el médico titular de Torre de Esteban Hambrán, D. Juan Alvarez Rico. También me los ha procurado, de las cercanías de Guadalajara, el ya referido Sr. Más y Guindal.

De Extremadura me han remitido ejemplares mi compañero de profesorado el Sr. Rivas Mateos, recolectados en diversas localidades de ambas provincias extremeñas; de Villa-

nueva del Fresno, D. Emilio Durán y Redondo; de Alcuescar (Cáceres), el catedrático de Córdoba y conocido geólogo Sr. Hernández Pacheco, y de las cercanías de Badajoz, los distinguidos profesores de aquel Instituto, D. José Hernández y Alvarez y D. Ramón M. Mendaña. De Andalucía sólo he podido obtener ejemplares de una especie, procedente de Córdoba, por mediación de los Sres. Rodríguez y López Neyra, y de Granada y Loja, por el Sr. Díez y Torrosa. De la provincia de Albacete me ha favorecido con un envio de Río Cabriel, el Sr. Martínez de Pison, conde de Villafranqueza.

De Castilla la Vieja y León he recibido algunos ejemplares, de Olmedo y de Tornadizos (Avila), remitidos por don Daniel Gutiérrez Martín; de Corrales (Zamora), por D. Vicente Fernández Alonso; de Villavieja (Salamanca), por don José Fernández; de Gata y Galache, y de Arévalo (Avila), los que me ha hecho enviar mi comprofesor Sr. Gómez Pamo.

De Aragón he recibido dos envíos de esta clase de hongos, prodecentes de Monegrillo, uno de D. Félix Lecea y otro de D. Miguel Antonio Faci, farmacéuticos ambos en Zaragoza, y un ejemplar de Magallón, en la misma provincia, remitido por D. Agustín Albera y Portolés.

Los ejemplares que he podido estudiar, se refieren, pues, muy principalmente á la región central y á las estaciones de fin de invierno y primavera; pero dentro de estas limitaciones, no carecen de interés y me han confirmado en la opinión de que teníamos en este punto especies mal conocidas cuyo deslinde es conveniente y necesario. Seguramente que la prosecución de estos estudios ha de darnos á conocer mayores novedades, pero, procediendo por partes y no aplazando toda publicidad para la fecha, acaso remota, en que pueda creerse que los tuberáceos de España están suficientemente estudiados, he creído que pudiera tener algún interés la publicación de los resultados ya obtenidos en esta primera campaña de investigación.

I

No son muchos, ni prolijos, los datos que sobre los tuberáceos españoles hallamos en publicaciones anteriores. En la *Flora criptogámica de la península Ibérica*, de D. Mariano del Amo y Mora (Granada, 1870, páginas 570 á 572), se mencionan el *Tuber moschatum*, Bull., el *T. albidum* Cœs, y *T. cibarium* Bull, que en unión del *Elaphomyces cervinum* Nees, constituyen todo lo que en dicha obra se indica de tuberáceos de nuestro país, sin que se mencione ninguna localidad española determinada de ninguna de estas especies. Es, pues, una indicación harto vaga.

En la *Enumeración y revisión de las plantas de la península Hispanolusitana*, del Sr. Colmeiro (tomo V, páginas 677 y 678, Madrid, 1889), aparecen mencionadas cuatro especies de tuberáceos peninsulares, pero no son exactamente las mismas cuatro anteriores, pues no se indica el *Tuber moschatum*, y sí la *Terfezia Leonis* Tul. Del *Tuber cibarium*, aparecen mencionadas en esta obra varias localidades, y se hacen, además, otras referencias de regiones geográficas, sin concretar las localidades; más de todo ello se deduce un área extensa que sólo excluye las provincias del Norte y Noroeste de la península. El *Tuber albidum* tan solo se indica de «Andalucía cerca de Lújar y otras partes» (Rojas Clemente), y hasta se indica un nombre vasco *(Grisolac)* como perteneciente á esta especie, que no parece verosímil que exista en las provincias vascongadas (*). En cuanto al *Elaphomyces cervi-*

(*) El Sr. Aranzadi en sus *Setas y hongos del país vasco* (1897), no hace tampoco mención de tuberáceo alguno, ni conozco ninguna indicación referente á la existencia de estos hongos en dicha comarca por lo que este nombre vulgar, referido al *Tuber albidum*, es inexplicable. Acaso se refiere á las trufas todas y no á esta especie de un modo determinado.

num, sólo aparece citado en una localidad aragonesa, Villarluengo (Xarne), en Soria (Cutanda), y en Andalucía (Colmeiro), sin concretar localidad. De la *Terfezia Leonis*, sólo se puede ver transcrita la mención del Alemtejo (Portugal), donde la indicó Welwitsch.

Dejando aparte la cuestión del *Tuber cibarium* y la de su posible identificación con alguna otra especie, cuestión que me propongo dilucidar, pero no en este trabajo, y la del *Elaphomyces*, de que tampoco me propongo ocuparme ahora, pues lo que yo he podido observar en esta campaña respecto de esta especie es aún muy poco, sí diré que el *Tuber albidum* no es entre nosotros tan raro como podría creerse por esta escasez de noticias, y puedo adicionar algunas localidades á las escasísimas que de él se han mencionado hasta hoy en nuestro suelo.

En los envíos con que me he visto favorecido en los meses de Marzo y Abril del año corriente, he hallado el *Tuber albidum* en los procedentes de las cercanías de Ciudad Real (Martínez y F. Castillo); Méntrida, donde es conocido con la denominación de *criadilla negrilla* (S. García); Huerta de Valderrábanos (Toledo), donde le denominan *morillos* (López y Garcia); Valdemorillo (Pérez Peinado), en cuya localidad le dan el nombre de *criadilla de jara*, y Monegrillo (Zaragoza), de donde me le remitió el Sr. Lecea, datos que amplían considerablemente lo que, respecto de la existencia de esta especie, en nuestro país se conocía hasta el presente.

Pero los resultados más interesantes son los referentes á las especies que creo nuevas, por diferir de cuantos tipos específicos se conocen en Francia, Italia y Africa septentrional y que duplican el número de especies de tuberáceos españoles, aunque seguramente vivirán en nuestro suelo algunos más que aún no hemos tenido ocasión de observar y que habrán de revelarse por los estudios ulteriores que se realicen en otras comarcas y en la estación otoñal.

Cuatro son las especies nuevas que vamos á denominar y caracterizar. De ellas, tres pertenecen al género *Tuber*, y una, al *Terfezia*.

II

Tuber pallidum, *nov. sp.*

Peridios tuberiformes, de dos á cuatro centímetros de diámetro horizontal, por dos á tres de altura, de forma generalmente elipsoidea con la altura menor que el diámetro, frecuentemente irregulares é insimétricos por desarrollarse más un lado que otro, ó por presentar prolongaciones laterales, alguna vez casi esferoideos y no pocas algo apiculados en la base por donde se une á las raíces de las plantas turmales. Sus variaciones morfológicas pueden verse en las figuras correspondientes de las láminas I y III. Superficie blanquecina sucia, como de pardo muy diluído y con leve matíz rosáceo, mate, desigual, sin papilas, frecuentemente surcada por alguna grieta profunda, por la que asoman el tejido interno blanquecino ó amarillento.

Carne casi blanca al principio, que se va agrisando más á medida que avanza la maduración de las ascas, pero no de un modo homogéneo, sino dibujándose zonas grisáceas irregularmente mezcladas con algunas otras más estrechas y de color amarillento pálido (lámina III, figuras 29 y 28). Su sabor es grato, pero no es nunca muy marcado, ni tiene carácter definido. El olor nulo en los peridios jóvenes y bastante acentuado en los ya maduros, de los que se desprende un aroma particular que recuerda el de las chufas en remojo, pero más intenso que el de éstas.

Las ascas son ovoideas irregulares y pueden contener ocho esporas, rara vez menos. Estas son casi esféricas, grisáceas, tienen la exospora equinulada, siendo las espinitas agudas,

espaciadas y de una longitud que iguala á la del radio de las esporas.

En varias de las localidades que menciono es conocida esta especie con el nombre de *criadilla blanca*, nombre que se acomoda bien á su coloración.

No son pocas las localidades que puedo citar del *Tuber pallidum*, pues le he hallado en una gran parte de los envíos de esta primavera. De la provincia de Ciudad Real recibí una abundante remesa de criadillas, procedentes de Calzada de Calatrava, remitida por D. Federico Navarro, farmacéutico de dicha localidad, las cuales resultaron pertenecientes á esta nueva especie, igualmente que los enviados por el señor Martínez y Fernández Castillo, de Corral de Calatrava, Ciruela, La Puebla y cercanías de Ciudad Real.

De la provincia de Madrid, los hallé en los mercados de Madrid, procedentes de El Molar; en los enviados de Méntrida por D. Sergio García; de Chapinería, del Sr. Panadero, y de Valdemorillo, del Sr. Pérez Peinado.

De Castilla la Vieja y de las provincias leonesas, únicamente me han remitido ejemplares de Arévalo (Avila), por mediación del Sr. Gómez Pamo; de Tornadizos (Avila) y de Olmedo (Valladolid), el Sr. Gutiérrez Martín; de Corrales (Zamora), el Sr. Fernández Alonso, y de Villavieja (Salamanca), el Sr. Fernández Gata.

También de Río Cabriel, en la provincia de Albacete, en un envío de D. Manuel Martínez de Pison, conde de Villafranqueza, he hallado algún ejemplar de esta especie.

A juzgar por estos datos, su área debe extenderse por lo menos á las dos Castillas, ó acaso á toda la zona central. El dato de la provincia de Albacete hace posible una ampliación hacia las provincias meridionales.

El *Tuber pallidum* corresponde á la sección de los que tienen las esporas equinuladas y la superficie del peridio carente de berrugas, papilas, placas y de cualquier otra clase de relieve característico, pero difiere suficientemente de to-

das las otras especies que dentro del género presentan estos mismos caracteres. Es de mayor tamaño que el *Tuber rufum* Pico, sin anfractuosidades, ni zonas tomentosas; no es rojizo, ni en su superficie ni en su carne; sus esporas no son elipsoideas y su número pasa de cuatro en cada teca, y la longitud de las espinitas de su exospora es muchísimo mayor, relativamente. Del *Tuber nitidum* Vitt, difiere también por su tamaño mucho mayor y por no ser umbilicado en la base, por su coloración interna y externa y por la forma esferoidea de sus esporas y por las espinillas de la exospora, que, aunque mayores en el *T. nitidum* que en el *rufum*, son proporcionamente más cortas que en el *Tuber pallidum*. Del *Tuber panniferum* Tul, también difiere éste por carecer de los filamentos bisoideos parduscos que acompañan á los peridios y por carecer de depresión, ó fosa umbilical, en su base, aun cuando se aproxime más á él que al *rufum* y al *nitidum* por los caracteres de las esporas.

Por último, el *Tuber pallidum* parece ser parásito de la *Tuberaria variabilis*, carácter que la separa de todas las otras especies de la sección con las que la hemos comparado.

III

Tuber lutescens, *nov. sp.*

Peridios en forma de masas tuberosas, redondeadas ó esferoideas, irregulares, de tres á cinco centímetros de diámetro, con la superficie como abollada ú ondeada, casi mamelonada, poco ó nada apiculada en la base, con algunas, aunque pocas, hendiduras, profundas y con la tierra tan adherida en ésta, que no se desprende totalmente aun repitiendo los lavados. (Véanse las láminas I, figuras 5 á 8, y la III, figuras 29 y 30.) La superficie no presenta papilas ni reticulaciones: es de color pardo amarillento muy pálido, que reprodu-

ce bastante fielmente el de los tubérculos nuevos de la patata, ocráceo claro en las depresiones ó abolladuras que se forman entre las porciones salientes.

La sección (lámina III, fig. 31) muestra la carne blanca y amorfa al principio, grisáceo obscura en su conjunto, formada por vetas grises claras, cuya porción interior es bastante obscura y separadas por líneas estrechas de color y traslucencia céreos. La capa peridial es muy delgada, de 0,25 á 0,50 milímetros, de igual color que la superficie externa, igualmente que las venas delgadísimas que, correspondiendo á la sección de los tabiques, atraviesan las masas del tejido esporífero que forman casi toda la superficie del corte. Son éstas lobuladas, con el contorno sinuoso y con circunvoluciones muy abundantes y separadas por ténues tabiques; la coloración de este tejido esporífero es gris ceniza, que se obscurece algo en la madurez.

Ascas elipsoideas irregulares, con la pared delgadísima, conteniendo generalmente ocho esporas. Estas son esferoideas, equinadas, con las espinillas menores que el radio de la espora, pero no cortas relativamente.

El sabor y el olor de estas criadillas son muy débiles, casi nulos, y no recuerdan ningún olor ni sabor determinado con quien compararlas. En la madurez desprenden un aroma pesado y mal definido. El único nombre vulgar que ha llegado á mi noticia es el de *criadillas blanquillas.*

El *Tuber lutescens* debe ser menos frecuente que el anterior, á juzgar por las localidades en que puedo mencionarle, varias de las cuales son comunes á esta especie y á la anterior. En los mercados de Madrid hállase esta especie, procedente de Colmenar Viejo (Madrid); he hallado algún ejemplar de esta especie en el envío del Sr. Panadero, de Chapinería (Madrid), así como en los del Sr. Martínez y Fernández Castillo, de Puertollano y Corral de Calatrava (Ciudad Real). Su área actualmente conocida corresponde á la región central, aunque como casi todos los datos que

he podido observar se refieren á ésta, nada se opone á la probabilidad de que existan también en otras.

Parece ser que durante varios años se han recogido en el Jardín Botánico, de Madrid, algunas criadillas, según dato que me ha comunicado el Sr. Aterido, jardinero mayor del establecimiento; pero debe haberse extinguido en dicha localidad, pues hace años que no se ha recogido ninguna, ni aun en la última primavera, que tan favorable ha sido á esta producción. El Sr. Aterido, examinando los tipos de las especies que existen en el laboratorio de Botánica de la Facultad de Farmacia, se inclinó á creer que los ejemplares que aparecían en el Botánico correspondían á la especie *Tuber lutescens.*

El *Tuber lutescens* presenta diferencias bien marcadas con los demás pertenecientes á su sección. Difiere del *pallidum* por su forma y por las marcadas ondulaciones de su superficie, por su coloración exterior amarillenta pálida, y sobre todo, por su sección, que muestra en el tejido esporífero un dibujo característico, que en ningún caso presenta esta última especie.

Del *Tuber rufum* y del *nitidum* difiere por la forma de las esporas y carácter de las espinitas de la exospora, y por la forma y mayor tamaño de su peridio que no es deprimido ni elipsoideo como en estas dos especies, sino esferoideo, aunque irregular, pues sus tres dimensiones no difieren sensiblemente; carece de anfractuosidades y no es umbilicado; la coloración no presenta tonos leonados, pardo negruzcos, ni rojizos; su sección, cuyos detalles pueden verse en la descripción de nuestra especie, y en la lámina III, fig. 31, no tienen gran analogía con los dibujos de grandes vetas leonadas con líneas negruzcas que distinguen al *Tuber rufum,* ni con las líneas blanquecinas, rojizas y negruzcas que se entremezclan en la sección del *Tuber nitidum.* Las ascas no son mazudas y pediceladas como en estas especies, ni las esporas elipsoideas ú ovales, sino esféricas y con pestañas sensiblemente más largas que en las especies con que comparamos;

el número de esporas contenido en cada asca es casi siempre el de ocho, mientras las dos especies antedichas presentan generalmente cuatro y aun frecuentemente una sola.

IV

Tuber sinuosum, *nov. sp.*

Las masas perídicas son redondeadas, sumamente irregulares, con aspecto de conglomerados formados por la reunión de diferentes porciones mamelonadas, separadas por anfractuosidades muy profundas (láminas I, figuras 9 á 12, y III, figuras 32 y 33). Su tamaño mide diámetros muy desiguales en cada dirección, oscilando entre cuatro y siete centímetros. La superficie es muy desigual; lisa, mate, sin papilas ni reticulaciones, y la coloración bastante heterogénea, formada por tonos pardos claros, que varían desde el pardo ocre al blanco amarillento, cuyos tonos se mezclan, dando relieve á las hendiduras y sinuosidadas que caracterizan su forma. La masa de estos aparatos esporíferos es notable por su gran consistencia y dureza, que contrasta con todas las demás criadillas de nuestro país, hasta el punto de que este carácter y la forma bastan para distinguir esta especie de todas las demás.

La sección (lámina III, fig. 34), es enteramente blanca, de un blanco puro recién practicada, no reconociéndose en ella al principio más que unas bandas ramosas y ondeadas, irregulares, que tienen brillo sedoso y que originan un dibujo jaspeado especial, por alternar con otras más sencillas que carecen de brillo. Momentos después de efectuar el corte, las porciones sedosas, que son las de tejido esporífero, quedan de un blanco puro y mate, y sus contornos separados por unas líneas de tejido esteril céreo y traslucido que rellena todas las sinuosidades y circunvoluciones que separan éstas.

Las ascas son trasovadas ó piriformes, bastante irregulares, y contienen hasta siete ú ocho esporas esferoideas y equinuladas, con las espinitas cortas, tres ó cuatro veces menores que el radio de la espora.

El sabor es agradable como el de las setas comestibles más estimadas, y su olor intenso recuerda el de las especies mejores de *Pholiota* y de *Psalliota* de los agaricáceos.

El *Tuber sinuosum* no es, sin duda, abundante. Aunque las observaciones sobre el particular no puede decirse que son numerosas en absoluto, lo son relativamente las que he tenido ocasión de hacer acerca de nuestros tuberáceos, que no se refieren sólo á las especies que son objeto de este trabajo, y entre ellas, sólo una he podido hallar que se refiera de un modo seguro á este tipo específico. En el envío realizado por D. Emilio Durán y Redondo, de tuberáceos de Villanueva del Fresno (Badajoz), es donde he hallado los ejemplares que me han servido para conocer este tipo específico, y á ellos pertenecen los que conservo y los que sirvieron para el estudio y para la representación gráfica.

Según me comunicaron los Sres. Rivas Mateos y Durán, estos hongos son designados en Extremadura con los nombres de *criadillas perriegas* ó *perreras*.

No es necesario insistir mucho en los caracteres que definen esta especie y la separan de los otros *Tuber* conocidos dentro de la misma sección. De todas las especies del género, la diferencia, la singularidad de su forma, que puede verse en las figuras correspondientes y más especialmente de las de su sección. Este carácter bastaría para diferenciarle de las otras dos nuevas especies de *Tuber* que se incluyen en este mismo trabajo, de las que además difiere por la consistencia y por la coloración de su carne, por su olor característico y por los detalles del dibujo de su sección y de su estructura. Es inútil compararle con ninguna otra de las especies de este género que carecen de papilas en sus peridios y tengan esporas equinuladas, pues es tan diverso de todas ellas, que

mis dudas tuve al conocerle de que fuese un tuberáceo de otro género; pero como en realidad no le faltan ninguno de los caracteres esenciales de los *Tuber*, y sí difiere de los otros géneros de europeos de esta familia (*Terfezia*, *Chœromyces*, *Balsamia* y *Genea*), hube de decidirme por la determinación genérica de *Tuber*.

V

Terfezia Hispanica, *nov. sp.*

Los aparatos esporíferos son masas tuberiformes muy variables de forma y de tamaño. En algunos ejemplares las formas son sencillas, elipsoideas y esferoideas, ligeramente irregulares y frecuentemente prolongadas en la base en una especie de cuello estrecho que en algunos casos mide dos centímetros de longitud y lleva adheridas algunas raíces de las plantas turmales próximas. Pero generalmente la forma se modifica por crecimientos desiguales semejando á tubérculos irregulares, que alguna, aunque rara vez, recuerdan las formas arriñonadas, piriformes y aun acorazonadas. No es raro el caso, sobre todo en los ejemplares grandes, de presentarse la masa hendida en dos ó tres lóbulos ó compuesta por otros tantos aparatos esporíferos soldados en su base. Su morfología, tan variada, puede observarse en las diversas figuras de la lámina II. La forma apeonzada, bastante ancha en la parte superior, se presenta en la llamada variedad *criadillas vaqueras* (lámina II, figuras 14 y 20; lámina IV, fig. 38).

Las dimensiones son muy varias, de dos centímetros y medio en algunos ejemplares hasta diez de anchura, y poco menos de altura en algún caso. El peso no es menos vario, pero alguno de los ejemplares de Ciudad Real pasó de 350 gramos; alguno de los de Villanueva 233, y el Sr. Men-

daña me cita algunos de Badajoz que excedieron de 400.

Su coloración general externa es siempre, más ó menos, pardo rojiza, que varía de tonos, aun en un mismo ejemplar, desde el pardo ocráceo obscuro al pardo rojizo claro. Los tonos más pálidos, los de pétalos secos de rosa roja, aparecen en los ejemplares más grandes; en las superficies de las depresiones la coloración es siempre más clara que en las partes salientes.

La superficie es siempre mate, sin reticulaciones ni papilas, sembrada de desigualdades, y en los ejemplares muy grandes con algunas grietas muy anchas, pero nada profundas, y sin ellas en los ejemplares pequeños ó medianos.

La sección presenta un tejido rosado-amarillento pálido, que en los ejemplares jóvenes aparece sembrado de constelaciones de tejido esporífero, entre las cuales quedan grandes porciones de tejido estéril. Pero en los aparatos esporíferos más avanzados las manchas de tejido esporífero llegan á cubrir toda la sección, no quedando entre ellas sino algunos filetes muy estrechos. Las manchas de tejido esporífero son muy pequeñas y desiguales, de 0,5 milímetros próximamente como anchura media, de sección angulosa, pero con los ángulos redondeados, y se distinguen al principio del tejido esporífero estéril por ser más coloreadas y algo traslucidas, pero llegan á tomar una coloración rojiza mucho más acentuada.

Las ascas son elipsoideas irregulares, algo comprimidas unas contra otras, lo cual determina en ellas la aparición de algunas caras de poliedro. Las esporas son esferoideas, con papilas tuberculiformes, cortas, redondeadas en su ápice y bastante numerosas, hasta el punto de cubrir casi por completo la superficie de la exospora.

Su carne es bastante consistente en los aparatos esporíferos jóvenes, y cuando éstos alcanzan su madurez, llega á ser más blanda y elástica, mostrándose entonces más jugosa en las secciones. Cuando la superficie de los cortes lleva al-

gunas horas expuesta al aire, se forma por la desecación una película consistente que defiende la masa restante de una desecación excesiva. La capa peridial externa no está verdaderamente diferenciada de las láminas de tejido estéril que separan unas de otras las masas de tejido esporífero, y muchas manchas de éste llegan hasta la superficie del peridio. No tiene sabor definido ni aroma característico, aun cuando es muy buena para comer.

Muchos son los nombres con que se designa esta especie, según las noticias recibidas de las diversas localidades. En Castilla la Nueva la llaman *criadilla bermeja* ó *roja*, nombres que concuerdan bien con su coloración; *criadilla buena* á los ejemplares grandes y redondeados; *criadilla de tamarilla*, *de churra*, *de hierba fina*, por las plantas á que se atribuye la propiedad de turmeras; *criadillas vaqueras*, en Extremadura, á los ejemplares grandes y de forma apeonzada; *turma*, en Aragón; en Villavieja (Salamanca) las llaman *criadillas mayales*, por abundar en Mayo. Esta es, sin duda, la especie más abundante en la mitad meridional de la Península y la que más concurre á los mercados de Madrid. Raro ha sido el envío de cuantos me han hecho los que han tenido la atención de responder á mi llamamiento, en que no haya hallado esta especie, y es la única que me han remitido de localidades andaluzas.

En la provincia de Madrid la he recibido de Méntrida (García), Chapinería (Panadero), La Poveda (Más y Guindal), Valdemorillo (Pérez Peinado), y en los mercados la he hallado procedente de Colmenar Viejo. Además, mi comprofesor Sr. Rodríguez y López Neyra la ha recogido en la dehesa de Moratalá, próxima á esta Corte.

De la de Toledo me ha remitido D. Gustavo López García diversas formas de ella, recolectadas en Valderrábanos, y de Santa Cruz de Retamar, D. Juan Alvarez Rico. En los mercados de Madrid se halla con gran frecuencia procedente de Talavera de la Reina.

De las cercanías de Guadalajara me la ha procurado el Sr. Más y Guindal. De la provincia de Ciudad Real he recibido abundantes surtidos procedentes de Calzada de Calatrava (Navarro), de Puertollano, Corral de Calatrava, La Puebla y Ciruela (Martínez y Fernández Castillo).

Sin duda es vulgar en Extremadura, pues á ella corresponden los ejemplares que de Serradilla me procuró hace años mi querido discípulo y compañero Sr. Rivas Mateos, y que aún conservo, y los que el mismo señor ha recogido este año en la misma localidad y en Torrequemada, en Herquijuela de Guadalerma, en Cardoso, en Campos de Guadilotea y en la Dehesa Alberca, próxima á Cáceres, provincia á la que corresponden todas estas localidades, igualmente que la de Alcuéscar, de donde me las ha procurado el Sr. Hernández Pacheco. En la de Badajoz, el mismo señor me la ha remitido del Coto Vera; el Sr. M. Mendaña, del Cortijo Palomarejo; de las cercanías de Badajoz, el Sr. Hernández y Alvarez; de Villanueva del Fresno, el Sr. Durán y Redondo.

De Andalucía me ha procurado ejemplares de las cercanías de Córdoba el ya citado Sr. Rodríguez López Neyra, y de Calicasas y de Loja, en la provincia de Granada, el señor Díez Tortosa.

También de la provincia de Zaragoza he recibido ejemplares del pueblo de Monegrillo, remitidos primeramente por el Sr. Lecea, y pocos días más tarde por el Sr. Faci, y del pueblo de Magallón me la ha enviado el Sr. Albera.

No debe creerse que el área de esta especie, tan abundante al Sur de la cordillera Carpetovetónica, halle en las sierras que forma ésta un límite infranqueable, pues si bien no la he hallado en los envíos recibidos de la provincia de Avila, la he encontrado en el de Villavieja (Salamanca), debido al señor Fernández Gata, siendo actualmente ésta la localidad más septentrional en que puedo citar la *Terfezia Hispanica*. El nombre de *criadilla bermeja*, que el Sr. Navarro me co-

munica como corriente en la Mancha para designar esta especie, es, sin duda, muy acertado, pues entre sus caracteres más salientes figura la coloración más ó menos rojiza de su superficie y tono algo rosado sucio de su sección. Pero, sin duda, no es el nombre único, pues para designar ciertas formas grandes y marcadamente angostada en su mitad inferior, como las representadas en la lámina II, figuras 14 y 20, y en la lámina IV, figura 38, me han comunicado los Sres. Durán y Rivas Mateos que es corriente en Extremadura el nombre de *criadillas vaqueras*. Estas tienen, como carácter, una forma anchamente apeonzada, una coloración algo más pálida que la del tipo y anchas grietas nada profundas en la parte superior de su superficie, en las que aparecen los tejidos al descubierto, presentando, en este caso, una coloración amarillenta. Estas criadillas podrían constituir una variedad dentro del tipo específico, para lo cual propongo la denominación de var. *turbinata*. Los ejemplares que de ella he podido observar eran, en general, bastante grandes, dentro de las dimensiones de la especie, y procedían de Villanueva del Fresno (Badajoz), Torrequemada (Cáceres), Santa Cruz de Retamar (Toledo) y de Río Cabriel (Albacete).

La *Terfezia Hispanica* es realmente un tipo específico nuevo, bien diferenciado de la especie africana *Terfezia Leonis* Tul. Creo que las indicaciones hechas respecto de la existencia de esta especie en Alemtejo (Portugal), de donde siento no haber podido procurarme ejemplares, acaso puedan identificarse con nuestra especie y no con la africana, á la que sin duda los atribuyó Wellwitsch al cerciorarse de que no eran del género *Tuber*, sino del *Terfezia*, por ser la *Terfezia Leonis* la única especie entonces conocida de este género. El hecho real de que los ejemplares de Córdoba, de Granada y de Badajoz pertenezcan á nuestra especie, hace poco verosímil el que los del Alemtejo se identifiquen con los de una de las especies africanas. Tampoco puede asimilarse á la nueva especie *Terfezia rosea*, recientísimamente

publicada por el Sr. C. Torrend (*), por tener la especie de este distinguido autor las esporas reticuladas, no berrugosas, ni á ninguna de las que allí se indican como mencionadas hasta hoy en Portugal.

Tratándose de señalar diferencias entre la *Terfezia Hispanica* y la *Leonis*, habremos de fijarnos en primer término en el color. Los autores que la describen la asignan coloraciones que varían del blanco al blanco amarillento, y tanto ha sido considerada como característica esta coloración, que observador tan concienzudo y sagaz como Desfontaines, que fué el primero que la dió nombre científico (**), la denominó *Tuber niveum*, lo que seguramente no hubiere hecho si hubiese observado en ella las coloraciones siempre obscuras que presenta la especie española. *Tartufa bianca* llaman á *T. Leonis* los italianos que la conocen, nombre vulgar que se aplica á otras especies de trufas, pero nunca á las que no tienen color claro, y por mucha elasticidad que se quiera emplear en la designación de los colores, nunca podrá llegarse á confundir el blanco con el pardo obscuro. Es curioso que en las figuras en color que de *T. Leonis* se han publicado, algunas la pintan con tonos ocráceos claros (***), acaso porque han visto algunas *Terfezia* que no son blancas ni blanco amarillentas, y han tomado un promedio de coloraciones. Puedo decir que he examinado este año más de un millar de ejemplares de nuestra *Terfezia* sin hallar ninguno blanco, ni blanco amarillento, ni ocráceo pálido.

(*) *Notes de Mycologie portugaise. (Bulletin de la Société portugaise des Sciences naturelles,* tomo I, entrega 4.ª)

(**) Ciertamente los habitantes del Norte de África la conocían antes de Desfontaines, y muy verosímilmente los romanos han comido ya trufas de esta especie; pero no había sido denominada hasta que la estudió este autor.

(***) Por ejemplo Ad. Chatín. *La Truffe,* lámina XIII, fig. 1.ª, sin perjuicio de que en la descripción (pág. 72 de la misma obra) dice que es blanco amarillenta.

La sección presenta también alguna diferencia entre ambas especies. Las masas de tejido esporífero son mucho más numerosas y de menor tamaño en la *T. Hispanica* que en la *T. Leonis*, y también las venillas ó espacios ocupados por tejido estéril que entre estas masas existen son relativamente menores y más delgadas. Pero la diferencia más precisa se refiere á la que puede notarse en los relieves de la exospora. Es un excelente carácter de las esporas de la *Terfezia Leonis* el presentar en la exospora papilas salientes y truncadas en su parte superior á las cuales debe la singularidad de su contorno, que aparece en el campo del microscopio como una rueda dentada mirada en la dirección de su eje. Pues bien: las papilas de la exospora de la *Terfezia Hispanica* carecen de este carácter; no están truncadas en su ápice, sino redondeadas, y cuando se ven de frente no aparecen con base y sección poligonales, sino circulares. Recuerdan más que á la *Terfezia Leonis* á las de otras especies africanas del mismo género, como la *T. metaxasi* y la *leptoderma*, y, sobre todo, á la *Terfezia Boudieri*, de la Argelia meridional. Sobre todo la forma de las papilas recuerda las de esta última por ser cortas y redondeadas; pero en nuestra especie se hallan muy espaciadas y en la *Boudieri* se aglomeran cubriendo por completo la superficie de la exospora. En todos los otros caracteres las diferencias entre estas especies africanas y la nuestra son, por lo demás, muy acusadas. En el cuadro general de las especies del género *Terfezia*, expuesto por Mattirolo (*), no hallo ninguna que pueda sumarse con el tipo de nuestra especie.

Nótese, además, que la *Terfezia Leonis* crece en las regiones montañosas de África, en bosques de pinos y de cedros, y nuestra especie no vive en sitios poblados de árboles, sino de matas cistáceas de escaso desarrollo.

(*) Mattirolo. *Gli Ipogei di Sardegna e di Sicilia*. (Génova, 1900), páginas 37 y 38.

Tales observaciones nos inclinan á creer no sólo en la individualidad específica de la especie española, sino en la posibilidad de que ulteriores deslindes refieran á esta especie algunas de las citas hechas anteriormente como correspondientes á la *Terfezia Leonis.*

VI

Muy interesante sería un estudio completo de las plantas capaces de producir estos hongos, ó sea sobre las plantas llamadas entre nosotros *turmeras* ó *turmales;* pero los datos reunidos no me permiten aún hacerlo con algún carácter de generalidad sino respecto de la *Terfezia.*

Cúmplese en ésta la que parece ser ley general de las trufas todas: el poder ser parásita de diversas especies botánicas, aunque en éstas las especies son casi exclusivamente leñosas grandes, varios árboles y algunos arbustos, mientras en la producción de nuestra *Terfezia,* según parece deducirse de toda la información llevada á cabo, no interviene ninguna especie arbórea ni arbustiva.

Es de notar que en algún libro francés se lee algo curioso respecto del caso. Examinando Chatín la indicación de su compatriota Bonnet respecto á la posibilidad de que el *Cistus salviæfolius* pueda producir trufas de la especie *Tuber melanosporum,* y poniendo en duda esta posibilidad dice (*) que esta especie de jara produce en España la *Terfezia Leonis.* Ignoro el origen de esta afirmación, que no pudo ser fruto de la propia observación del autor francés, pues ni éste consigna el origen del dato ni yo he tenido la fortuna de hallarle en las obras referentes á nuestra flora. En otra parte hace constar (pág. 72 de la misma obra) que, mientras la *Terfezia Leonis* «exige en África bosques de pinos y de ce-

(*) *La Truffe*, pág. 95.

dros», en España le bastan los campos de *Cistus* llamados *turmera*. Indicación es ésta que revela un amplio criterio, acaso demasiado amplio, para admitir que las exigencias de un mismo tuberáceo sean tan diferentes según la localidad, si no acusa cierta facilidad para creer que las cosas que á España se refieren, aun las histórico naturales, puedan tener algún carácter extraordinario.

Si nuestra especie de *Terfezia* es realmente distinta de la africana, la explicación de estos hechos podrá ser más fácil, y éste es un dato que viene á confirmar nuestra tesis. En cuanto á que la planta productora de *Terfezia* en España sea el *Cistus salviæfolius*, bueno será examinar el caso antes de suscribir esta afirmación.

Las plantas llamadas *turmeras* en España no corresponden al *Cistus salviæfolius*, ni siquiera pertenecen al género *Cistus*, ni son leñosas como éstas, pues, aunque cistáceas, pertenecen al género *Tuberaria*, especie *variabilis*, y son plantas herbáceas y anuales.

Como varios de los que me han enviado criadillas para hacer este estudio han tenido la feliz idea de unir la planta que en la localidad se considera *turmal*, y casi todas las remitidas en este concepto venían referidas á la *Terfezia Hispanica*, he reunido datos interesantes respecto de las *turmales* de este hongo. Debo declarar ante todo que ninguna de ellas pertenecía al género *Cistus*. Lo más que he hallado en una de las indicaciones es el nombre de criadilla de *tamarilla*, nombre vulgar que debe referirse al *Cistus Clusii*, pero la planta remitida como turmal para aquel ejemplar, procedente de Valderrábanos, no era un *Cistus*, sino otra cistácea bien pequeña, el *Helianthemum paniculatum*, al que sin duda llaman tamarilla en la localidad por la falta de precisión que caracteriza á la nomenclatura vulgar.

Puedo, pues, afirmar que todas las *turmales* que he tenido ocasión de estudiar son cistáceas pequeñas, y su estudio no ha sido del todo fácil porque estas plantas están general-

mente poco desarrolladas cuando las turmas ó criadillas se producen. Pero vencidas estas dificultades por comparación en todos los casos dudosos con los tipos que contiene mi colección de plantas de España, creo que el resultado de la determinación no carece de interés.

Las turmales estudiadas correspondían en gran parte con las diversas formas de la *Tuberaria variabilis*. Á la variedad *plantagínea* correspondían las turmales remitidas de Monegrillo y de Santa Cruz del Retamar, á la variedad *vulgaris* de esta especie (no *Tuberaria vulgaris)* las enviadas de Valdemorillo y de Valderrábanos (criadilla de hierba fina) y á la variedad *Linnei* la procedente de Serradilla: todas como productoras de *Terfezia Hispanica*. Pero las turmales productoras de esta misma criadilla enviadas de otras localidades, corresponden á otras especies de otro género de cistáceas pequeñas, al género *Helianthemum*. Al ya mencionado *H. paniculatum* otra turmal de Valderrábanos (criadilla llamada de tamarilla), al *H. squamatum* otra de la misma localidad (criadilla llamada de churra) y al *H. salicifolium* la criadilla bermeja de la Calzada de Calatrava. Posteriormente el señor Navarro me remitió dos especies de turmales florecidas, procedentes de esta misma localidad, referidas á la *Terfezia Hispanica* y resultaron ser *Helianthemum vulgaris* Gærtn. *Helianthemum salicifolium* Pers, var. *microcarpum*.

De turmales referentes no á la *Terfezia*, sino á especies de *Tuber* de España, no es mucho lo averiguado, por no haber acompañado á las criadillas las turmales correspondientes sino en muy pocos casos. Á las criadillas blancas de la Calzada de Calatrava *(Tuber pallidum)* acompañaban plantas muy jóvenes de *Tuberaria variabilis*, al parecer, y en fin de Mayo me remitió el Sr. Navarro dos turmales floridas, referentes á este mismo *Tuber*, las cuales resultaron ser *Tuberaria variabilis* Wk. y *Helianthemum paniculatum* Dum. Otras del *Tuber albidum*, que no es de las especies que intervienen en este trabajo, pero respecto de cuyas turmales se sabe

poco, la de Valdemorillo vino acompañada de ejemplares del *Helianthemum Ægyptium* en principio de floración.

Alguna indicación se me ha hecho respecto de que en alguna localidad se consideraba al cardo corredor como turmal de la *Terfezia Hispanica*, pero esto parece poco probable ó por lo menos muy necesitado de confirmación.

VII

Los terrenos en que estos tuberáceos suelen habitar son bastante variados; pero, en general, las especies de que ahora tratamos se encuentran, según los datos que he podido reunir, en terrenos sueltos, en los que es la sílice el factor mineral representado por mayor cantidad, siguiendo á éste arcillas bien rojizas ó bien grises; algunos me indican como preferentes los terrenos cascajosos, en los que abundan las piedras pequeñas, terrenos que, como los anteriores, son sueltos y fácilmente permeables.

Varios me indican que la *Terfezia* suele abundar en los sitios frecuentados por los ganados, como los apriscos, sendas de paso de los montes y cercanías de las corralizas, cosa que muy bien pudiera ser explicada por la abundancia en estos suelos de materias orgánicas, especialmente nitrogenadas, originadas por las deyecciones de los animales.

Los prácticos que se dedican á la recolección de estos hongos reconocen su presencia por un ligero levantamiento de la superficie del suelo y por algunas grietas que corresponden á la tierra bajo la cual yacen. Como su profundidad es sólo de algunos centímetros, en cuanto los aparatos esporíferos tienen algún tamaño, su presencia se acusa al exterior por estos caracteres y por la presencia de las pequeñas cistáceas llamadas turmales. En esto coinciden todos los datos reunidos en mi información. Del empleo de animales, perros

ó cerdos, como auxiliares para buscarlas, nadie hace mención. Su extracción se hace clavando un palo en los sitios en que hay signos de su existencia y apalancando para remover el terreno.

EXPLICACIÓN DE LAS LÁMINAS

Lámina I.

1. *Tuber pallidum*, tres peridios enteros. (Escala = 1/2.)
2. — — uno entero y sección vertical de otro (1/2).
3. — — uno cortado y otro entero (1/2).
4. — — tres peridios enteros (1/2).
5. *Tuber lutescens*, tres peridios enteros (1/2).
6. — — otro entero (1/2).
7. — — tres enteros (1/2).
8. — — dos enteros y uno en sección vertical (1/2).
9. *Tuber sinuosum*, un peridio (1/2).
10. — — — (1/2).
11. — — — (1/2).
12. — — — (1/2).

Lámina II.

13. *Terfezia Hispanica*, dos peridios grandes redondeados (1/2).
14. — — un peridio apeonzado (var. *turbinata*) (1/2).
15. — — dos peridios pequeños (1/2).
16. — — un peridio con cuello basilar, otro irregular y otro bilobulado (1/2).
17. — — dos peridios con cuello basilar muy desarrollado (1/2).
18. — — sección transversal de un peridio (1/2).
19. — — peridio entero, grande y redondeado (1/2).
20. — — peridio grande apeonzado (var. *turbinata*) (1/2).
21. — — dos peridios gemelos (1/2).
22. — — sección vertical de dos peridios al iniciarse la formación del tejido esporífero (1/2).

Lámina III.

23. *Tuber pallidum*, peridio entero (1/2).
24. — — peridio entero (1/2).
25. — — sección vertical de un peridio (1/2).

26. *Tuber pallidum*, peridio entero (1/2).
27. — — peridio entero (1/2).
28. — — peridio cortado al través (1/2).
29. *Tuber lutescens*, peridio entero (1/2).
30. — — peridio entero (1/2).
31. — — sección transversal (1/2).
32. *Tuber sinuosum*, peridio entero (1/2).
33. — — peridio entero (1/2).
34. — — sección transversal (1/2).

Lámina IV.

35. *Terfezia Hispanica*, un peridio muy prolongado (1/2).
36. — — peridio irregular (1/2).
37. — — peridio cortado al través (1/2).
38, — — peridio apeonzado (var..*turbinata)* (1/2)
39. — — el anterior, cortado verticalmente (1/2).

XL.—Mareómetros y Mareógrafos de Sifón.

POR EDUARDO MIER Y MIURA.

26.—Mareógrafos de inscripción mecánica.

Acabamos de indicar (fig. 21) cómo pueden obtenerse las máximas y las mínimas ordenadas sobre un cilindro *H*, y claro es que el conjunto del mareómetro, con su flotante y polea, y del cilindro, constituyen un mareógrafo de máxima y mínima de inscripción mecánica.

Si en vez de mover ese cilindro diariamente á mano, le dotamos de un movimiento continuo de relojería, evidente es que obtendremos un mareógrafo en toda la acepción de la palabra, dándonos curvas mareográficas, que nos permitan conocer todas las variaciones que el nivel líquido experimenta y los instantes en que se han producido.

A la inscripción hecha por lápices ordinarios, ó por pun-

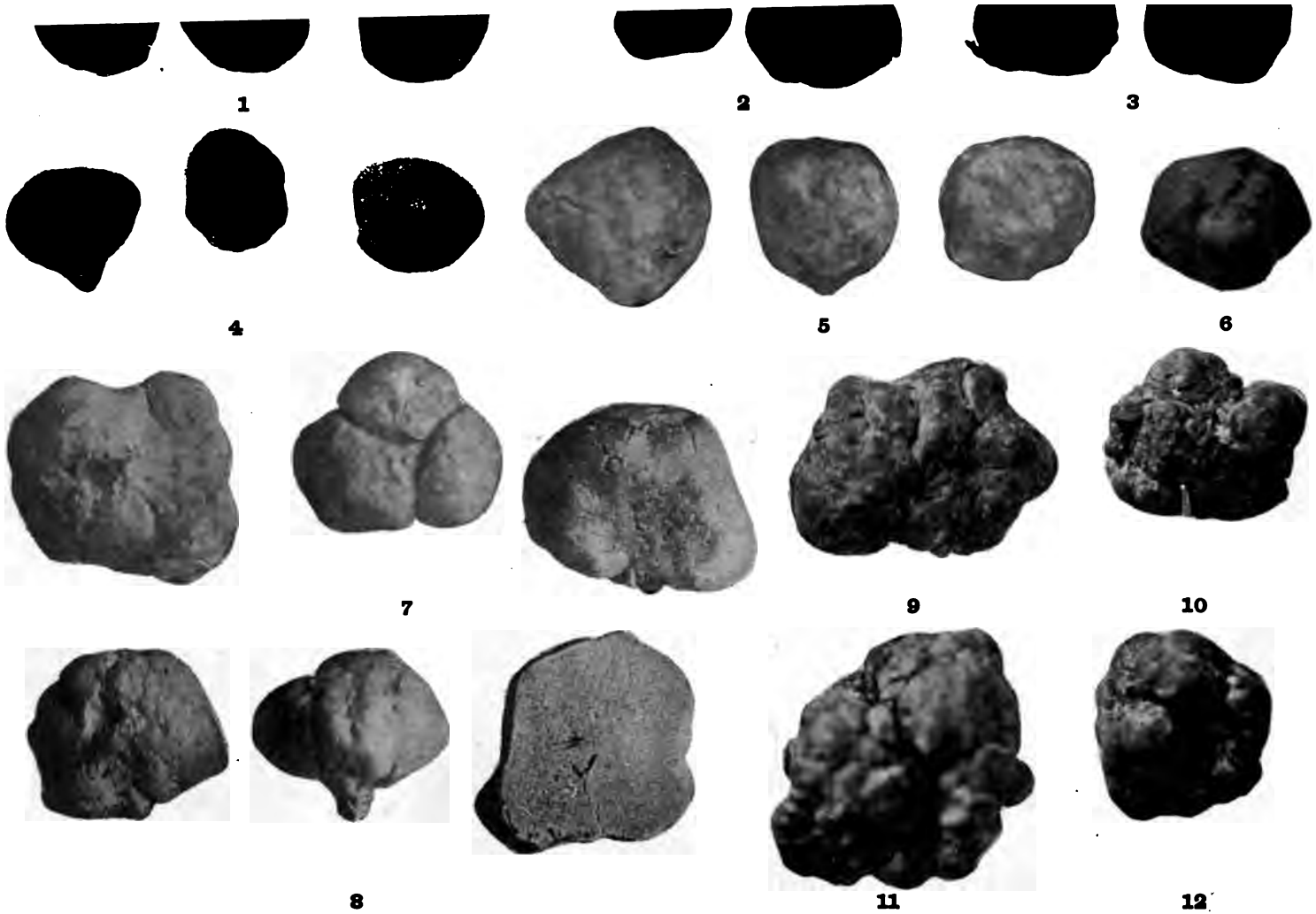


LÁMINA I.—1, 2, 3 y 4, *Tuber pallidum;* 5, 6, 7 y 8, *Tuber lutescens;* 9, 10, 11 y 12, *Tuber sinuosum.*

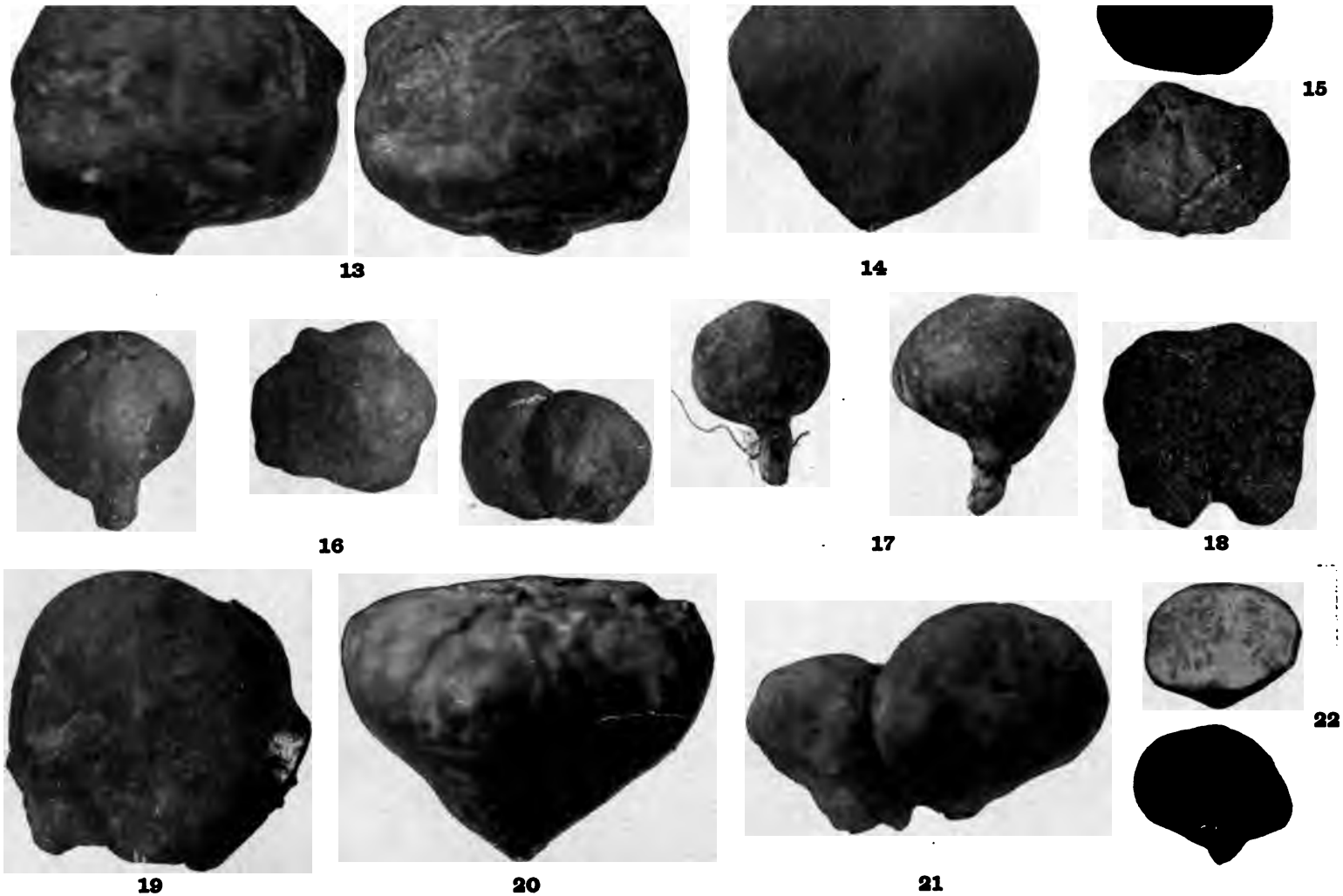


LÁMINA II.—13 á 17 y 19 á 21, *Terfezia Hispanica*, ejemplares enteros; 18 y 22, secciones de los mismos.

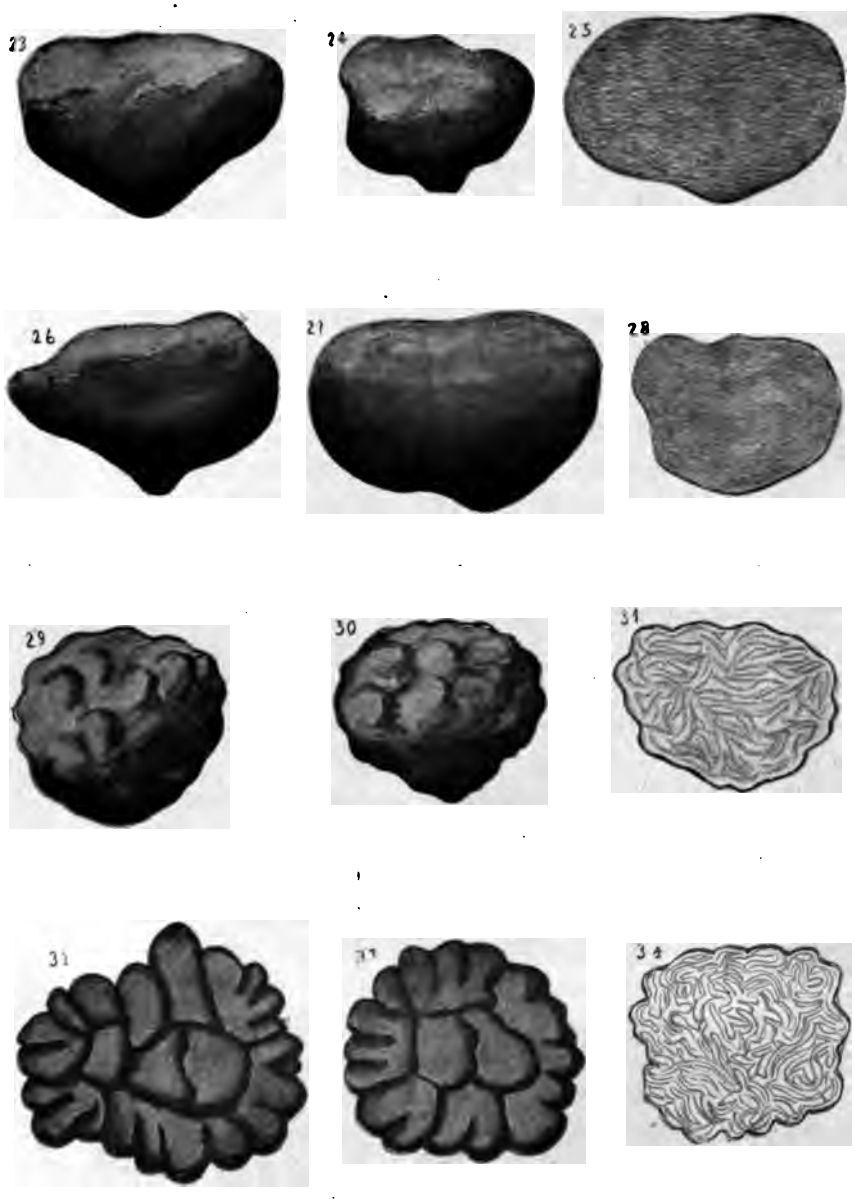


LÁMINA III.—Figuras 23, 24, 26 y 27, formas del *Tuber pallidum;* 25 y 28, secciones verticales del mismo; 29 y 30, formas del *Tuber lutescens;* 31, su sección; 32 y 33, formas del *Tuber sinuosum;* 34, sección del mismo.

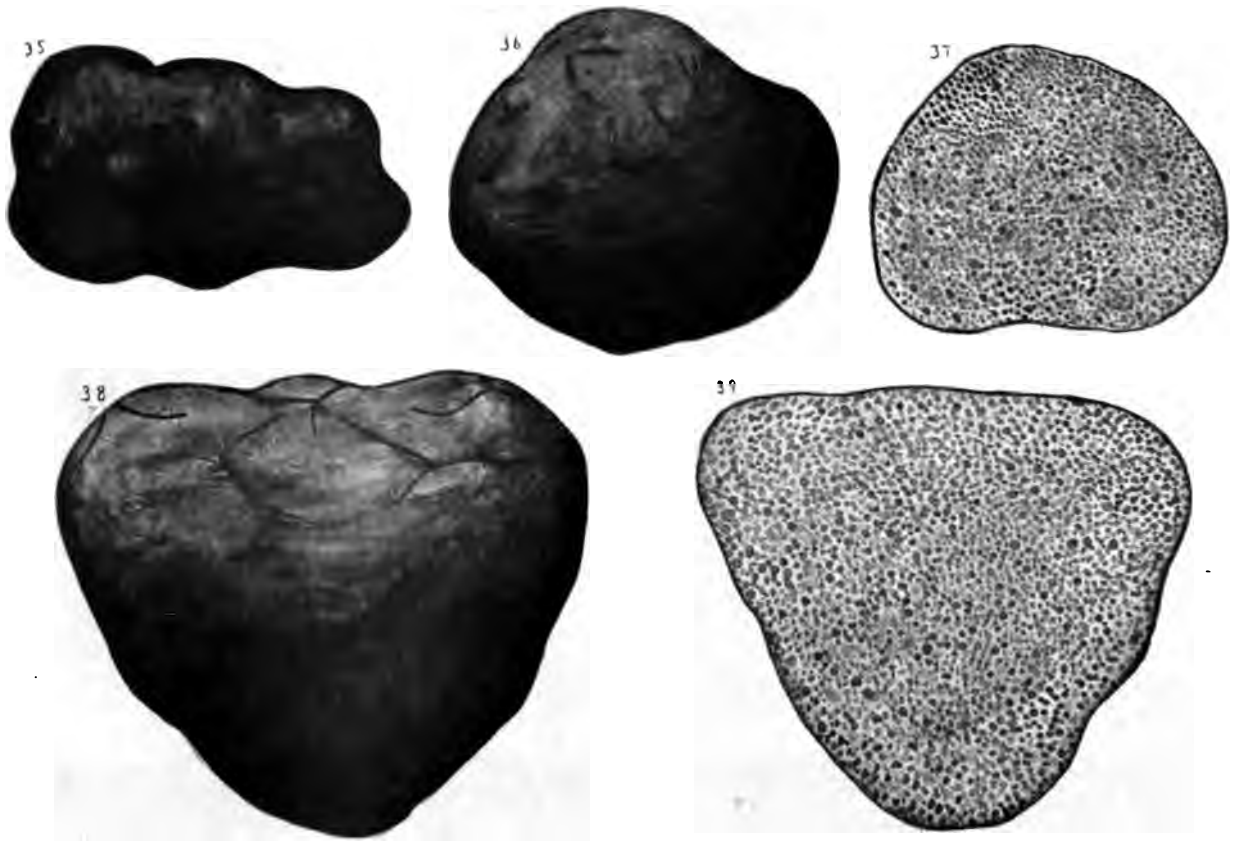


LÁMINA IV.—Figuras 35 y 36, formas típicas de la *Terfezia Hispanica;* 37, su sección vertical; 38, variedad *turbinata* de la misma especie; 39, sección de la misma.

zones que arañen superficies ennegrecidas, creemos preferible la obtenida por medio de las plumas con tinta del sistema Richard, que este habilísimo constructor emplea en la multitud de aparatos de precisión que fabrica.

Esa pluma resbalará entre dos guías, colocadas paralelamente á las generatrices del cilindro *HH*, y exige para moverse un esfuerzo casi nulo; así es que solamente deberá pesar el flotante unos cuantos gramos y los efectos de la inercia podrán despreciarse por completo.

De ese modo será posible obtener inscripciones mareográficas en la escala de $\frac{1}{14}$ ó $\frac{1}{15}$, que serán suficientes en la generalidad de los casos; pero si se necesitara menor reducción, podría recurrirse á poner el flotante en la rama libre de un mareómetro de tubo auxiliar, ó bien hacer que el flotante *B* actúe sobre una polea de pequeño diámetro y la pluma sobre otra de mayor radio, etc., etc.

Sin más detalles fácil es darse cuenta de las ventajas de tener á la vista el pozo *A* del mareógrafo y de poder usar mecanismos delicados que consienten grandes precisiones, imposibles de obtener con los pesados aparatos que los pozos ordinarios exigen en los mareógrafos al uso.

27. — Mareógrafos de inscripción fotográfica.

Hace años indicamos todas las ventajas que la determinación del nivel medio del mar podría obtener, á juicio nuestro, del empleo de la fotografía, arte precioso llamado á substituir al observador, en plazo no lejano, en todas las observaciones de alguna precisión: amplitud de las oscilaciones del péndulo, paso de éste por la vertical, paso de las estrellas por los hilos del retículo, etc., etc.; substitución de la que hablamos en más oportuno lugar al describir *El Gravígrafo*, por nosotros ideado; desde entonces la perfección creciente de los procedimientos fotográficos y la aplicación que van

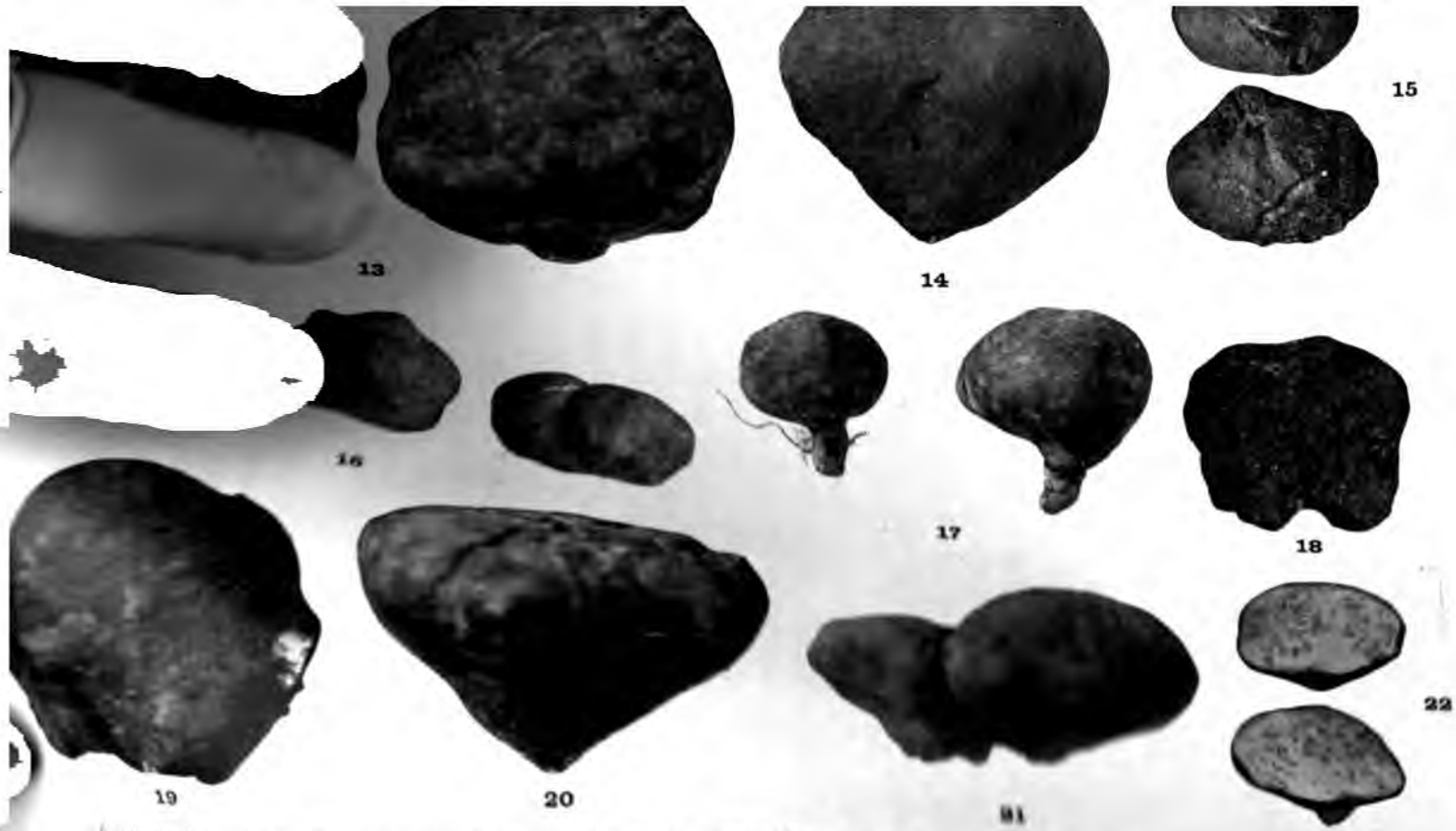


LÁMINA II. — 13 a 15 y 19 a 21, *Trefezia Hispanica*, ejemplares enteros; 18 y 22, secciones de los mismos.

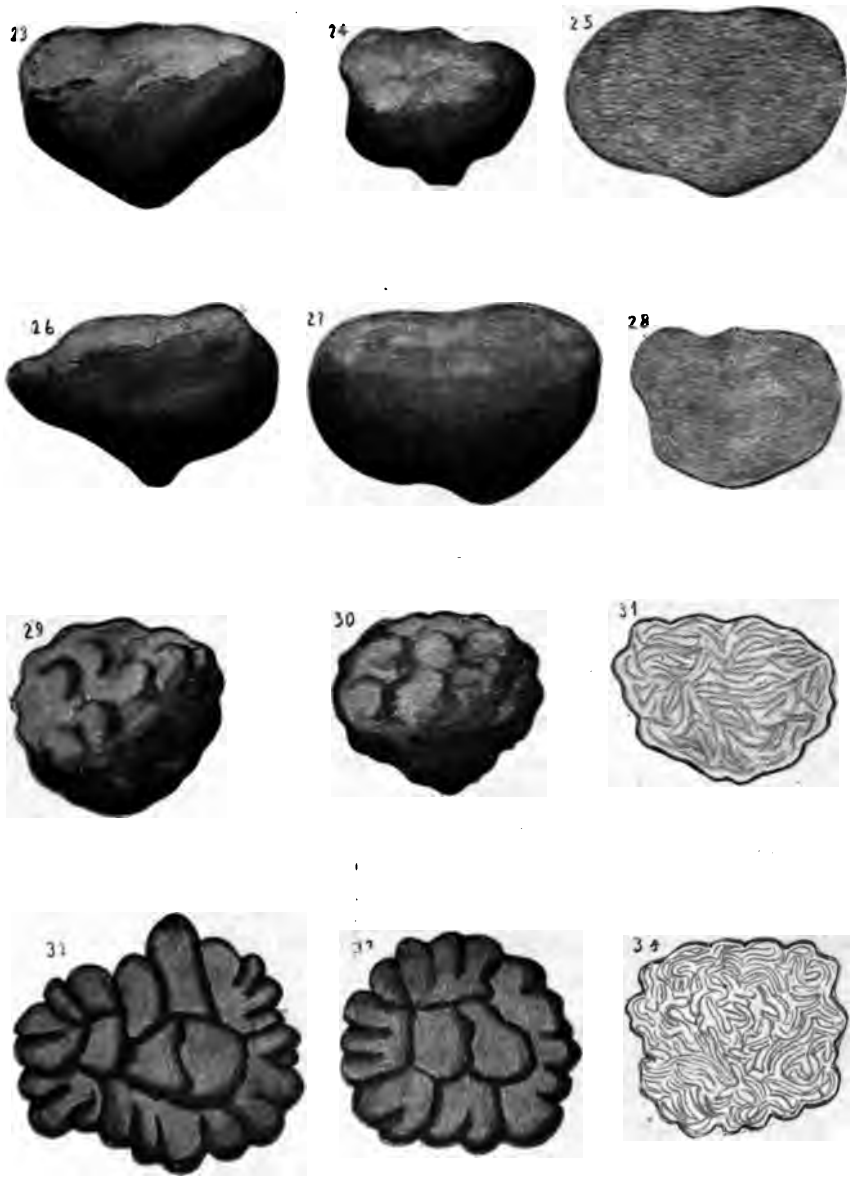


LÁMINA III.—Figuras 23, 24, 26 y 27, formas del *Tuber pallidum;* 25 y 28, secciones verticales del mismo; 29 y 30, formas del *Tuber lutescens;* 31, su sección; 32 y 33, formas del *Tuber sinuosum;* 34, sección del mismo.

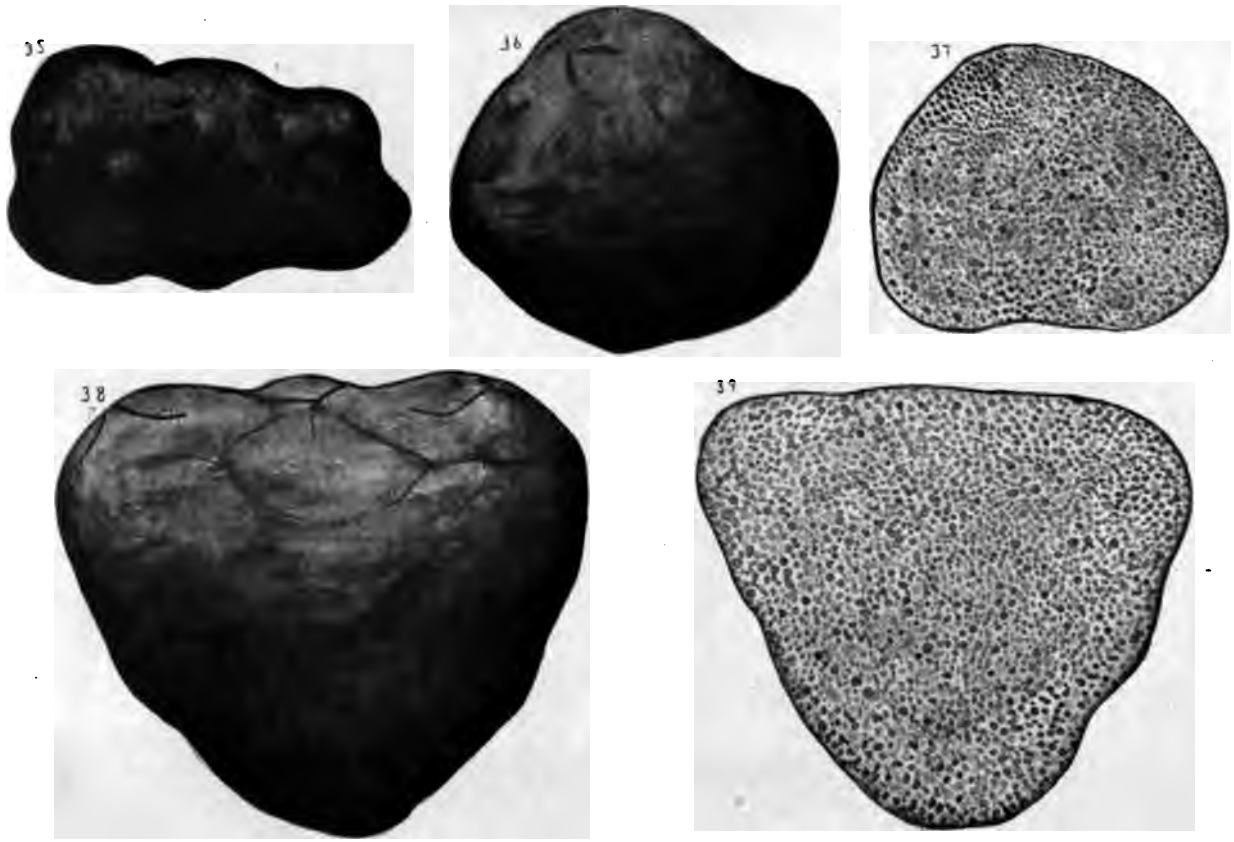


LÁMINA IV.—Figuras 35 y 36, formas típicas de la *Terfezia Hispanica;* 37, su sección vertical; 38, variedad *turbinata* de la misma especie; 39, sección de la misma.

$$\frac{\alpha l}{s} = \frac{\alpha' l'}{s'}$$

de donde:

$$l' = l \frac{\alpha}{\alpha'} \times \frac{s'}{s} \text{ ó } \frac{l'}{l} = \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{s'}{s} = \frac{\alpha}{\alpha'} \frac{r'^2}{r^2}$$

Teóricamente, la relación $\frac{l'}{l}$ puede variar desde 0 á ∞ y en la práctica es posible conseguir valores muy diversos para la escala.

Siendo el mismo líquido el empleado en ambas estaciones ó $\alpha = \alpha'$

$$\frac{l'}{l} = \frac{r'^2}{r^2}$$

y si $r' = \beta r$, siendo β un coeficiente auxiliar,

$$\frac{l'}{l} = \beta^2,$$

de modo que, con hacer el radio del tubo de la estación receptora 2, 3, 4... n veces mayor que el de la transmisora, la escala será 4, 9, 16... n^2 más grande.

Con que r valga 5 mm. y r' 3 cm,, magnitudes ambas que prácticamente pueden conseguirse, ya resulta la ampliación de 36 más que sobrada, y sin llegar á este número excesivamente grande, aun sin recurrir al uso de tubos anchos, de barro ó porcelana, que en la estación receptora pudieran usarse, y empleando sólo los corrientes tubos de cristal, fácil es ver que pueden obtenerse las escalas que se necesiten.

Por otra parte, las resistencias eléctricas de los liquidos desde la del agua destilada y las de los aceites, que prácticamente es infinita, hasta las del mercurio y de las disoluciones concentradas de ácidos, de bases y sales, varían en tales tér-

minos, que solamente con la elección juiciosa de líquidos distintos puede conseguírse que la relación $\frac{\alpha}{\alpha'}$, y la escala, por lo tanto, tome el valor que se desee, aun empleando tubos de iguales diámetros en ambas estaciones.

Casi inútil es añadir que ambos medios: empleo de líquidos distintos y de tubos de desigual diámetro, pueden combinarse haciendo que sus efectos se sumen, y que, cuando se tratara de obtener trazados de gran precisión, fácil es eliminar prácticamente la influencia de los cambios de temperatura en las resistencias eléctricas por el adecuado empleo de substancias que en ellas se empleen, para establecer las necesarias compensacienes.

Aparte de esta aplicación á los trazados mareográficos, que del aparato descrito hemos hecho, compréndese que, sin grandes modificaciones y aun sin variarle en nada, pudiera emplearse en aquellos problemas de electricidad que exigen igualar automáticamente las corrientes de dos circuitos ó conservar una relación dada y constante entre ellas; pero tales aplicaciones, muy importantes sin duda alguna, quedan fuera de los estudios á que el actual trabajo se refiere.

Pudiera éste alargarse, combinando nuevos tipos de mareómetros y mareógrafos, ya que á ello se presta la flexibilidad de los principios que utilizamos; pero ante el temor de cansar en exceso el ánimo del lector y ante la seguridad de que sobra con los tipos propuestos para atender á todas cuantas exigencias puedan tener los indicadores del nivel de los líquidos, damos por terminada esta parte meramente descriptiva.

XLI. — Estudio sobre la determinación volumétrica del óxido de carbono.

POR ENRIQUE HAUSER.

(Continuación.)

2.—Determinación volumétrica del óxido de carbono por combustión.

Comprende el presente estudio la determinación del óxido de carbono por combustión, ya sea el único gas combustible contenido en una mezcla (con nitrógeno, aire ú oxígeno), ya se encuentre en presencia de hidrógeno ó simultáneamente con este último se halle el metano, que es el caso más general. Si el óxido de carbono está solo ó en presencia del hidrógeno, su combustión puede hacerse empleando dos medios, á saber:

Combustión rápida (explosión en el eudiómetro).

Combustión lenta (grisúmetro, tubo Drehschmidt, amianto paladiado, óxido de cobre).

Si además de aquellos gases hubiese metano, son todavía aplicables los métodos de combustión rápida y los de combustión lenta; sólo que los últimos comprenden ahora dos clases, y son:

Combustión lenta total (grisúmetro, tubo Drehschmidt, óxido de cobre).

Combustión lenta parcial ó fraccionada (alambre de paladio, amianto paladiado, etc.).

No me propongo explicar todos los métodos conocidos, sino los más recomendables en cada caso, indicando el modo de operar que he empleado y los perfeccionamientos que introduje en algunos para adquirir confianza en obtener buenos resultados sucesivos.

La combustión del óxido de carbono, fenómeno en apariencia muy sencillo, necesita ser cuidadosamente estudiado, con el fin de saber el camino más conveniente en los análisis para obtener buenos resultados, que pueden lograrse, sin poner mucho de nuestra parte, teniendo presentes los fenómenos observados por otros experimentadores. El primer hecho fundamental, demostrado por Dixon, es que el óxido de carbono no arde en el aire perfectamente seco (*), y pretende explicarlo admitiendo que el óxido de carbono pasa á anhidrido carbónico mediante el vapor de agua, conforme á la siguiente ecuación:

$$CO + H_2O = CO_2 + H_2,$$

sirviendo el hidrógeno libre para formar nuevamente vapor de agua, que contribuye á la combustión de otra porción de óxido de carbono. Armstrong & Martin creen que el agua sólo sirve de sostén para la reacción

$$O + H_2O + CO = OH_2 + CO_2.$$

Traube atribuye el hecho á la formación de una pequeña cantidad de agua oxigenada, también sostén de la reacción, y se funda en haber observado la formación de una pequeña cantidad de aquel cuerpo, como consecuencia de la transformación del óxido de carbono en anhidrido carbónico por el paladio hidrogenado, el paladio ó el platino, en presencia del oxígeno y del vapor de agua.

Se explica el hecho, cuya importancia no sería grande, aplicándolo á determinar el óxido de carbono por el método

(*) Otra confirmación de este hecho está en que, para conseguir la combustión completa de un carbón compacto, débilmente hidrogenado, como el cok, en la bomba calorimétrica, es decir, con oxígeno á la presión de 25 atmósferas, es indispensable mezclarlo previamente con un hidrocarburo (naftalina ó parafina).

de combustión rápida, y la tiene considerable, si queremos emplear el de combustión lenta y especialmente la fraccionada, pues sólo después de hechas las consideraciones y deducciones que voy á exponer, he conseguido obtener la repetición segura de buenos resultados. Desde luego se comprende que, si queremos estudiar las fases sucesivas del óxido de carbono al transformarse en anhidrido carbónico, habremos de considerar la combustión más lenta posible, que es la efectuada á baja temperatura mediante los negros de platino y paladio, sirviendo de base las observaciones de los distintos experimentadores, que trataremos de completar.

En primer lugar conviene tener presente que, según Harbeck y Lunge (*), el paladio absorbe óxido de carbono, lo cual no impide que pueda ser quemado por el oxígeno del aire, pues conforme dice Haber (**), dicho gas se quema perfectamente por un *alambre* de paladio á la temperatura de ebullición del azufre (440°) en presencia del hidrógeno y del metano; además, si el metal se encuentra en forma de esponja, la temperatura de combustión debe ser menor, porque en el sentir de W. Henry (***), el hidrógeno y el óxido de carbono mezclados pueden quemarse con metano y nitrógeno haciéndoles pasar sobre esponja de *platino* calentada á 177° c.; Winkler emplea con igual fin amianto paladiado, supongo que á 200° c., á cuya temperatura afirma Hempel que empieza la combustión del metano.

Para E. von Meyer (****), el carbón platinado en mezclas de óxido de carbono, hidrógeno y oxígeno produce la combustión del óxido de carbono de preferencia á la del hidrógeno, y Hempel (*****) se explica de modo parecido; de

---

(*) *Dictionnaire de Chimie*, de Wurtz, 2me suplt.

(**) Treadwell, *Quantitative Analyse*, 1907, pág. 571.

(***) W. Hempel, *Methods of gas analysis*, trad. ing., pág. 178.

(****) Schutzenberger, *Traité de Chimie générale*, tomo II, página 472.

(*****) Loc. cit. pág. 184.

manera que si queremos deducir la forma de actuar el paladio respecto de los dos gases, deberemos estudiar su acción en ausencia del oxígeno, como se desprende de los trabajos de Jahn (*), quien encontró que haciendo pasar una mezcla de óxido de carbono é hidrógeno sobre paladio, se produce *aldehido fórmico* ($COH_2 = CO + H_2$), y como por otra parte, Baumann y Traube demostraron que el paladio *hidrogenado* en presencia del oxígeno y del vapor de agua transforma el óxido de carbono en anhidrido carbónico, deduciremos inmediatamente la siguiente conclusión:

El óxido de carbono sólo puede llegar á anhidrido carbónico pasando por los estados intermedios de aldehido fórmico y ácido fórmico, combinación exotérmica, para la cual es necesaria la intervención del vapor de agua ó simplemente del hidrógeno en atmósfera oxidante (**).

Esta conclusión, á la cual he llegado para el óxido de carbono, resulta de acuerdo con las del profesor Bone (de la Universidad de Manchester) tocante á la oxidación de los hidrocarburos, que sólo se realiza con formación intermedia de alcoholes y aldehidos (***).

No basta en las determinaciones analíticas que el óxido de carbono se oxide, es necesario que la oxidación sea completa, es decir, que pase á anhidrido carbónico, y sólo podremos conseguirlo á baja temperatura (inferior á la de combustión del metano), efectuando la transformación de los productos intermedios, aldehido y ácido fórmico, en anhidrido carbónico y vapor de agua.

Veamos en qué condiciones es posible descomponer ó que-

(*) *Dict. de Chimie*, de Wurtz, 2me suplt.

(**) Puedo recordar aquí que el anhidrido carbónico, al ser reducido por la acción de la clorófila de los vegetales, pasa primero al estado de aldehido fórmico. (*Traité de Chimie Minerale*, publié sous la direction de H. Moissan.)

(***) Prof. Smithells «Adress to the Chemical Section of the British Association por the Advancement of Science», 1907.

mar el ácido fórmico producido ($CO + H_2O = CO_2H_2$). Demuestra Schutzenberger (*), que el musgo de platino, calentado á 175°, transforma los vapores de ácido fórmico en anhidrido carbónico é hidrógeno, con arreglo á la siguiente ecuación:

$$CO_2H_2 = CO_2 + H_2.$$

Á la temperatura de 260° la alteración es muy rápida.

No he encontrado datos numéricos exactos respecto de la temperatura de reacción del negro de paladio; sin duda es inferior á la del platino, porque su acción sobre vapores de alcohol metílico (COH_4) y gas del alumbrado se utiliza para elevar la temperatura del platino hasta producir la inflamación de aquellos vapores en los conocidos encendedores de cigarros y mecheros; por lo demás, los citados experimentos de Braumann y Traube sobre la transformación, mediante el paladio hidrogenado, del óxido de carbono en anhídrido carbónico, la comprueban, y habríamos de limitarnos para ultimarlas al empleo del negro de paladio ó al amianto paladiado en caliente, si el negro de rodio no la realizase completa á la temperatura ordinaria (**). Esta propiedad del rodio la he utilizado en las combustiones fraccionadas, de la manera que luego indicaré, colocando el negro de dicho metal en los extremos del tubo que contiene el paladio, y transformando así en anhidrido carbónico é hidrógeno el ácido fórmico que haya podido generarse, quedando libre nueva porción de aquél, que facilita la combustión de otra cantidad de CO hasta que el mismo acaba por quemarse.

Vemos así que en la mezcla de óxido de carbono é hidrógeno se realiza una combustión combinada ó simultánea de ambos gases, á causa de formarse un compuesto intermedio

---

(*) *Traité de Chimie générale*, tomo II, pág. 508.

(**) Schutzenberger.— *Traité de Chimie générale*, tomo II, pág. 508, y tomo I, pág. 723.

de combustión imperfecta, quedando luego libre el hidrógeno al generarse el anhidrido carbónico en la descomposición de aquel cuerpo, y por esto aparece retrasada la combustión del hidrógeno respecto de la del óxido de carbono, conforme á las observaciones de E. von Meyer, antes citadas.

Dicho esto, ya es fácil deducir las precauciones generales que deben observarse en los análisis del óxido de carbono para obtener buenos resultados, partiendo de los hechos que dejo consignados, á saber:

1.° *Que la presencia del hidrógeno facilita mucho la combustión del óxido de carbono.*

2.° *Que es fácil descomponer los cuerpos procedentes de una combustión imperfecta del óxido de carbono empleando el negro de rodio.*

Veamos ahora la manera de aplicar estos resultados á los distintos métodos de análisis conocidos.

a) *Método de combustión rápida.*

La combustión rápida del óxido de carbono (en el eudiómetro) no presenta dificultades, según los autores, debido sin duda á que generalmente dicho gas se halla imperfectamente seco ó acompañado de cierta cantidad de hidrógeno, cuando no se añade en forma de mezcla detonante ($H_2 + O$) destinada á efectuar la explosión. Para obtener buenos resultados seguros es necesario explicar la influencia de las distintas causas enumeradas.

Conviene recordar que, si una pequeña cantidad de vapor de agua es suficiente para producir la combustión del óxido de carbono, la cantidad de hidrógeno más conveniente debe ser, si mis conclusiones resultan ciertas, la que permita su transformación íntegra en ácido fórmico, es decir, un volumen igual al suyo; pero hay otra consideración que nos conduce á la oportunidad de añadir hidrógeno, y es su límite inferior de inflamabilidad. Aunque la cantidad de oxígeno necesaria para la combustión del óxido de carbono es igual que para el hidrógeno y su calor de combustión, en igualdad

de volumen, próximamente el mismo que el de este gas, tal vez por ser la temperatura de inflamación del CO unos 100° más elevada que la del hidrógeno, resulta su límite inferior de inflamabilidad (hacia arriba), según Clowes, de 13 por 100, mientras el del hidrógeno es de 5 por 100 conforme al mismo autor; de manera que una mezcla de dichos gases resulta con un límite intermedio, y una muestra de gas de agua conteniendo 49,6 por 100 de H, para 40,8 por 100 de CO, dió á Clowes el límite de 9 por 100. Este hecho justifica la conveniencia de añadir hidrógeno que facilita la combustión de la mezcla.

La manera de operar que adopto es la siguiente: á la muestra que se analiza se añade, si no lo contiene ya, un volumen de oxígeno (*), próximamente igual y exactamente medido, al volumen presunto existente de ambos gases, y triple del de metano, si lo hubiere, y se agrega un volumen de mezcla detonante ($H_2 + O$) tal, que el de la mezcla explosiva referida á ($H_2 + O$) (**) quede comprendido entre 20 y 33 por 100 del total, porque conforme á los experimentos de Bunsen, con la mezcla ($H_2 + O$) inferior á dicho límite, la combustión es incompleta y pasando del mismo se produce la combustión parcial del nitrógeno.

b) *Combustión lenta total.*—Este método ha de preferirse cuando las mezclas son de baja ley, inferiores á 5 por 100, y aparte la necesidad de evitar las mezclas explosivas, debe tenerse presente que los mejores resultados del método se obtienen empleando exceso de aire ó mejor de oxígeno. De todos modos, observaremos que lo mismo en éste como en el anterior procedimiento, si se quieren obtener buenos resultados quemando una mezcla de tres gases (CO, H y CH_4),

---

(*) Exento de ácido carbónico ó hidrógeno que suele contener el del comercio.

(**) Un volumen de mezcla ($CH_4 + 2O_2$) equivale á 2,56 ($H_2 + O$) para este efecto.

las ecuaciones de Bunsen requieren el conocimiento del oxígeno consumido ó el del volumen de los tres gases, y á causa de los espacios perjudiciales que presentan la mayoría de los grisúmetros del comercio, resulta más exacto conocer el volumen total de los tres gases (siempre que sea posible), sin perjuicio de hacer las correcciones necesarias para calcular el anhidrido carbónico contenido en los espacios perjudiciales (si no se mide directamente en dos absorciones).

Es precaución muy importante que adoptar en estas combustiones grisumétricas, derivada el que en una mezcla gaseosa conteniendo hidrógeno, éste pasa más de prisa que los otros gases por los tubos capilares; de modo que, analizando sólo una porción de ella (aunque se trasvase varias veces en ambos sentidos), nunca ésta representa la composición centesimal de la masa primitiva, por lo cual considero indispensable emplear un grisúmetro de cabida suficiente para contener toda la mezcla, si no se prefiere quemarla en varias veces, y entonces resulta mejor seguramente usar el tubo Drehschmidt.

c) *Combustión lenta fraccionada.*—Este método no tiene prácticamente objeto, tratándose sólo de mezclas de óxido de carbono é hidrógeno, que en tal caso resulta más expedito el empleo del grisúmetro; pero habiendo metano, puede evitar cálculos y siempre permite comprobarlos. Su fundamento está en intervenir el amianto paladiado; para lograr buen éxito, es necesario no emplear gran exceso de oxígeno, superior al que representa la composición del aire, pues entonces se produce la combustión parcial del metano, que es lo que se trata de evitar, y tampoco conviene que la proporción de oxígeno sea mucho menor, con el objeto de no retardar el término de la combustión. Ahora bien, como la brevedad de la operación depende en gran parte de la temperatura á que se efectúa, conviene operar á la más elevada posible, y habiendo comprobado que á 180° c. no se quema el metano, opero á esta temperatura inicial, en baño de para-

fina, que queda entre 135 y 140°, luego de haber pasado la mezcla tres veces por el tubo con paladio.

Queda dicho cómo me aseguro de la transformación íntegra del óxido de carbono en anhidrido carbónico empleando el negro de rodio, á cuyo fin preparo amianto rodiado adoptando el mismo procedimiento que Winkler indica para obtener el amianto paladiado utilizado en los métodos de combustión fraccionada. Efectuándose las acciones del negro de rodio á la temperatura ordinaria, como su caldeo pudiera producir la combustión de parte del metano, los extremos del tubo que contiene los metales quedan fuera del baño de parafina. He aquí como dispongo el sistema paladio-rodio: empleo un tubo de vidrio de unos 3 milímetros de diámetro interior, y 20 ó 25 centímetros de longitud encorvado en *U*; en la parte inferior y ocupando un cuarto de su longitud total pongo el amianto paladiado, que debe ser de color gris obscuro; en cada uno de sus extremos se adapta un taponcito de amianto blanco sin metalizar, de un centímetro de longitud, con objeto de separarlo del amianto rodiado que ocupa los extremos del tubo en una longitud próximamente de $\frac{1}{3}$ del total, sin llenarlo, dejando espacios para cerrarlo con otros tapones flojos de amianto sin metalizar, destinados á retener la humedad; el tubo así dispuesto se introduce en el baño de parafina sólo hasta el nivel de los tapones de amianto que separan el paladio del rodio (*).

Ya he indicado que, para obtener con seguridad la combustión completa del óxido de carbono, es necesaria la presencia del hidrógeno, porque si bien en alguna ocasión la he logrado *casi completa* del óxido solo, fué debido, sin duda, á la existencia de hidrógeno ocluído, ó de humedad en

---

(*) Es fácil comprobar la eficacia del amianto rodiado haciendo que lo atraviese aire cargado de vapores de ácido fórmico que á la salida enturbia el agua de cal.

el amianto paladiado; no pude repetir la operación con aquel tubo, y ensayado otro nuevo con buen negro de paladio, tuve que añadir hidrógeno para llegar á quemar el óxido de carbono. Aunque queriendo conseguir de una vez la combustión del óxido de carbono se necesita su volumen de hidrógeno, quedando libre este gas, al transformarse el ácido fórmico en anhidrido carbónico, su cantidad necesaria resulta bastante menor, y se alcanzan buenos resultados con un volumen de hidrógeno, mitad del de óxido de carbono. Si para comprobar ó efectuar una combustión se añade hidrógeno, deberá tenerse muy presente su gran rapidez de difusión, que dificulta la exacta medida, y así, prefiero en muchos casos añadir el volumen equivalente de mezcla detonante ($H_2 + O$); operando en lo demás del modo explicado en Nota anterior (*Determinación del hidrógeno en el grisú, por el método de Hempel*). Aquí, como en el método referido, es necesario conocer el volumen del espacio perjudicial del tubo de paladio-rodio y conexiones, porque después de la combustión queda lleno de anhidrido carbónico, que no entra en el tubo de potasa, y de metano que no irá á quemarse en el grisúmetro; es verdad que podemos corregir tal error mezclando con este residuo el gas que ha pasado ya por la potasa, y pasándolo nuevamente, y entonces el error final resulta despreciable, é igual maniobra podríamos ejecutar con el metano, haciendo dos combustiones; semejante método operatorio duplicaría la operación y aumentaría mucho las diferencias de temperatura para las correcciones, y considero más sencillo conocer su medida de una vez para todas.

Cabría medir el volumen del tubo, adoptando cualquiera de los dos sistemas indicados en la Nota referida sobre la «determinación del hidrógeno en el grisú»; sin embargo, considero más sencillo y rápido el siguiente procedimiento fundado en deducirlo, con relación al de la bureta, por el del volumen de un gas fácilmente absorbible (por ejemplo, CO_2) que resta con aquél, después de haber medido el que

contenía la bureta. Veamos cómo se procede: se introduce en ésta una mezcla de aire y anhidrido carbónico al 4 ó 5 por 100 (*), uniéndolo perfectamente con el aire del tubo de paladio-rodio, para que resulte uniforme; se mide el volumen del contenido en la bureta que llamaremos V y el del anhidrido carbónico correspondiente, A, absorbiéndolo con la potasa, lo cual, realizado, se mezcla el gas restante en la bureta, cuyo volumen es V', con el contenido en el tubo de volumen buscado V'', y que diluído en V', dará una cantidad de anhidrido carbónico, por una nueva medida, que llamaremos A'. Es evidente que la relación $\frac{A'}{A}$ será próximamente igual á la de $\frac{V''}{V}$, de donde $V'' = V\frac{A'}{A}$; sin embargo, podremos obtener un valor casi exacto de V'', si tenemos en cuenta que la relación del volumen de anhidrido carbónico que resta en el tubo, después de la segunda absorción y que desconocemos, es la misma respecto del medido en el volumen V', que la encontrada en éste con relación á la medida en el volumen V (**), ó sea llamando A'' al volumen de CO_2 que queda en el volumen V'' después de la segunda absorción

$$\frac{A''}{A'} = \frac{A'}{A},$$

de donde

$$A'' = \frac{A^2}{A},$$

y como muy próximamente

$$\frac{V''}{V} = \frac{A' + A''}{A}$$

(*) Para esto sirve muy bien el aire espirado de los pulmones que contiene alrededor de 4 por 100 de anhidrido carbónico.

(**) Por diferir muy poco entre sí V y V'.

substituyendo tendremos:

$$\frac{V''}{V} = \frac{A'}{A} + \left(\frac{A'}{A}\right)^2, \text{ ó } V'' = \left[\frac{A'}{A} + \left(\frac{A'}{A}\right)^2\right] \ldots (a)$$

Podemos también calcular dicho volumen con exactitud por las siguientes consideraciones. Si conservamos las mismas notaciones y designamos ahora por A'_n el volumen de anhidrido carbónico que queda en el volumen V'', mientras existe A en el volumen V, tendremos

$$\frac{V}{V''} = \frac{A}{A'_n},$$

y como por otra parte $A'_n = A' + \frac{V''}{V'} A'$, substituyendo este valor en la primera, resultará

$$\frac{V}{V''} = \frac{V' A'}{A' V' + A' V''}$$

de donde

$$A V' V'' = A' V V' + A' V V''$$

ó

$$V'' (A V' - A' V) = A' V V',$$

y finalmente

$$V'' = \frac{A' V V'}{A V' - A' V} = \frac{V}{\frac{A}{A'} - \frac{V}{V'}} = \frac{V'}{\frac{A}{A'} \cdot \frac{V'}{V} - 1} \ldots (b)$$

Como ejemplo de aplicación de estas fórmulas voy á exponer el cálculo del volumen del tubo y conexiones que ha utilizado (*).

(*) Todos los volúmenes están reducidos á la temperatura inicial; la presión se supone no haber variado durante la operación.

Volumen de gas (de igual composición que el del tubo de paladio-rodio y conexiones)	$V = 49\ 85$
Volumen de gas después de absorbido el CO_2	$V' = 47.75$
Anhidrido carbónico medido.....	$A = 2.10$
Mezclado el gas restante libre de anhidrido carbónico con el del tubo y conexiones, se hizo una nueva lectura que dió..... ..	$V' = 47.72$
Absorbido el anhidrido carbónico contenido en V' medimos.....	47.57
de donde.....	$A' = 0.15$

Aplicando las fórmulas anteriormente deducidas, obtendremos por la (*a*)

$$V'' = 49.85\left[\frac{0,15}{2,10} + \left(\frac{0,15}{2,10}\right)^2\right] = 49.85(0,0715 + 0,0715)^2$$

$$= 49.85\ (0,0715 + 0,0051) = 49.85 \times 0,77 = 3.84,$$

y por la (*b*)

$$V'' = \frac{47.75}{\frac{2.1}{0,15} \cdot \frac{47.75}{49.85} - 1} = \frac{47.75}{14 \times 0,958 - 1} =$$

$$= \frac{47.75}{13,4 - 1} = \frac{47.75}{12,4} = 3^{cc},85$$

cuyo valor relativo $\frac{3.85}{49.85} = 7.75$ por 100 no es de despreciar.

No debemos olvidar lo que he dicho antes respecto de la importancia de tener en cuenta, para análisis exactos de mezclas ricas, el volumen del espacio perjudicial que existe en los grisúmetros con cámara de combustión distinta de la bureta medidora, como ocurre en el renombrado de Schondorff, y el error inherente al mismo se evita, para la medida de la contracción, repitiendo la combustión de la mezcla, si no queremos calcularlo (llega al 2 ó 3 por 100). Igual consideración,

aunque de menor importancia, hay que tener presente en el propio aparato respecto del espacio perjudicial correspondiente al intervalo entre la pipeta de anhidrido carbónico y la de combustión, si aquélla se halla entre ésta y la bureta medidora.

He estudiado este método de análisis empleando mezclas artificialmente preparadas de los tres gases, dedicando principalmente mi atención á comprobar el valor del óxido de carbono (por el volumen de anhidrido carbónico correspondiente), deduciendo después la cantidad de metano que quedaba en el residuo, por su combustión en el grisúmetro; también he comprobado que una mezcla de aire y metano no experimenta contracción (es decir, no se quema metano), haciéndola pasar en iguales condiciones por el tubo de paladio-rodio. La principal dificultad ha consistido en medir exactamente la cantidad de hidrógeno, pues si la mezcla se prepara en un recipiente independiente de la bureta medidora, no pasa á ella todo el volumen de la mezcla, á causa de la gran diferencia de velocidad, en los capilares, entre el hidrógeno y los demás gases, resultando la ley de la porción medida distinta de la total. Por esta razón el hidrógeno lo añadí á la mezcla de los demás gases contenidos ya en la bureta medidora, *midiendo su volumen después de mezclarlo* en la pipeta con potasa, para evitar su difusión por el capilar del manómetro de agua, que lo haría escaparse de la combustión; pero en esta medida hay que tener en cuenta el volumen de hidrógeno que queda en el orificio de la llave ($0^{cc},10$) al trasvasar dicho gas á la bureta y que luego toma parte en la combustión.

Por falta de tiempo, y el esperar retrasaría algunos meses la publicación del presente trabajo, no puedo presentar varios resultados de análisis completos, debiendo limitarme al último, por la confianza que me inspira, no sólo atendiendo á los resultados obtenidos, sino por su concordancia con otros anteriormente obtenidos empleando mezclas diferentes,

en las que, por no serme conocida, como he dicho, la cantidad de hidrógeno, el análisis resultaba incompleto, aunque no inexacto.

El gas artificial se prepara del siguiente modo:

La primera mezcla se efectuó en una bureta Le Chatelier, añadiendo á 1^{cc} de metano al 87,7 por 100 (límite 6,9), 99^{cc} de aire con óxido de carbono al 1,68 por 100, y anhidrido carbónico al 0,20 por 100, que resultaba de la siguiente composición:

CH^4 (1 × 0,877)	0,877
CO (1,68 × 0,99)	1,663
CO_2	0,200
Aire	97,260
	100,000

Absorbido el anhidrido carbónico por la potasa en el mismo grisúmetro, la composición del gas resultante es la siguiente:

CH_4	0,879
CO	1,666
Aire	97,455
	100,000

Quedaron para el análisis $46^{cc},95$, que contenían:

CH_4	$0^{cc},413$
CO	0 ,783

Se añadió hidrógeno, y mezclados los gases sobre la potasa y hecha la reducción de volumen á la temperatura inicial, dió un volumen de 47,95

al cual hay que añadir el del canal de la llave..... 1,00
que ahora substituye á otro igual de aire..... 0,10

Con lo cual el volumen de hidrógeno será 1^{cc}, 10.

Pasada la mezcla tres veces por el tubo de paladio-rodio, hasta un volumen de..... 45,92

que da para la contracción..... 2,03

Hecha la absorción de CO_2 en la potasa, queda un volumen de..... 45,17

Diferencia..... $0^{cc},75$

A este volumen de CO_2 hay que añadir el que había quedado en el tubo de *Pd — Rh*, cuyo volumen ($3^{cc},85$) es

$$\frac{3,85}{45,92} = 0,84,$$

del de la bureta; de manera que la cantidad de CO_2 que hay que añadir, será $0,75 \times 0,084$..... = 0,063

CO_2, correspondiente á CO..... 0,813

Este valor del anhidrido carbónico, deducido por el cálculo, fué comprobado por su absorción, que dió $0^{cc},07$ en vez de $0^{cc},063$, que está dentro de los errores de lectura.

Valor dél hidrógeno $^2/_3\,(2,03 - \frac{0,813}{2} =$

$$^2/_3\,(2,03 - 0,407) = {}^2/_3 \times 1,623 = 1,082).$$

El volumen del gas queda reducido á $45^{cc},10$, pero habiendo subido la temperatura de 12°,50 á 15°,25, es decir, 2°,75, y no pudiendo alcanzar completa exactitud con el manómetro de agua, sino para diferencias inferiores á 2°,50, reduzco los volúmenes á la presión exterior empezando á medir nuevas diferencias de temperatura, pero teniendo en cuenta la reducción de volúmenes.

El volumen del gas es ahora 45,75, de manera que el coeficiente de reducción de volúmenes será:

$$\frac{45,10}{45,75} = 0,986.$$

Realizada la combustión del metano se encuentra $\frac{44,97}{0,79}$.

Absorbido el CO_2 se obtiene..... $\frac{44,58}{0,39}$.

Teniendo en cuenta el volumen del espacio perjudicial del tubo $Pd-Rh\,\frac{3,85}{45,75} = 0,0842$, el volumen de la contracción correspondiente al total de metano será

$$0,78 + 0,0656 = 0,846,$$

que reducido á la temperatera inicial es

$$0,846 \times 0,986 = 0^{cc},835,$$

que da para el metano un volumen mitad de $0^{cc},418$.

Deducido el volumen de metano por el del anhidrido carbónico encontrado, el valor sería algo mayor, pues si añadimos el volumen del espacio perjudicial que queda entre la cámara de combustión del grisúmetro y la bureta de

$$CO_2 = 0,014 = 1,4 \text{ por } 100,$$

el volumen resulta 0,3954 en vez de 0,39, pero esta diferencia cae dentro de los errores de lectura y operación, y como la contracción es una medida doble mayor, debemos preferirla.

En resumen, tenemos para los resultados obtenidos:

	Mezclado.	Medido.	Diferencia
Oxido de carbono.....	$0^{cc},783$	$0^{cc},813$	$+\ 0^{cc},030$
Hidrógeno.....	1 ,100	1 ,082	− 0 ,018
Metano.....	0 ,413	0 ,418	+ 0 ,005

Vemos, por lo tanto, que este método es suficientemente exacto tratándose del reconocimiento de pequeñas cantidades de los referidos gases, siendo debidos los errores más al modo de operar que á los fundamentos del mismo. Lo considero de mucha utilidad para valuar pequeñas cantidades de metano en el residuo de una explosión de este gas, y el procedimiento tiene la ventaja sobre el de las tres ecuaciones de Bunsen de no exponernos á hallar valores negativos para el volumen de aquel gas.

Laboratorio de la Escuela de Minas.

XLII. — Los sulfatos de calcio y de plomo en el ácido tartárico comercial.

POR RUPERTO LOBO GÓMEZ.

Una de las substancias halladas al analizar casi todos los ácidos tartáricos industriales es el sulfato de plomo, y en calidad de inseparable compañero suyo se encuentra también el sulfato de calcio.

No es de extrañar la presencia de estos dos cuerpos en aquellos productos, si no se tiene grandísimo cuidado en su fabricación. El sulfato de calcio proviene del tartrato cálcico empleado como primera materia, y en la generalidad de los casos se encuentra abundante, y el sulfato de plomo depende, en su mayor parte, y hasta me atrevería á asegurar que en su totalidad, del ácido sulfúrico, agregado para descomponer el tartrato cálcico.

Necesitando en muchísimos casos determinar cuantitativamente el plomo en los jugos correspondientes á las diversas fases de fabricación del ácido tartárico, desde luego llamó mi atención el hecho de que, á medida que la cantidad de sulfato de plomo era mayor, también aumentaba la de

sulfato de calcio, y esto me hizo suponer que, en líquidos tan complejos, acaso podría existir cierta relación entre las solubilidades de los dos sulfatos.

El ácido sulfúrico industrial empleado es de 60° Baumé, y practicado su análisis en diversas ocasiones, respecto del sulfato de plomo, los resultados fueron:

	Sulfato de plomo °/o — *Gramos.*
1	0,0360
2	0,0450
3	0,0280
4	0,0358
5	0,0325
6	0,0296
7	0,0453
8	0,0357
9	0,0260
10	0,0286

Diluyendo este ácido sulfúrico en los líquidos procedentes del lavado de residuos de fabricación, gran parte del sulfato de plomo se precipita; pero queda otra parte disuelta. Con diluciones hasta 30° Baumé, según es costumbre adicionarlo al tartrato cálcico para descomponerlo, en su ensayo obtuve los resultados siguientes:

Acido sulfúrico diluido á 30° Baumé.

	Sulfato de plomo °/o d'suelto. — *Gramos.*
1	0,0085
2	0,0164
3	0,0063
4	0,0080
5	0,0077
6	0,0060
7	0,0075
8	0,0145
9	0,0093
10	0,0056

Efectuada la descomposición del tartrato cálcico por el ácido sulfúrico así diluido, se obtiene lo que en la industria se llama líquido fuerte (jugo), cuya concentración suele corresponder á 15° Baumé, y hecho el análisis de este jugo respecto de los dos sulfatos, resultó:

	Sulfato cálcico por 100 c. c. — *Gramos.*	Sulfato de plomo por 100 c. c. — *Gramos.*
1	0,4910	0,0038
2	0,4191	0,0032
3	0,3960	0,0030
4	0,4734	0,0036
5	0,3005	0,0022
6	0,4088	0,0030
7	0,4183	0,0032
8	0,3828	0,0029
9	0,3287	0,0025
10	0,3294	0,0026

Concentrando el líquido hasta 30° Baumé, se consiguen los llamados jugos semi-concentrados, y de su análisis, tomando la muestra en el momento de vaciar, se obtuvo:

	Sulfato de calcio en 100 c. c. — *Gramos.*	Sulfato de plomo de 100 c. c. — *Gramos.*
1	1,3567	0,0103
2	1,3470	0,0104
3	1,8593	0,0141
4	2,0456	0,0157
5	1,3845	0,0102
6	1,5326	0,0101
7	2,1462	0,0174
8	1,8435	0,0187
9	2,0046	0,0169
10	1,8543	0,0156

Dejando reposar este jugo unas veinticuatro horas, se depositan en parte ambos sulfatos, quedando cierta cantidad de ellos disuelta. Los análisis del depósito dieron:

	Sulfato cálcico de 100 c. c. — Gramos.	Sulfato de plomo de 100 c. c. — Gramos.
1	0,0635	0,0005
2	0,0653	0,0007
3	0,0565	0,0006
4	0,0645	0,0005
5	0,0614	0,0004
6	0,0553	0,0002
7	0,0632	0,0009
8	0,0536	0,0005
9	0,0625	0,0006
10	0,0668	0,0003

Y respecto de los sulfatos disueltos:

	Sulfato cálcico por 100 c. c. — Gramos.	Sulfato de plomo por 100 c. c. — Gramos.
1	1,2930	0.0098
2	1,2817	0,0097
3	1,8028	0,0135
4	1,9811	0,0152
5	1,3231	0,0098
6	1,4773	0,0099
7	2,0830	0,0165
8	1,7899	0,0132
9	1,9421	0,0163
10	1,7875	0,0153

Comparando las proporciones de los dos sulfatos disueltos, tanto en el jugo fuerte como en el semiconcentrado y recordando sus respectivos pesos moleculares, he podido encontrar la fórmula que indica la relación en que se encuentran disueltos en ambos líquidos:

Peso molecular del $SO_4\,Ca\,.\,2H_2O = 172$.

Peso molecular del $SO_4\,Pb = 303$.

Diferencia $\mathbf{D} = 131$.

Resulta que la cantidad del sulfato de plomo disuelto es

igual a la cantidad de sulfato de calcio, dividida por la diferencia de los pesos moleculares de los dos sulfatos. Ley límite.

$$\mathbf{P}SO_4Pb\ \frac{\mathbf{P}SO_4Ca.2H_2O}{\mathbf{D}}.$$

Obtenido el jugo semiconcentrado y dejado en reposo para que se precipite parte de los sulfatos, se procede á la concentración del jugo que debe cristalizar, y del resultado de muchos experimentos he podido deducir que el grado más conveniente para una buena cristalización es 40° Baumé.

Reposando los líquidos en los cristalizadores durante unos quince días (término medio), se procede á sacar la parte cristalizada, separando previamente el agua madre.

De la masa, valiéndose de pequeños golpes de martillo, se obtienen los cristales, clasificándolos en cuatro clases, conforme á su tamaño, y son: ácido cristalizado, granulado 1, granulado 2 y granulado 3.

El análisis de cada una de estas suertes de cristales dió los siguientes resultados:

Acido cristalizado.

	Sulfato cálcico en 100 grs.	Sulfato de plomo en 100 gramos.
1	0,0015	0,0033
2	0,0018	0,0049
3	0,0016	0,0037
4	0,0020	0,0045
5	0,0016	0,0036
6	0,0025	0,0057
7	0,0030	0,0065
8	0,0029	0,0062
9	0,0032	0,0074
10	0,0019	0,0041

Granulado 1.

	Sulfato de calcio en 100 gramos.	Sulfato de plomo en 100 gramos.
1	0,0025	0,0058
2	0,0038	0,0083
3	0,0035	0,0075
4	0,0036	0,0080
5	0,0036	0,0079
6	0,0032	0,0070
7	0,0034	0,0076
8	0,0038	0,0081
9	0,0031	0,0070
10	0,0040	0,0086

Granulado 2.

	Sulfato cálcico en 100 grs.	Sulfato de plomo en 100 gramos.
1	0,0038	0,0085
2	0,0040	0,0088
3	0,0041	0,0089
4	0,0040	0,0086
5	0,0039	0,0086
6	0,0042	0,0089
7	0,0039	0,0085
8	0,0043	0,0090
9	0,0039	0,0083
10	0,0040	0,0087

Granulado 3.

	Sulfato cálcico en 100 grs.	Sulfato de plomo en 100 gramos.
1	0,0045	0,0099
2	0,0040	0,0089
3	0,0042	0,0094
4	0,0041	0,0092
5	0,0040	0,0090
6	0,0043	0,0093
7	0,0045	0,0093
8	0,0043	0,0091
9	0,0046	0,0094
10	0,0047	0,0098

Comparando las cantidades de los dos sulfatos determinados en los productos obtenidos, se observa también una relación entre ellas y los pesos moleculares correspondientes.

Peso molecular de $SO_4 Pb = 303$.

Peso molecular de $SO_4 Ca . 2H_2O = 172$.

Peso molecular de $SO_4 Ca = 136$.

Dividiendo el peso molecular del sulfato de plomo por el peso molecular del sulfato cálcico anhidro, resulta un número 2,22 importante, porque habida cuenta del resultado de los anteriores análisis, se puede establecer que: *la cantidad de sulfato de plomo contenido en el ácido tartárico, es igual á la cantidad de sulfato de calcio multiplicada por 2,22.*

Ley límite:

$$SO_4 Pb = SO_4 Ca . 2H_2O \times 2{,}22,$$

$$2{,}22 = \frac{\mathbf{P}m \text{ de } SO_4 Pb}{\mathbf{P}m \text{ de } SO_4 Ca}.$$

Zaragoza, 2 de Mayo de 1908.

XLIII. — Estudio comparativo de los instrumentos más usados en Sismología.

POR MANUEL-M.ª S. NAVARRO (S. J.)

Los péndulos horizontales suelen trabajar con longitudes bastante más modestas, sobre todo los que funcionan fuera del Japón; sin embargo, los períodos de hasta 25ˢ, y quizá algo más, son frecuentes, aun en péndulos de construcción algo *grossolana*, como decía de los suyos el Profesor A. Cancani, calificativo aplicable á los Stiattesi en Cartuja que también los dan.

Y como ya un péndulo vertical de 25 metros requiere gastos considerables de instalación, etc., á no hallarse en circunstancias puramente fortuitas y siquiera de un centenar de metros resultaría molestísimo, resalta la superioridad innegable de los péndulos horizontales é invertidos, de los cuales los primeros no pueden registrar, como ya apuntamos, más que una de las coordenadas horizontales en que puede descomponerse el movimiento, siendo conveniente instalar dos, uno en la dirección *E-W*, para registrar la componente *N-S* del movimiento, y otro en la *N-S* para la *E-W*. Esta segunda posición es la preferible cuando sólo es posible montar un péndulo, aunque á veces precisa, por otras causas dependientes del local, colocarlos en posiciones intermedias.

Por más, la fórmula indicada en la página 672 sirve también para deducir la sensibilidad de un péndulo horizontal, puede utilizarse la siguiente, debida al Profesor Omori (*):

$$\alpha = \frac{T_o^2}{T_g^2 L N \operatorname{sen} 1''} \text{ (**)},$$

en la que N es igual á la multiplicación del movimiento, ó sea al aumento externo del índice inscriptor, L la distancia del centro de gravedad de la masa al punto de apoyo (ó en los Stiattesi, por ejemplo, á la línea que une ambos puntos de suspensión y apoyo), T al período actual del péndulo horizontal y T_o al que tendría si el péndulo tuviese la longitud L.

Los péndulos horizontales de registro mecánico más usados actualmente, pertenecen al tipo Grablovitz-Omori, más ó menos modificado, esto es, se derivan del péndulo Gray-Ewing-Milne, aún empleado en el Japón, donde su escasa sensibilidad es á veces una buena cualidad.

(*) *Publications*..... Núm. 5, 1901, pág. 5.

(**) $\operatorname{Log} \alpha = 2 \log T_o - (2 \log T + \log L + \log N + \log \operatorname{sen} 1'')$.

Construídos en 1895 por vez primera con 5 kilogramos de masa, que en los modelos actuales asciende á 12 kilogramos, los péndulos del Profesor G. Grablovitz se distinguen por su sencillez y gran baratura (*).

En el modelo que hemos tenido ocasión de ver en el Observatorio del Ebro (Tortosa), las masas de ambas componentes son cúbicas y se hallan suspendidas por medio de delgados alambres de acero, sujetos á una de las diagonales de su base superior, á una sencilla armazón que descansa sobre una punta cónica de acero, fija en una pieza de hierro empotrada en el pilar de mampostería que sirve de apoyo al conjunto. El citado punto de suspensión está 2 metros más alto que el de apoyo, trozo de hierro escavado, sujeto á la masa, y que se apoya sobre la punta de una fuerte aguja ordinaria, sujeta á un tornillo límite de los empleados en los timbres eléctricos.

La distancia entre el centro de la masa y el punto de apoyo es de 10 centímetros, lo que permite obtener un aumento de 8 veces, adaptando un delgado listón de madera de 80 centímetros á uno de los lados del cubo, listón que termina por una delgada y estrecha lámina de aluminio, que, apoyándose sobre el papel ennegrecido con débil presión, traza los movimientos de la masa. El cilindro registrador da una vuelta = 30 centímetros por hora, avanzando, arrastrado por un reloj despertador ordinario, unos 2 milímetros, gracias al tornillo de acero en que termina. Un electroimán, bastante poderoso, obliga al cilindro á dar un salto hacia adelante cada vez que el péndulo cronógrafo cierre el contacto, lo que se hace de minuto en minuto, con una detención mayor todas las horas, marcando así las mismas agujas inscriptoras el tiempo sobre sus gráficos.

(*) 90 liras las dos componentes con el cilindro registrador, provisto de su mecanismo para marcar el tiempo, construído, bajo la dirección del inventor, por el mecánico del Observatorio.

Existen péndulos Grablovitz en dos puntos diferentes de la isla de Ischia, en Laibach y en Tortosa.

Los péndulos Omori pueden dividirse en tres grupos: péndulos largos, portátiles y tromómetros.

La característica general de todos ellos estriba en la exquisita delicadeza con que han sido construídos y en la suspensión.

Una masa, relativamente poco pesada, suspendida de la parte superior de un robusto soporte de fundición por medio de un estribo de hierro, terminado en fuerte y aguda punta de acero, que descansa sobre un bloque del mismo metal provisto de una abertura, también cónica, pero de 120° en vez de los 50 á 80° de la punta, todo provisto de delicados ajustes á tornillo para centrar las piezas y regular la distancia entre las verticales que pasen por los puntos de apoyo y suspensión, y, á más, una palanca multiplicadora inscriptora y un cilindro registrador con su cronógrafo, constituyen un péndulo Omori, hoy, con sus derivados, el más extendido de todos los sismógrafos, cualquiera que sea su tipo.

En los dos péndulos principales (*), que desde hace años funcionan admirablemente en el Observatorio de Hongo, uno de los tres sismológicos de Tokyo, las dimensiones actuales y constantes ordinarias, son las siguientes (**):

Distancia entre el punto de suspensión y el de apoyo....	2 metros.
Idem íd. íd. de apoyo y el centro de la masa.....	1 metro.
Peso de las masas....	E-W = 17,4 kilogramos. N-S = 46 »
Aumento externo.....	E-W = 15 veces. N-S = 20 »

El soporte de fundición y de gran solidez mide 1,20 metros de altura y tiene tres tornillos de nivel y dos pernos en

(*) *Horizontal pendulums..... Publications.....* Núm. 5, 1901, páginas 1-6.

(**) *The Calabrian Earthquake..... Bulletin ....* Vol. I, núm. 1, *Tokyo, 1907.*

su base, para unirlo sólidamente, una vez nivelado, á un pilar de mampostería de 1,78 metros de altura por 0,82 × 0,82 de sección.

En éste, cerca de su base, se halla empotrada en una excavación el punto de apoyo, bloque de acero de temple muy duro, con una cavidad cónica, en cuyo fondo ha de descansar la masa, por el intermediario de la punta de acero de 50° en que remata su estribo. De la dureza y esmerada construcción de entrambas piezas, depende, no poco, la sensibilidad del instrumento.

Tornillos situados convenientemente permiten orientar el bloque y fijarlo.

La suspensión consiste en un alambre delgado, también de acero, que se sujeta á la masa cilíndrica por dos ganchos que ésta presenta, en su gran diámetro central, perpendicular á aquél en que se halla el estribo. Este alambre pende de un tornillo cuadrado, que atraviesa un prisma triangular de acero, con su arista hacia abajo, verdadera cuchilla de balanza, y situado sobre una cuña de acero, también horadada, para dar paso al tornillo y al alambre ya citados.

Un tornillo, de sección cuadrada y de paso fino, situado detrás de la plataforma porta-prisma, sirve para hacerlo avanzar ó retroceder, regulando así el período.

El mecanismo multiplicador inscriptor consiste en una palanca de primer género, cuyo extremo corto remata en una horquilla y el largo en un trozo de espiral de reloj, de peso inferior á 5 miligramos y terminado en una punta fina, que constituye la pluma inscriptora. Esta palanca puede moverse horizontalmente sobre un eje de acero, y la relación entre ambos brazos debe ser de 1 : 10, 20 ó 30, como máximo, siendo su peso, en el modelo citado, 20 gramos. En su brazo corto penetra, á frotamiento *muy suave*, casi nulo, otro eje de acero muy bien pulimentado, y que gira, libremente, sobre un soporte en la base superior del cilindro de plomo, forrado de latón, que constituye la masa. Un pequeño contra-

peso sirve para equilibrar el peso de la palanca larga, disminuyendo así la resistencia que oponga al movimiento, lo que tiene, lo mismo que la esmerada construcción de todas las piezas que hemos tenido ocasión de ver en el péndulo Omori de la Estación Central de Estrasburgo, durante nuestra reciente permanencia en dicha ciudad, mucha más importancia de lo que á primera vista parece.

Los péndulos portátiles más recientes del Profesor Omori (*), suelen tener situado debajo un pequeño péndulo vertical invertido, esto es, con la masa hacia arriba, y relacionada con la del péndulo horizontal, lo que permite darles períodos oscilatorios muy considerables y contribuye, y no poco, con el factor antes citado, á amortiguar la tendencia que tienen los sistemas pendulares á adquirir sus propios períodos oscilatorios, aunque menos que el apagamiento citado. Su masa actual suele ser de unos 16 kilogramos; su punto de apoyo dista 1 metro del de suspensión y 75 centímetros del centro de la masa, siendo su aumento de 30 veces y su período ordinario máximo de unos 40 á 45 segundos.

Para las estaciones de segundo orden se usa en el Japón otro modelo portátil Omori, de masa más reducida y con palanca amplificadora análoga á la del péndulo del Profesor Grablovitz (**).

Como en estos instrumentos, en los tromómetros (***) también se halla situado el mecanismo de centraje en la plataforma en que se apoya el prisma de donde pende la masa.

En el modelo descrito en 1903 (****), ésta pesa unos 50 kilogramos, se halla suspendida á 112 centímetros de altura y su centro dista sólo 20 del punto de apoyo. Esta distancia,

---

(*) *A Duplex Horizontal Pendulum Apparatus, in Publicationes...* Núm. 18 (1904), págs. 1-3, pl. I-II.

(**) *Publications...* Núm. 5, pág. 8.

(***) De τρόμος, temblor, agitación.

(****) *A Horizontal Pendulum Tromometer, Publications...* Número 12, 1903, págs. 1-3, pl. I-VI.

tan corta, unida á la altura no muy considerable del punto de suspensión, no permite obtener más de 30 á 35 segundos como período máximo; pero se puede llegar y aun pasar de un minuto, colocándolo á mayor altura, como lo consiguió el mismo Omori, poniendo su tromómetro sobre una de las columnas mencionadas al hablar de sus péndulos largos.

El aparato multiplicador, en vez de hallarse relacionado con la parte central de la masa, lo está con un eje en el extremo de una armazón de aluminio y que dista un metro de la misma, lo que multiplica por 6 el aumento que en sí tenga aquél. Esta es una de las razones que inducen á construir péndulos cuya masa diste muy poco del punto de apoyo. La otra no menos poderosa, en el caso de masas de considerable peso, se halla fundada en que la presión que ejerce el punto de apoyo sobre la cavidad en que descansa, decrece rápidamente con el ángulo subtendido por el estribo, según la siguiente fórmula: $P = M \cos \alpha$, mientras que el *tiro* aumenta con mayor lentitud: $T = \frac{M}{\text{tang } \alpha}$. Así se pueden emplear masas muy pesadas sin miedo de estropear ni la punta cónica del estribo ni el punto de apoyo, pues la presión ejercida por la masa del tromómetro en que nos ocupamos no llegaba á 9 kilogramos para sus 50, próximamente.

Omori ha empleado este instrumento con 120 veces de aumento externo, y proponía la construcción de otros para Observatorios de primer orden, con 150 á 200 kilogramos de masa y 330 veces de aumento (*).

Existen péndulos Omori, de construcción japonesa, en los principales Observatorios sismológicos del Japón, en el Central de Estrasburgo, Birmingham y Zi-ka-wei (**).

(*) *A Horizontal Pendulum Tromometer, Publications...* Núm. 12, 1903, pág. 5.

(**) Regalo del Emperador del Japón al P. Luis Froc, S. J., por los valiosos servicios prestados á sus escuadras por el citado Observatorio, sito cerca de Shangai, que desde algunos años dirige.

Las modificaciones é imitaciones de estos péndulos son muy numerosas, siendo hoy los instrumentos sísmicos más extendidos, sobre todo bajo la denominación de péndulos pesados de Estrasburgo (*), fabricados por los afamados mecánicos de dicha ciudad hermanos J. & A. Bosch, de los que hay ya más de 84 repartidos en 42 estaciones distintas, entre las que se cuentan las de segundo orden del Imperio alemán, muchas del ruso y austriaco y alguna en América.

Pesa 50 kilogramos la sólida columna de fundición en que se apoyan y 25 la masa, suspendida, á un metro de altura, sobre su punto de apoyo por dos alambres rematados en una armazón, con su abertura en forma de cono de 120°, que descansa sobre una punta cónica de 90°, sujeta á una plataforma y provista de los tornillos necesarios de centraje.

El estribo, de 75 centímetros de largo, termina en una cavidad cónica, asimismo de 120°, y descansa sobre una punta de 90°, también de excelente acero, y fija en la parte inferior de la columna que le sirve de pie.

El aparato multiplicador, provisto de una ligera aguja de aluminio, aumenta quince veces, pudiendo emplearse, con gran facilidad, amplificaciones de cinco y diez veces y todas las intermedias, y el conjunto forma, con su cilindro registrador, que da una vuelta = 90 centímetros por hora, avanzando tres milímetros en dicho tiempo, un todo compacto de 1,30 metros de altura máxima por 1,60 en su mayor longitud, y atendiendo al peso es un aparato portátil (**). Los períodos máximos obtenibles llegan á más de cincuenta segundos, pero casi siempre se utilizan de diez y siete á veinticinco (***).

(*) Strassburger Horizontalschwerpendel angefertigt von J. & A. Bosch.

(**) 650 Mks. el par, con accesorios, y de 180 á 210 Mk. más con reloj cronógrafo y aparato amortiguador.

(***) Albums de los Profesores Rudolph y Omori, *Bulletins des Observatoires de la Hongrie et de la Croatie, Records of Seismographs in North America and the Hawaïan islands, &.*

Pertenecen á este tipo, inspirado en las felices modificaciones introducidas en los péndulos Ewing, Gray y Milne por Omori, y que tan excelentes resultados da en mano de este celebérrimo sismólogo japonés, los *tromometrógrafos Omori* del R. P. D. Guido Alfani, S. P.

Este sabio escolapio, Director del Observatorio Ximeniano de Florencia, emplea, como los hermanos Bosch y antes Grablovitz, dos puntas cónicas de acero, sobre las que descansan dos cúpulas semiesféricas.

Con masas de 200 kilogramos y aumento de 125 veces, se consiguen períodos de hasta cuarenta segundos (*).

Existen dos de estos tromometrógrafos en el citado Observatorio, y hay, además, otros instalados en el Simplón, Pompeya, la Calabria, etc.

La casa Bosch, de Estrasburgo, construye un tromómetro, de 100 kilogramos de peso y de 80 á 100 veces de aumento externo, en el cual, siguiendo los consejos del Profesor Hecker, de Postdam, la suspensión se efectúa por medio de láminas de acero, pudiendo agregarle un mecanismo de apagamiento (**).

Pertenece también á este tipo bifiliar el péndulo del doctor C. Mainka, encargado de los instrumentos en la Estación Central de Estrasburgo: la suspensión consiste en un delgado alambre de acero, y el punto de apoyo es una lámina del mismo metal, sumamente adelgazada y perforada en su mitad.

(*) 800 liras el par, comprendido el cilindro registrador, de un metro de velocidad por hora, construído bajo la dirección de su inventor.

(**) 800 Mk. el par, sin los cilindros registradores 600 Mk. y el apagamiento 80 Mk. más.

PUBLICACIONES RECIBIDAS DESDE 1.° DE JULIO DE 1907

(Continuación.)

Centro Farmacéutico Uruguayo.—Revista...—Año 15, tomo XIV, núms. 8 y 9, Agosto 1.°, Septiembre 1.° 1907.—Montevideo.

Mallada (L.).—Memorias de la Comisión del Mapa Geológico de España.—Explicación del Mapa Geológico de España por...—Tomo VI.—Sistemas Eoceno, Oligoceno y Mioceno.—Madrid, 1907.

Vegas (Miguel).—Tratado de Geometría Analítica por .. - Tomo II, segunda edición.—Madrid, 1907.

Escuela de Artes y Oficios y de Capataces de Bilbao.—Memoria relativa al curso de 1906 á 1907.—Bilbao, 1907.

G. de Galdeano (Zoel).—Exposición sumaria de las Teorías Matemáticas por el Doctor...—Zaragoza, 1907.

G. de Galdeano (Zoel).—Algunas consideraciones sobre Filosofía y Enseñanza de la Matemática, por el Doctor...—Zaragoza, 1907.

Labra (Rafael M. de).—El Instituto de Derecho Internacional.—Madrid, 1907.

Cortejarena (Dr. Francisco).—Algunos escritos y casos prácticos de cirugía del Dr. Sánchez de Toca (Curso clínico de 1855 á 1856).—Comunicación leída ante la Real Academia de Medicina los días 13, 20 y 27 de Abril de 1907 y publicada en los Anales de la misma.—Madrid, 1907.

Enestrom (Gustaf).—Bibliotheca Mathematica, 3 folge, 8 band, 2 heft.—Leipzig, 1908.

Societá Cattolica Italiana per gli Studi Scientifici.—Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali.—Anno 8, Ottobre 1907, núm. 94.—Pisa-Pavia, 1907.

Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.—Bolletino delle publicazioni italiane ricevute per diritto di Stampa, 1907, núm. 82, Ottobre.—Firenze, 1907.

Ciel et Terre.—Revue populaire d'Astronomie de Météorologie et de Physique du Globe.—Vingt-huitième année, núms. 17 et 18 (1.°, 16 Nov. 1907. Bruxelles.

La Feuille des Jeunes Naturalistes.—Revue mensuelle d'Histoire Naturelle. 1er. Novembre 1907, IV serie, 38 année, núm. 445.—Rennes, 1907.

The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazin and Journal of Science—Conducted by Lord Kelvin, G. C. V. O. D. C. L. Ll. D. F. R. S. etc. John Joly, M. A. D. Sc. F. R S. F. G. etc., and William Francis, F. L. S.—Sixth series, núm. 83, November 1907—London.

Académie Royale de Belgique.—Bulletin de la classe des Sciènces, 1907, números 2 al 5.—Bruxelles, 1907.

(Continuará)

XLIV.—Elementos de la teoría de la Elasticidad.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia novena.

SEÑORES:

Estudiamos la distribución de tensiones en un cuerpo elástico alrededor de un punto, y vimos, que todas podían expresarse por seis componentes, que designábamos por las letras N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3. Esta era la primera parte del método.

Estudiamos después la distribución de las deformaciones alrededor del mismo punto y llegamos á una consecuencia análoga á la anterior. Así expresamos una deformación cualquiera en cuanto á su *magnitud*, en función de seis deformaciones elementales: a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3. Si además de la magnitud de las deformaciones, quisiéramos fijar la posición de los elementos deformados, necesitaríamos para cada punto tener en cuenta tres constantes más, p_1, p_2, p_3; pero pocas veces habremos de tenerlas en cuenta. Dicho estudio de las deformaciones constituía, por decirlo de este modo, la segunda parte del método.

Después de resueltos estos dos problemas, abordamos el tercero, á saber, determinar las tensiones en función de las deformaciones; es decir, N, T en función de a, b. Pero como el problema con esta generalidad era inmensamente difícil, hicimos diferentes hipótesis para simplificarlo. Hipótesis que se referían á la estructura del sistema elástico, con el fin de reducir en lo posible el número de coeficientes. Y en esta serie de simplificaciones llegamos á la mayor de todas, ó sea á los sistemas homogéneos é isótropos; con lo cual los trein-

ta y seis coeficientes primitivos, que, en general, eran funciones de x, y, z, se reducían á dos constantes, λ, μ; y los valores de las N, T tomaban la forma relativamente sencilla, que obtuvimos en la última conferencia.

Debemos pasar hoy á lo que hemos llamado la cuarta parte del método: es decir, á determinar las ecuaciones de equilibrio de un sistema infinitamente pequeño, que comprenda al punto cuyo equilibrio queremos establecer.

A este fin, como ya hemos indicado varias veces, y como hicimos en el curso anterior, consideraremos:

1.° Un punto cualquiera del sistema elástico: rodearemos ese punto por un poliedro infinitamente pequeño de caras planas, y suponiendo conocidas las tensiones sobre estas diferentes caras, estableceremos las ecuaciones de equilibrio de dicho poliedro infinitamente pequeño, como si fuera un cuerpo rígido.

El poliedro, en vez de tener una forma cualquiera, lo cual complicaría inútilmente el problema, supondremos que es un paralelepípedo trirrectangular, cuyas caras sean paralelas á los planos coordenados; con lo cual tendremos la ventaja de que las tensiones sobre dichas caras serán precisamente las N T, cuyas propiedades estudiamos al empezar el curso, y que además sabemos expresar en función de las deformaciones.

Este es el problema que se designa de la manera siguiente: *equilibrio del paralelepípedo elemental.*

Claro es que si establecemos las condiciones de equilibrio de un paralelepípedo, que comprenda un punto M, este punto, al cual se aproxima el paralelepípedo tanto como se quiera, estará tambien en equilibrio y habremos expresado el de cualquier punto del sistema elástico.

2.° El equilibrio del paralelepípedo determina, como acabamos de decir, el de cualquier punto del interior de dicho cuerpo elástico.

Pero, en general, un paralelepípedo no puede ajustarse

geométricamente á la superficie que termine el cuerpo, si el sistema está limitado.

Y por eso, para expresar *el equilibrio de los puntos de la superficie*, necesitamos escoger otro poliedro elemental, y escogeremos, como ya hicimos al final del curso precedente, el llamado *tretraedro de Cauchy*.

Es un tretraedro trirrectángulo; las tres caras del triedro principal son paralelas á los planos coordenados, la cuarta

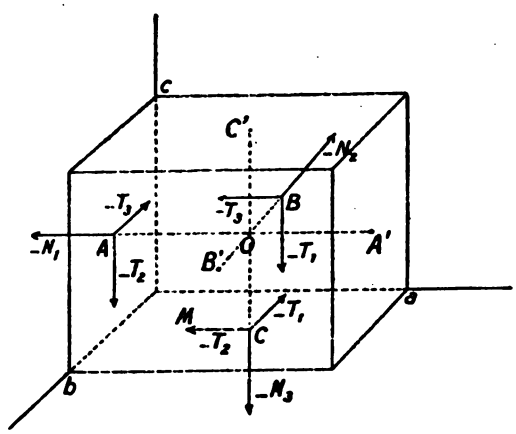


Figura 45.

cara es precisamente la porción de superficie, que el triedro corta, en la que limita el cuerpo elástico.

Empecemos, pues, por establecer las ecuaciones de equilibrio del paralelepípedo.

***

Equilibrio del paralelepípedo elemental.—Sea *abc* (fig. 45) dicho paralelepípedo.

Debe estar en equilibrio, bajo la acción de las tensiones sobre sus seis caras, y de las fuerzas exteriores que actúan

en él, las cuales darán, como hemos explicado varias veces, una resultante aplicada á su centro, cuyas componentes, por unidad de volumen, representaremos por X, Y, Z.

Enumeremos las tensiones, que será repetir lo que explicamos en el curso anterior y lo que hemos explicado en otras conferencias de este curso.

En el centro de la cara bc, actuará una tensión, cuyas tres componentes, que no hemos representado en la figura, serán N_1, T_2, T_3.

Pero estas componentes pertenecen á la acción que el paralelepípedo ejerce sobre la región de la izquierda. Y las que nos interesan no son éstas, sino las que ejerce esta última sobre el *paralelepípedo*.

Dichas componentes, son:

$$-N_1, -T_2, -T_3$$

que están representadas en la figura.

En la cara ac actuará asimismo una tensión, cuyas componentes serán, considerando la acción de la parte de detrás sobre la de delante, ó sea sobre el paralelepípedo.

$$-N_2, -T_1, -T_3$$

que también están representadas en la figura.

Y, por último, en la cara ab, la acción de la parte de debajo sobre la superior, ó sea la acción sobre el paralelepípedo, tendrá por componentes.

$$-N_3, -T_1, -T_2.$$

Todas éstas N y T están referidas, como hemos dicho muchas veces, á la unidad de superficie.

Para obtener la fuerza efectiva sobre cada una de estas caras, será preciso multiplicar cada componente por área de la cara á que corresponde.

Las nueve componentes que hemos expresado están aplicadas á los centros A, B, C de las tres caras bc, ac, ab.

Debemos ahora señalar las acciones sobre las otras tres caras del paralelepípedo, paralelas á las anteriores.

Consideremos la cara, cuyo centro sea A' paralela á la cara bc, cuyo centro es A.

Lo que de ésta digamos, podremos repetir para las otras dos caras que nos restan, á saber; la anterior y la superior.

La tensión sobre el centro A' tendrá por componentes las mismas que están aplicadas al centro A, aumentadas, según corresponda al incremento diferencial de x, que es la arista del paralelepípedo paralela al eje de las x; es decir,

$$Ma = dx.$$

Pero debemos hacer una observación, y es, que las tres componentes deberán llevar el signo $+$, porque aquí la acción sobre el paralelepípedo, que es la que nos interesa, es la de la parte de la derecha sobre la región de la izquierda.

Tendremos, pues:

Componentes de la acción sobre A',

$$N_1 + \frac{dN_1}{dx}dx, \quad T_2 + \frac{dT_2}{dx}dx, \quad T_3 + \frac{dT_3}{dx}dx.$$

Del mismo modo, la acción sobre el centro B' de la cara anterior, tendrá por componentes:

Componentes en B',

$$N_2 + \frac{dN_2}{dy}dy, \quad T_1 + \frac{dT_1}{dy}dy, \quad T_3 + \frac{dT_3}{dy}dy,$$

siendo $dy = Mb$.

Y, por último, la acción sobre el centro C' de la cara superior, dará:

Componentes en C',

$$N_3 + \frac{dN_3}{dz}\,dz, \quad T_1 + \frac{dT_1}{dz}\,dz, \quad T_2 + \frac{dT_2}{dz}\,dz,$$

siendo $dz = Mc$.

En estas 18 componentes debemos buscar las paralelas á los tres ejes coordenados, sumarlas después de haberlas multiplicado por las áreas de las caras, agregar las componentes de la fuerza exterior, multiplicadas por la masa, é igualar á cero la suma.

Consideremos el eje de las x.

Las componentes paralelas á dicho eje son:

$$-N_1;\ +N_1 + \frac{dN_1}{dx}\,dx;\ -T_2;\ T_2 + \frac{dT_2}{dz}\,dz;$$
$$-T_3;\ T_3 + \frac{Td_3}{dy}\,dy;\ +X.$$

Debemos sumarlas, según hemos dicho, multiplicando antes las dos primeras por el área $dy.dz$ de la cara bc.

Las dos segundas debemos multiplicarlas por $dx.dy$, que es área de ac.

Las dos últimas, por $dx.dz$.

Y la componente X, por la masa, que será, llamando ρ á la densidad, $\rho.dxdydz$.

Resultará, pues,

$$\left(-N_1 + N_1 + \frac{dN_1}{dx}dx\right)dydz + \left(-T_2 + T_2 + \frac{dT_2}{dz}dz\right)dxdy +$$
$$+\left(-T_3 + T_3 + \frac{dT_3}{dy}\,dy\right)dx\,dz + X\rho\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Y simplificando y dividiendo por $dx.dy.dz$, tendremos

$$\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_2}{dz} + \frac{dT_3}{dy} + \rho X = 0.$$

Del mismo modo, las componentes paralelas al eje de la y como se ve en la figura, supliendo las que en ella no hemos representado y que corresponden á las caras A', B', C', serán:

$$-N_2;\ +N_2+\frac{dN_2}{dy}dy;\ -T_1;\ -T_1+\frac{dT_1}{dz}dz;$$
$$-T_3;\ +T_3+\frac{dT_3}{dx}dx;\ +Y,$$

ó multiplicando las dos primeras por $dx\,dz$; las dos segundas por $dx\,dy$; las otras dos por $dy\,dz$, é Y por $\rho\,dx\,dy\,dz$, sumando é igualando á cero:

$$\left(-N_2+N_2+\frac{dN_2}{dy}dy\right)dx\,dz+\left(-T_1+T_1+\frac{dT_1}{dz}dz\right)dx\,dy+$$
$$+\left(-T_3+T_3+\frac{dT_3}{dx}dx\right)dy\,dz+\rho\,Y\,dx\,dy\,dz=0,$$

y simplificando y dividiendo por $dx\,dy\,dz$,

$$\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}+\frac{dT_3}{dx}+\rho\,Y=0.$$

Por último, para las componentes paralelas al eje de la z, tendremos las siguientes expresiones:

$$\left(-N_3+N_3+\frac{dN_3}{dz}dz\right),\quad \left(-T_1+T_1+\frac{dT_1}{dy}dy\right),$$
$$\left(-T_2+T_2+\frac{dT_2}{dx}dx\right)Z,$$

y multiplicando el primer grupo por $dx.dy$, área del rectángulo ab; el segundo por $dx.dz$, que representa la superficie de ac; el tercer grupo por $dy.dz$, que es la superficie de la cara bc, y, por último, multiplicando Z por la masa del para-

lelepípedo, que será $\rho\, dx.dy.dz$, tendremos las componentes paralelas al eje de la z sobre todo el sólido elemental que estamos considerando.

Sumándolas, se halla

$$\left(-N_3+N_3+\frac{dN_3}{dz}dz\right)dx.dy+\left(-T_1+T_1+\frac{dT_1}{dy}dy\right)dx.dz+$$
$$+\left(-T_2+T_2+\frac{dT_2}{dx}dx\right)dy.dz+Z\rho\, dx\, dy\, dz=0.$$

Simplificando y dividiendo por $dx\ dy\ dz$, hallaremos la tercera ecuación del equilibrio del paralelepípedo, que será:

$$\frac{dN_3}{dz}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dT_2}{dx}+\rho Z=0.$$

En resumen; las tres ecuaciones del equilibrio del paralelepípedo infinitamente pequeño, cuyas aristas son dx, dy, dz, que comprende el punto M, que estamos considerando, y el equilibrio del cual queremos establecer, serán:

$$\frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}+\rho X=0,$$
$$\frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}+\rho Y=0,$$
$$\frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}+\rho Z=0.$$

No olvidemos, que en estas ecuaciones las N y T representan tensiones por unidad de superficie; X, Y, Z representan las componentes de las fuerzes exteriores por unidad de volumen para el punto M ó para cualquier punto del paralelepípedo, y ρ representa, por fin, la densidad del sólido en el punto M.

Dichas ecuaciones expresan, según acabamos de indicar,

el equilibrio del paralelepípedo; pero como éste puede ser tan pequeño como se quiera, comprendiendo siempre al punto M, en el límite, por decirlo así, se supone que representa el equilibrio de este punto.

Hemos establecido las ecuaciones de equilibrio, y pudiéramos establecer por el mismo método las ecuaciones del movimiento, porque éste se reduce siempre á aquél, como se sabe por Mecánica, agregando á las fuerzas exteriores X, Y, Z las fuerzas de inercia

$$-\rho\, dxdydz \frac{d^2u}{dt^2}, \quad -\rho dxdydz \frac{d^2v}{dt^2}, \quad -\rho dxdydz \frac{d^2w}{dt^2}.$$

En este caso, y pasando al segundo miembro estas últimas, las tres ecuaciones anteriores se convertirán, después de dividir por $dxdydz$, en las siguientes:

$$\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} + \rho X = \rho \frac{d^2u}{dt^2},$$

$$\frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} + \rho Y = \rho \frac{d^2v}{dt^2},$$

$$\frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} + \rho Z = \rho \frac{d^2w}{dt^2}.$$

***

Una observación debemos hacer todavía.

Hemos prescindido por completo, como en general prescinden los autores, de las tres rotaciones p_1, p_2, p_3 de que hablamos en las conferencias anteriores.

Para el *cálculo de magnitudes*, así de tensiones como de deformaciones, esto parece legítimo; pero la rotación de la cual son las componentes p_1, p_2, p_3, cambia en rigor la po-

sición del paralelepípedo; luego cambiarán las inclinaciones de las fuerzas de tensión sobre las caras.

Sería preciso demostrar, que por la pequeñez de esta rotación y por la pequeñez decreciente del paralelepípedo, no se cometen de este modo más que errores de orden superior; pero esto nos ocuparía mucho tiempo, y nos atendremos á la marcha seguida en todos los tratados de esta materia, adoptando para las ecuaciones, que definen este fenómeno de la Elasticidad en el interior de un sólido, á las ecuaciones que acabamos de obtener.

***

Pasemos al equilibrio del *tetraedro elemental*, que es el que se aplica á los límites del cuerpo, dado que éste no sea indefinido en todas direcciones. En este caso las ecuaciones que acabamos de demostrar serán las únicas que han de tenerse en cuenta, agregando sólo esta condición: que en el infinito las N, T, u, v, w han de ser iguales á cero. Es decir, que la perturbación elástica al prolongarse hacia el infinito, se debilita y se anula por unidad de superficie y por unidad de volumen.

Sea (fig. 46) $O\ A\ B\ C$ un tetraedro infinitamente pequeño, trirrectángulo aplicado á cualquier punto M' de la superficie límite del cuerpo.

De modo que el triángulo $A\ B\ C$ será la porción de superficie comprendida entre las caras del triedro.

Claro es que, en general, será una superficie curva, y dicho triángulo será curvilíneo; pero nosotros supondremos con errores de orden superior, que sus tres lados AB, BC, CA son líneas rectas, y que el triángulo es plano.

Establecer el equilibrio de este tetraedro es establecer el equilibrio de todos sus puntos, puesto que consideramos, del mismo modo que hemos hecho con el paralelepípido ele-

mental, que es un sólido absolutamente rígido, cuando se han realizado todas las deformaciones.

Ni para el tetraedro ni para el paralelepípedo, escribiremos las ecuaciones que expresen el equilibrio de las rotaciones, porque implícitamente ya están escritas, como vimos

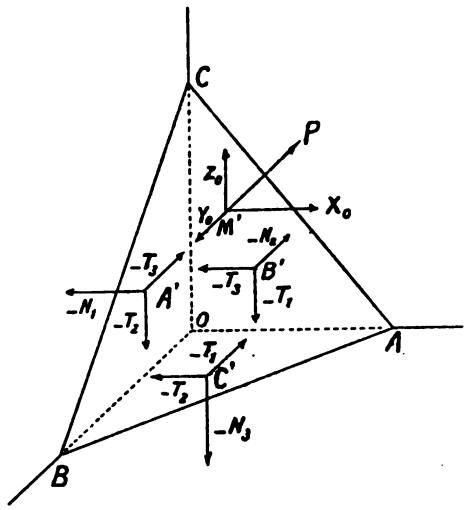


Figura 46.

en otra conferencia, al establecer entre las componentes de las tensiones las igualdades:

$$X_{xy} = X_{yx}; \quad X_{yz} = X_{zy}; \quad X_{zx} = Y_{xz}.$$

Hubiéramos podido escribir las seis ecuaciones de equilibrio, á saber: las tres de las componentes paralelas á los ejes y las tres de las rotaciones, que hubieran sido las tres anteriores, y eliminando tres de las seis cantidades que entran en estas últimas por substitución en las primeras, hubiéramos llegado á los resultados obtenidos con sólo cambiar de notaciones, es decir, introduciendo las T y las N en vez de las X.

Esto se ve inmediatamente en el paralelepípedo elemental, y lo mismo hubiéramos podido hacer para el tetraedro con facilidad suma, descomponiéndole en paralelepípedos infinitamente pequeños de orden superior.

Es decir, substituyendo á la superficie $A\ B\ C$ una serie de escalones, por decirlo de este modo.

Y sigamos el razonamiento precedente, dejando establecido que las ecuaciones que vamos á obtener, puede suponerse que son las ecuaciones de equilibrio del punto M' de la superficie límite del cuerpo.

Veamos cuáles son las fuerzas que actúan sobre este tetraedro.

Determinemos las componentes paralelas á los tres ejes, é igualemos estas componentes á cero.

Las fuerzas que actúan sobre la cara BOC de la figura 46, son como en la figura 45.

$$-N_1, \qquad -T_2, \qquad -T_3.$$

Una cosa análoga podemos repetir para las caras AOC y OAB.

Todas las componentes están expresadas en la figura 46.

Para la cara ABC, que es la del cuerpo, la fuerza que actúa en el punto M' por unidad de superficie, supondremos que sea P, y sus componentes, X_0, Y_0, Z_0; designaremos por l, m, n los cosenos de los ángulos que forma dicha fuerza P con los ejes coordenados, y para completar las notaciones, representaremos los cosenos directores de la normal á la cara ABC por α, β, γ; pondremos, por fin,

$$\text{área } OBC = \omega_1, \quad \text{área } OAC = \omega_2, \quad \text{área } OAB = \omega_3,$$
$$\text{área } ABC = \Omega,$$

de donde

$$\omega_1 = \Omega\alpha, \qquad \omega_2 = \Omega\beta, \qquad \omega_3 = \Omega\gamma.$$

Pasemos al cálculo de las componentes.

Las componentes paralelas al eje de la x, se ve en la figura, que son

$$-N_1, \quad -T_2, \quad -T_3, \quad X_0,$$

y los esfuerzos sobre las caras del tetraedro, que se obtendrán multiplicando las anteriores por las áreas correspondientes:

$$-N_1\omega_1, \quad -T_2\omega_3, \quad -T_3\omega_2, \quad X_0\Omega,$$

que sumándolas dan

$$-N_1\omega_1 - T_2\omega_3 - T_3\omega_2 + X_0\Omega = 0;$$

de donde

$$X_0 = N_1\frac{\omega_1}{\Omega} + T_2\frac{\omega_3}{\Omega} + T_3\frac{\omega_2}{\Omega},$$

y poniendo por X_0 su valor Pl, y por

$$\frac{\omega_1}{\Omega}, \quad \frac{\omega_2}{\Omega}, \quad \frac{\omega_3}{\Omega},$$

respectivamente α, β, γ,

$$Pl = N_1\alpha + T_2\gamma + T_3\beta.$$

Esta será la primera ecuación de equilibrio del tetraedro.

Asimismo, las componentes paralelas al eje de las y, serán

$$-N_2, \quad -T_1, \quad -T_3, \quad Y_0,$$

y los esfuerzos sobre las caras del tetraedro se obtendrán multiplicando las anteriores por ω_2, ω_3, ω_1 y Ω; y tendremos

$$-N_2\omega_2, \quad -T_1\omega_3, \quad -T_3\omega_1, \quad Y_0\Omega;$$

sumando é igualando á cero:

$$-N_2\omega_2 - T_1\omega_3 - T_3\omega_1 + Y_0\Omega = 0,$$

y sucesivamente,

$$Y_0\Omega = T_3\omega_1 + N_2\omega_2 + T_1\omega_3,$$

$$Y_0 = T_3\frac{\omega_1}{\Omega} + N_2\frac{\omega_2}{\Omega} + T_1\frac{\omega_3}{\Omega}$$

$$Pm = T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma.$$

Esta es la segunda ecuación de equilibrio del tetraedro.

Por último, del mismo modo obtendremos la tercera ecuación.

Componentes de las tensiones por unidad paralelas al eje de la y, y componente de P:

$$-N_3, \quad -T_1, \quad -T_2, \quad Z_0;$$

suma de las componentes de los esfuerzos:

$$-N_3\omega_3 - T_1\omega_2 - T_2\omega_1 + Z_0\Omega = 0,$$

ó bien, sucesivamente:

$$Z_0 = N_3\frac{\omega_3}{\Omega} + T_1\frac{\omega_2}{\Omega} + T_2\frac{\omega_1}{\Omega},$$

$$Pn = T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma,$$

que es la tercera ecuación de equilibrio.

Así, las tres ecuaciones de equilibrio del tetraedro, que corresponde á un punto cualquiera de la superficie, serán:

$$Pl = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma,$$

$$Pm = T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma,$$

$$Pn = T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma.$$

En resumen, para el equilibrio de cualquier punto del interior del cuerpo, las componentes de las tensiones tienen que satisfacer á las tres ecuaciones siguientes, que antes obtuvimos:

$$\begin{aligned} &\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} + \rho X = 0, \\ &\frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} + \rho Y = 0, \\ &\frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} + \rho Z = 0. \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Estas ecuaciones son suficientes si el medio elástico es indefinido.

Si el sistema elástico es limitado, las componentes de las tensiones para cualquier punto de la superficie límite deben satisfacer á las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} Pl &= N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma, \\ Pm &= T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma, \\ Pn &= T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma. \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Los grupos (I) y (II) resuelven el problema que nos habíamos propuesto, á saber: determinar las ecuaciones de equilibrio de un sistema elástico, definido ó indefinido, bajo la acción de fuerzas exteriores, y actuando, ya sobre los elementos de la masa, ya sobre los diferentes puntos de la superficie límite, si el sistema no es indefinido.

Si en vez del equilibrio se tratara del movimiento, no habría más, como hemos dicho varias veces, que tener en cuenta las fuerzas de inercia, que por unidad de masa, y representando por u, v, w, los desplazamientos, sabemos que son las componentes de la aceleración:

$$\frac{d^2u}{dt^2}, \qquad \frac{d^2v}{dt^2}, \qquad \frac{d^2w}{dt^2}.$$

Antes de pasar adelante, debemos hacer algunas observaciones para completar la inteligencia de lo que precede, evitar confusiones y prevenir dudas.

Advertimos, una vez más, que siempre suponemos dirigirnos á principiantes.

***

1.° Podrá llamar la atención de algunos, que en las ecuaciones del grupo (I) hayamos tenido en cuenta las componentes de las fuerzas exteriores sobre la masa del paralelepípedo, es decir,

$$\rho dx\, dy\, dz X, \quad \rho dx\, dy\, dz Y, \quad \rho dx\, dy\, dz Z,$$

y que no las hayamos tenido en cuenta al establecer el equilibrio del tetraedro.

La explicación es elemental, y se refiere al orden de pequeñez de los diferentes términos.

En el paralelepípedo hay que tener en cuenta la diferencia de los esfuerzos sobre las caras opuestas, diferencia que es de tercer orden de pequeñez.

Por ejemplo, sobre las caras perpendiculares al eje de las x tenemos

$$\left(-N_1 + N_1 + \frac{dN_1}{dx} dx\right) dy\, dz = \frac{dN_1}{dx} dx\, dy\, dz,$$

que es, en efecto, de tercer orden; lo mismo exactamente que cualquiera de las expresiones que acabamos de escribir, por ejemplo, $X\rho dx\, dy\, dz$; de modo que no puede prescindirse de esta última, y por eso las tres ecuaciones pueden dividirse por $dx\, dy\, dz$; y por eso quedan en las ecuaciones X, Y, Z.

No sucede lo mismo con el tetraedro. No hay caras opuestas, no hay diferencias de tercer orden; cada fuerza está mul-

tiplicada por un elemento de superficie, lo mismo las N y T que la P. Si además hubiéramos tenido en cuenta la fuerza exterior, y, por lo tanto, para la primera ecuación, por ejemplo, $X \rho dx\, dy\, dz$, al dividir por Ω hubiera resultado $X \rho \frac{dx\, dy\, dz}{\Omega}$, que es, como se ve, un infinitamente pequeño de primer orden; y como los demás términos son cantidades finitas, éste hubiera desaparecido al pasar al límite.

2.° El grupo (I) nos dice que para el equilibrio de un punto del interior de sólido elástico, las componentes de las tensiones N, T deben satisfacer á tres ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, que son precisamente las de dicho grupo (I); son, pues, éstas, las que en cierto modo dan la ley de variación de las tensiones en el interior del sistema.

En ellas, N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 se refieren á cada punto M del sólido, porque el paralelepípedo no ha sido más, por decirlo de esta manera, que el andamiaje geométrico que hemos empleado para llegar á las relaciones (I). Habiéndolas obtenido, ya el paralelepípedo no existe; al pasar á los límites, se va haciendo cada vez más pequeño, y, por último, todas sus caras pasarán por el punto M.

Las ecuaciones del grupo (I) expresan, pues, una ley á que deben satisfacer las componentes de las tensiones por unidad para el punto M y para planos paralelos á los planos coordenados.

Ley diferencial á la que no sería difícil dar una interpretación geométrica.

Resulta, pues, que N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 son funciones todas ellas de x, y, z, que son las coordenadas del punto M; y el problema analítico consistirá en integrar estas tres ecuaciones, es decir, en buscar funciones de x, y, z para las N y las T que satisfagan, ó de otro modo, que hagan idénticas las tres ecuaciones del grupo (I).

A primera vista parece que el problema es indeterminado,

porque las ecuaciones son tres y son seis las funciones N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3.

Ocurre, pues, que podrían tomarse tres de estas funciones arbitrariamente, y por medio del grupo (I) obtener las restantes, con lo cual, el problema de la Elasticidad resultaría indeterminado. Resultado contrario, *en general,* á lo que da la experiencia y á lo que admitieron en un principio la mayor parte de los autores.

Pero de todas maneras, este procedimiento es absolutamente inaceptable y de todo punto inexacto.

Las N y las T no son independientes entre sí, ni pueden tomarse tres de ellas arbitrariamente.

Vimos en una de las conferencias anteriores, que todas estas cantidades, es decir, las seis componentes N, T se expresan en función de los desplazamientos u, v, w, que son las verdaderas incógnitas del problema. Las N y las T son incógnitas, en este concepto, secundarias, y quedan determinadas cuando se conocen las primeras; aunque sean por sí importantísimas.

Esto lo veremos comprobado en la conferencia próxima, cuando de las ecuaciones del grupo (I) eliminemos N y T en función de u, v, w y tengamos tres ecuaciones diferenciales entre estas tres componentes del desplazamiento.

Y, sin embargo, cuando en alguno de los cursos próximos, estudiemos, al menos tal es mi propósito, las teorías de Maxwell, obtendremos ecuaciones, análogas á las precedentes, en la Electroestática, y diremos que el problema es indeterminado, y para resolverlo, consideraremos una solución particular; pero aun entonces, algo tendremos que observar.

Ya hicimos constar varias veces, que la teoría de la Elasticidad es fundamental en toda la Física matemática.

Si bien hemos dicho, que tiene caracteres particulares cuando se aplica á los sistemas eléctricos.

Por ahora no adelantemos las ideas.

3.° Las ecuaciones del grupo (II), que se llaman las ecua-

ciones de los límites, establecen el equilibrio para cualquier punto de la superficie del sistema elástico.

No es, si se nos permite el modo de expresarnos, un equilibrio de volumen, como el que determina el grupo (I), sino un equilibrio de superficie, ó para la superficie, en el caso de que el sistema no sea indefinido.

Las N y T del grupo (II) no representan lo mismo que las N y T del grupo (I).

Estas últimas ya hemos indicado que son funciones de tres variables independientes, x, y, z, si se trata del equilibrio; y es claro que serán funciones de cuatro variables, x, y, z, t, siendo t el tiempo, si el problema es un problema de movimiento elástico: por ejemplo, una onda de vibración que circula por el sistema.

Por el contrario, las N y T del grupo (II) son funciones de dos variables independientes; por ejemplo, x, y en el caso del equilibrio; y de tres variables, x, y, t en el caso del movimiento.

La otra variable z, que era independiente en el interior del cuerpo, depende de x, y para la superficie.

Si

$$F(x, y, z) = 0$$

representa la ecuación de la superficie límite, esta ecuación dará z para cada sistema de valores de x, y.

De modo, que en el grupo (II), ó en otro que de él se deduzca, se podrá, al menos en teoría, eliminar z, y este grupo (II) se convertirá en una ecuación finita ó diferencial, no prejuzguemos ahora la cuestión, de dos *variables independientes*, x, y; mientras el grupo (I) contendrá tres variables independientes, según hemos dicho. Si se trata del movimiento, hay que agregar siempre la variable independiente t.

Si del grupo (I) ó de éste combinado con los valores de N y T, según explicaremos en la conferencia próxima, dedujésemos los valores de N y T, al substituirlos en el grupo (II)

para ver si lo reducía á identidades, en estos valores de N y T deberíamos poner el valor de z obtenido en la ecuación $F = 0$.

Son minuciosidades evidentes, y hasta de buen sentido, pero ninguna aclaración sobra, cuando se estudia una materia por primera vez.

***

Recordemos, antes de terminar esta conferencia, el camino que hemos seguido, para comprender bien el punto en que estamos, y lo que nos falta para la exposición completa del método de Lamé.

El hacer un resumen, de cuando en cuando, la experiencia me ha enseñado que es conveniente para la enseñanza.

Volver la vista atrás, y abarcar de un golpe el camino recorrido, es la mejor manera de orientarse en la marcha.

El método que vamos á exponer, decíamos al principio del curso, que en sus líneas generales es el de Lamé, parte, según nosotros, de dos principios experimentales:

1.° Que en cada punto del interior de un sólido elástico, y para cada dirección de un plano, que pase por este punto, que hasta pudiéramos suponer que es un plano de rotura, existe un esfuerzo que llamábamos tensión, en términos generales.

2.° Principio, también experimental: las deformaciones, ó sea los desplazamientos, dependen de las tensiones; ó á la inversa, las tensiones son funciones de los desplazamientos.

Esto también lo comprueba la experiencia.

Ambos principios, que nosotros en este método consideramos como experimentales, pueden establecerse *à priori*, haciendo hipótesis sobre la construcción íntima del cuerpo, y suponiendo fuerzas de atracción ó repulsión entre sus elementos; pero esto, á nuestro modo de ver, es un método

híbrido, mezcla de dos métodos opuestos, porque admitidas dichas hipótesis, no hay motivo para no seguir el método de Cauchy; y en vez de considerar el equilibrio de cada paralelepípedo elemental, considerar el equilibrio de cada punto como una de tantas masas infinitamente pequeñas de un sistema astronómico-molecular, si se nos permite emplear esta palabra. En resumen, el sistema de Cauchy, ó el sistema de Lamé, puede decirse que se diferencian de este modo.

Para el equilibrio del interior del cuerpo, Cauchy escribe las ecuaciones de equilibrio de *cada punto;* Lamé y otros autores escriben las ecuaciones de equilibrio de un *paralelepípedo* artificial é hipotético, que rodea á cada punto y lo contiene.

Pero esto ya lo hemos indicado muchas veces. Sigamos nuestro resumen.

***

Establecidos los dos principios fundamentales, dijimos que el método se descomponía en cuatro partes ó estudios parciales:

1.° Estudio de las tensiones. El resultado que obtuvimos fué, que todas las tensiones, alrededor de cada punto, y en cualquier dirección, se expresaban en función de seis tensiones fundamentales, que llamábamos N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, y, naturalmente, de los cosenos directores del plano elástico de que se trate.

2.° Estudio de las deformaciones, y llegamos á este resultado, análogo al del anterior: Que alrededor de cada punto, las deformaciones, ó, mejor dicho, las magnitudes de las deformaciones, dependen de seis cantidades fundamentales, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3.

3.° Expresión de las tensiones en función de las deformaciones, y obtuvimos, en efecto, seis ecuaciones que nos daban las N y T, en función de las a, b.

4.° Equilibrio, ya en el interior de un sólido elástico, ya sobre la superficie, si no es indefinido, para cualquier punto. Hemos obtenido, precisamente en esta conferencia, los dos grupos de ecuaciones (I) y (II), que enlazan las tensiones con las fuerzas exteriores: ya con las que actúan sobre los diferentes puntos del cuerpo, que llamábamos X, Y, Z; ya con las fuerzas que actúan sobre la superficie, que llamábamos P para un punto cualquiera, y que, en general, serán oblicuas á la superficie. Su magnitud y su dirección dependerán de las coordenadas x, y, z del punto á que está aplicada.

***

Podríamos dar por terminado este punto y pasar desde luego á la determinación de las ecuaciones finales del problema de la Elasticidad. Pero dejaremos esto para la conferencia inmediata, y en la de hoy, á manera de ejercicio, haremos una comprobación de las ecuaciones, que hemos obtenido para expresar el equilibrio.

En rigor, si para cada elemento del sólido hemos hallado condiciones de equilibrio, y éstas se aplican á todos los puntos del sistema, es claro que cualquier porción finita de éste se hallará en equilibrio también.

Es un axioma, en efecto, que el sistema compuesto de muchos sistemas en equilibrio, en equilibrio se halla.

Pero, de todas maneras, aun en Matemáticas, con ser la Ciencia de la exactitud, las comprobaciones satisfacen, son en cierto modo una garantía, de que en el curso de los cálculos no se ha cometido ningún error: es algo del método experimental. Y en la Física matemática, no en todos los casos, y, por decirlo así, de primera intención, se verifican estas comprobaciones, como, por ejemplo, se prueba algunas veces en la magnífica obra sobre electricidad y magnetismo de Mr. Poincaré.

Vamos, pues, á demostrar, que las tres ecuaciones fundamentales

$$\frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}+\rho X=0,$$

$$\frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}+\rho Y=0,$$

$$\frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}+\rho Z=0,$$

verificadas para todos los puntos del interior del sólido, *expresan, asimismo, el equilibrio de una parte finita de él;* es

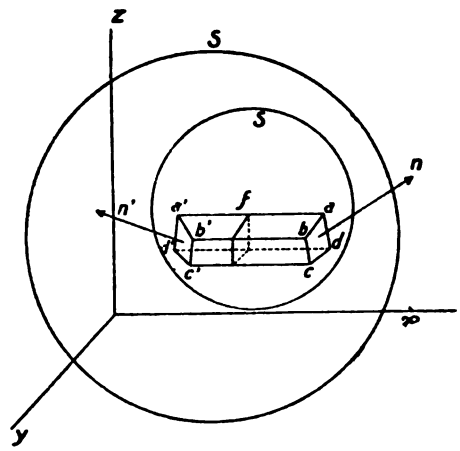


Figura 47.

decir, que para esta porción finita, considerada como rígida, se verifican las seis ecuaciones de equilibrio de la Mecánica racional: las tres componentes de las fuerzas paralelas á los ejes, resultarán iguales á cero, y los tres momentos ó los tres pares con relación á dichos ejes, serán iguales á cero también.

Sea S (fig. 47) un sólido elástico, y s una porción interior del mismo completamente arbitraria.

Nos proponemos demostrar, que todas las tensiones que se ejercen sobre la superficie s se hacen equilibrio con las fuerzas interiores á s.

Busquemos las componentes paralelas al eje de las x, y demostremos que esta suma es igual á cero. Lo que digamos para esta componente podríamos repetir para las otras dos.

Tomemos para ello la primera de las tres ecuaciones, que era precisamente la que se refería á dicho eje de las x. Multipliquemos por $dx.dy.dz$, que es el factor por el cual dividimos la ecuación de la cual procede ésta, y sumemos todas las ecuaciones de esta clase en el interior del espacio s, que es sumar, como antes decíamos, sistemas en equilibrio.

En rigor, esta suma es una integral triple, extendida á todo el sólido s.

Representando abreviadamente la integral triple por

$$\int_{(3)} = \int\int\int,$$

tendremos

$$\int_{(3)} \frac{dN_1}{dx} dx\, dy\, dz + \int_{(3)} \frac{dT_3}{dy} dx\, dy\, dz +$$
$$+ \int_{(3)} \frac{dT_2}{dz} dx\, dy\, dz + \int_{(3)} \rho\, X\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Consideremos la primera de estas integrales, y lo que de ella digamos, podremos luego repetir para las otras dos.

La integral

$$\int_{(3)} \frac{dN_1}{dx} dx\, dy\, dz,$$

puede ponerse bajo esta forma,

$$\int\int dy\, dz \int \frac{dN_1}{dx} dx.$$

Pero la parte que está bajo la última integral puede integrarse desde luego, y la integral indefinida será N_1.

Si suponemos que el filete f (fig. 47), paralelo al eje de las x, encuentra á éste según dos cuadriláteros, $abcd$, $a'b'c'd'$, y representamos el valor de N_1, para el primero por N'_1 y para el último por N''_1, dicha integral tendrá esta forma, considerando los dos límites y restando:

$$\int\int dy\, dz\, (N'_1 - N''_1).$$

En rigor, no hemos hecho otra cosa que sumar todos los paralelepípedos infinitamente pequeños, comprendidos en dicho filete, desde un extremo de la superficie al otro, y es claro que la sección recta del expresado filete será constantemente $dx.dy$.

Las secciones extremas $abcd$, $a'b'c'd'$ las representaremos para abreviar por A, A', y evidentemente, ambas secciones se proyectarán paralelamente al plano de las yz según el rectángulo $dx\,.\,dy$.

Si representamos por α, β, γ los cosenos directores de la normal n á la superficie s en un punto del área A; y por α', β', γ', los de la normal n' á dicha superficie en un punto de A'; y si además contamos hacia el exterior el sentido positivo de dichas normales, tendremos evidentemente,

$$dx\, dy = A\alpha,$$

y también

$$dx\, dy = -A'\alpha'.$$

Con lo cual, la integral que estamos considerando, se convertirá en

$$\int\int dx\, dy\, (N'_1 - N''_1) = \int\int A\alpha N'_1 + \int\int A'\alpha' N'_1.$$

Pero esto equivale á hacer la suma para todos los puntos de la superficie del elemento diferencial constante

$$A \alpha N_1$$

en que A es un área infinitamente pequeña de la superficie s. De suerte que el primer término podrá substituirse por

$$\int_{(2)} A \alpha N_1 .$$

Esta integral es doble y se extiende á todos los elementos infinitamente pequeños de la superficie; A es uno de estos elementos infinitamente pequeños; α es el coseno del ángulo que forma n con el eje de las x, contando siempre la parte positiva de n hacia lo exterior, y N es la componente paralela al eje de las x para ese punto, y no olvidemos que representa la acción de la parte de la derecha del sólido sobre la parte de la izquierda.

A este propósito, debemos hacer una aclaración, que es evidente, pero que así y todo, no estará de más.

Para el área A, por ejemplo, N representa la acción de la parte que está fuera del sólido s sobre el interior; el coseno α suponemos que es positivo, de modo que tendremos, en efecto, una tensión producida por la parte exterior á s sobre dicho sólido.

Por el contrario, en la cara A', N continuará representando la acción de la parte de la derecha sobre la izquierda, es decir, del sólido sobre la parte exterior; pero como α es negativa en este punto, según muestra la dirección de la normal n', habrá que cambiar la dirección de N, y tendremos, como antes, la acción de la parte exterior sobre la interior.

Que es precisamente lo que nos interesa para nuestra demostración: calcular las tensiones de la parte que rodea al sólido s, sobre dicho sólido.

Lo que hemos expuesto para el primer término, podemos repetir para el segundo

$$\int_{(3)} \frac{dT_3}{dy} dx\, dy\, dz.$$

Este se puede poner bajo la forma:

$$\int\int dx\, dz \int \frac{dT_3}{dy} dy,$$

é integrando la primera integral, que en rigor es sumar todos los elementos de un filete rectangular de sección $dx \,.\, dz$ perpendicular al eje de las y, y representando por T'_3 y T''_3 los valores de T_3 en los dos puntos en que suponemos que el filete encuentra á la superficie S, tendremos

$$\int_{(3)} \frac{dT_3}{dy} dx\, dy\, dz = \int_{(2)} dx\, dz\, (T'_3 - T''_3).$$

Representando por B y B' las dos áreas que el filete determina en la superficie s; como siempre, por α, β, γ, y α', β', γ' los cosenos directores de las dos normales á B y B'; y contando la parte positiva de estas normales hacia lo exterior, resultará

$$dx\, dz = B'\beta$$

y también

$$dx\, dz = -B'\beta',$$

y, por lo tanto,

$$\int_{(3)} \frac{dT_3}{dy} dx\, dy\, dz = \int_{(2)} (B\beta T'_3 + B'\beta' T''_3).$$

Por consideraciones análogas á las que hicimos hace un momento, vemos que estas dos integrales pueden expresarse por una sola que se extienda á toda la superficie; en efecto,

ambas integrales no hacen más que completarse, refiriéndose una al punto de entrada de los filetes, y otra al punto de salida. Esta integral única será

$$\int_{(2)} B T_3 \beta.$$

Repitiendo los anteriores razonamientos para la tercera integral,

$$\int_{(3)} \frac{dT_2}{dz} dx\, dy\, dz,$$

se transformará en la siguiente:

$$\int_{(2)} C T_2 \gamma.$$

Por último, la integral

$$\int_{(3)} \rho X dx\, dy\, dz,$$

representando por dm la masa infinitamente pequeña de un elemento de volumen, puede también escribirse de este modo:

$$\int_{(3)} dm \,.\, X.$$

Con lo cual, la ecuación que vamos transformando, se convierte en esta nueva ecuación:

$$\int_{(2)} A \alpha N_1 + \int_{(2)} B \beta T_3 + \int_{(2)} C \gamma T_2 + \int_{(3)} dm \,.\, X = 0.$$

Las tres primeras integrales se refieren á la superficie s; luego pueden substituirse por una integral única, compren-

diendo todos los puntos de dicha superficie, y agrupando los términos para cada punto, las tres cantidades A, B, C se reducirán á una, á saber: *el elemento infinitamente pequeño de área* en el punto que consideramos: representándolo por ds resultará por fin:

$$\int_{(2)} (N_1 \alpha + T_3 \beta + T_2 \gamma)\, ds + \int_{(3)} dm X = 0.$$

Si recordamos las fórmulas de una conferencia anterior, y aun de esta misma conferencia, en que determinábamos las componentes de las tensiones sobre un elemento cuyos cosenos directores eran α, β, γ, veremos que el paréntesis de la primera integral no es otra cosa que la componente de dicha tensión paralela al eje de las x, por unidad de superficie, sobre el elemento de ds cuyos cosenos directores son precisamente α, β, γ.

Luego resulta que el primer término representa la suma de todas las componentes paralelas al eje de las x, de las tensiones que actúan sobre la superficie s; y que el segundo término representa asimismo la suma de todas las componentes paralelas á dicho eje para las fuerzas, que actúan en los diferentes elementos de la porción del cuerpo elástico que limita s.

Es decir, que la suma de todas las componentes paralelas al eje de las x para la porción s, que estamos considerando, es igual á cero.

Lo mismo podríamos demostrar para las componentes paralelas al eje de las y, y para las componentes paralelas al eje de las z.

Las tres primeras ecuaciones de equilibrio de una porción cualquiera del sólido elástico quedan, pues, satisfechas.

***

Pasemos, pues, á las ecuaciones de los momentos, partiendo siempre de las tres ecuaciones de equilibrio

$$\frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}+\rho X=0,$$
$$\frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}+\rho Y=0,$$
$$\frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}+\rho Z=0.$$

Multipliquemos la segunda de las ecuaciones por z, la tercera por y, y restemos: resultará,

$$z\left[\frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}\right]-y\left[\frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}\right]+$$
$$+\rho(Yz-Zy)=0,$$

y agregando y restando T_1 bajo esta forma

$$+T_1\frac{dz}{dz}-T_1\frac{dy}{dy},$$

tendremos:

$$\left(z\frac{dT_3}{dx}+z\frac{dN_2}{dy}+z\frac{dT_1}{dz}+T_1\frac{dz}{dz}\right)-$$
$$-\left(y\frac{dT_2}{dx}+y\frac{dT_1}{dy}+T_1\frac{dy}{dy}+y\frac{dN_3}{dz}\right)+\rho(Yz-Zy)=0.$$

Ahora bien, como x, y, z son variables independientes, podemos pasarlas bajo el signo diferencial, cuando la diferenciacion sea respecto á otra variable. Así, por ejemplo, podremos escribir $z\frac{dT_3}{dx}$ bajo la forma $\frac{dT_3 z}{dx}$.

Además,

$$z\frac{dT_1}{dz}+T_1\frac{dz}{dz}=\frac{dT_1 z}{dz} \quad \text{y} \quad y\frac{dT_1}{dy}+T_1\frac{dy}{dy}=\frac{dT_1 y}{dy}$$

De modo que la ecuación anterior puede escribirse como sigue:

$$\left(\frac{dT_3z}{dx}+\frac{dN_2z}{dy}+\frac{dT_1z}{dz}\right)-\left(\frac{dT_2y}{dx}+\frac{dT_1y}{dy}+\frac{dN_3y}{dz}\right)+$$
$$+\rho\,(Yz-Zy)=0,$$

ó reuniendo los coeficientes diferenciales que se refieran á la misma variable,

$$\frac{d(T_3z-T_2y)}{dx}+\frac{d(N_2z-T_1y)}{dy}+\frac{d(T_1z-N_3y)}{dz}+$$
$$+\rho\,(Yz-Zy)=0.$$

Multiplicando por $dx\,.\,dy\,.\,dz$ é integrando en toda la extensión de la parte de sólido que consideramos, contenida en la superficie s, tendremos:

$$\int_{(3)}\frac{d(T_3z-T_2y)}{dx}\,dxdydz+\int_{(3)}\frac{d(N_2z-T_1y)}{dy}\,dxdydz+$$
$$+\int_{(3)}\frac{d(T_1z-N_3y)}{dz}\,dxdydz+\int_{(3)}\rho(Yz-Zy)\,dxdydz=0.$$

El resto del cálculo es exactamente el mismo que el que hicimos para las componentes paralelas á los ejes. Así, en el primer término, se puede hacer la integración respecto á x; en el segundo, respecto á y; en el tercero, respecto á z. Después se pueden introducir los cosenos α, β, γ en cada uno de los filetes de la integración.

Baste copiar el resultado que allí obtuvimos substituyendo á N_1, T_3, T_2 los binomios

$$(T_3z-T_2y),\ (N_2z-T_1y),\ (T_1z-N_3y),$$

y tendremos:

$$\int_{(2)} \left[(T_3 z - T_2 y)\alpha + (N_2 z - y T_1)\beta + (T_1 z - N_3 y)\gamma \right] ds +$$
$$+ \int_{(3)} \rho \, dx \, dy \, dz \, (z Y - y Z) = 0,$$

ó bien

$$\int_{(2)} \left[z(T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma) - y(T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma) \right] ds +$$
$$+ \int_{(3)} dm \, (Yz - Zy) = 0.$$

Pero $(T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma)ds$ es la componente paralela al eje de las y de la fuerza que actúa sobre el elemento ds, y multiplicada por z es el momento con relación al eje de las x de dicho componente.

Asimismo, $(T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma)ds$ es la componente paralela al eje de las z de la fuerza que actúa sobre dicho elemento ds, multiplicada por y dará el momento con relación al eje de las x. Y como la integral es doble y se refiere á toda la superficie s, claro es que representará el momento con relación al eje de las x de todas las tensiones que actúan sobre dicha superficie s.

Pero la última integral triple representa el momento con relación á este eje de las x de las fuerzas que actúan sobre los diferentes elementos del sólido; luego resulta comprobado que los momentos con relación al eje de las x de todas las fuerzas, dan un resultado igual á cero.

Como lo mismo podríamos repetir respecto á los otros dos ejes, resultan asimismo comprobadas las tres últimas ecuaciones de equilibrio.

La demostración que precede está tomada, con pequeñas variantes, de la obra de Mr. Lamé, que hemos citado varias veces, sobre elasticidad de los cuerpos sólidos.

XLV.—Mareómetros y Mareógrafos de Sifón.

POR EDUARDO MIER Y MIURA.

29. — Ventajas de los mareómetros y mareógrafos de sifón.

Por más que toda comparación esté reputada de odiosa, y á más de serlo resulte poco modesta cuando uno de los términos que en ella han de figurar sea en cierto modo propio, cual en este caso nuestro sucede, no hay más medio que dejar escrúpulos á un lado y exponer claramente los defectos de los mareógrafos conocidos, que al no existir en los propuestos ó al aparecer en ellos algo atenuados, hacen resaltar implícitamente las ventajas de los últimos.

Obligados á ello, expongamos una crítica desapasionada de los aparatos más empleados en el estudio del nivel del mar, haciendo aparecer primeramente las ventajas técnicas de los nuevos aparatos y más tarde las económicas.

Por lo general, los mareógrafos quieren indicar el nivel que el agua tiene en pozos que comunican con el mar, por tubos más ó menos largos y anchos, y desde luego cabe preguntar si ese nivel es ó no el que las aguas tienen fuera.

Desde luego, las alturas que las aguas tengan sobre la boca exterior del mencionado tubo, como quiera que por dificultades técnicas y económicas el tal tubo no puede ser muy largo, serán las que el líquido toma precisamente en las orillas, las cuales, como es sabido, difieren de las que en el mar libre existen, influyendo en ello de poderoso modo la configuración de las costas.

Este defecto puede hacerse desaparecer por completo con los mareógrafos de sifón eléctricos, instalando la estación receptora en un pilote hincado en cualquier bajo y sufi-

cientemente alejado de la costa, y puede atenuarse mucho, aun instalando los mareómetros y mareógrafos en la misma orilla, usando el tubo de plomo suficientemente largo; ya que el escaso diámetro y precio de éste, y la pequeñísima cantidad de agua que por él ha de circular, así lo consienten.

Por el tubo de los mareógrafos ordinarios han de correr grandes cantidades de agua, que prontamente llenen y vacien el pozo, si es que el nivel de éste ha de ser igual próximamente al de las aguas exteriores, y de aquí nace la necesidad de emplear grandes y costosos tubos de fundición, y la de mantener su interior constantemente limpio. Por el tubo de los mareómetros y mareógrafos de sifón han de pasar cantidades insignificantes de líquido, y aun suponiendo que el diámetro del tubo de plomo empleado fuera el mismo que el de cristal en que oscila el mercurio, para estar los mareógrafos ordinarios en iguales condiciones de sensibilidad, fuera necesario que los tubos de fundición tuviesen nada menos que una sección 13 ó 14 veces mayor que la del pozo, aun en los casos más desfavorables.

En sí entraña esta ventaja otra no despreciable por ser de escasa influencia en los nuevos aparatos la obturación parcial de los tubos de conducción, mientras que la tiene grande en los ordinarios.

La facilidad con que los tubos de los mareógrafos ordinarios se obturan, que en general no consiente asignarles una vida, en medianas condiciones, superior á cuatro ó cinco años, implica crecidos y frecuentes gastos, que la reposición de esos grandes tubos exige (en el mareógrafo de Cádiz cuesta unas 7.000 pesetas esa renovación), al paso que cambiar un tubo delgado de plomo por otro nuevo, ni presenta dificultad alguna ni acarrea grandes gastos, ya que en unas horas y con unas cuantas pesetas puede hacerse la substitución deseada.

Exige la igualdad de niveles entre las aguas de los pozos de los actuales mareógrafos y las del mar, que la densidad

mediá de unas y otras sea exactamente la misma, y como la de estas últimas cambia con relativa frecuencia y el pozo y el mar no son más que dos vasos comunicantes por un tubo relativamente estrecho, ni inmediatamente se restablece el equilibrio de densidades ni deja de sumarse este error, aunque pequeño, con los anteriormente anunciados.

En los nuevos aparatos este error es casi nulo, gracias á la facilidad de comunicación que hay entre las aguas del exterior y las que contiene el tubo del aparato.

Acerca de estos cambios de densidades en las aguas del mar, así como de su temperatura, no conocemos ningún estudio completo, y sólo desde hace unos meses se ha comenzado á efectuar en Santander, encontrándose una variación máxima, desde 1.º de Septiembre de 1894 á fines de Abril de 1895, de $2^{d},0$ á 3,1 del salinómetro, y oscilando las temperaturas de las aguas superficiales desde $20^{g},2$ hasta $9^{g},1$, en igual período de tiempo.

Otra causa de error, que en los mareógrafos ordinarios existe, proviene del cambio de forma y de peso que el flotante experimenta con el transcurso del tiempo; alteraciones ambas que, tendiendo al mismo fin, pueden producir indicaciones erróneas en los niveles registrados, ya que tanto el aumento de peso que las incrustaciones producen, cuanto las abolladuras que el flotante sufre, aunan sus esfuerzos para dejarle más sumergido de lo que debiera estar.

Verdad es que ese inconveniente puede evitarse con una asidua inspección; pero también es cierto que, habiendo de sacar continuamente el flotante para verificarla, no sólo se habrían de interrumpir frecuentemente los trazados mareográficos, sino que se aumentaría la posibilidad de que por resbalamientos inadvertidos en la cadena resultaran aquéllos notablemente falseados.

Esos peligros, ó no existen del todo en los mareógrafos propuestos ó aparecen tan atenuados en alguno de ellos, que desde luego pueden despreciarse. Aun en el mareó-

grafo de flotante de hierro macizo, se tiene constantemente bajo la vista todo el mecanismo mientras está funcionando, y no son de temer abolladuras ni adherencias de importancia.

Además, en otra parte de este trabajo hemos hablado de los errores por temperatura y por alargamiento de la cadena bajo los esfuerzos mecánicos, á los que habían de añadirse los de colocación del papel y los que en sí lleva el movimiento lateral de los usuales lápices trazadores, y no hemos de repetir razonamientos ya escritos, en los que probamos que los nuevos aparatos se prestan á introducir correcciones sencillas, que les convierten en instrumentos de observación muy precisos, libres de la mayor parte de las causas de error que hemos enumerado.

La profundidad que las aguas alcancen ya hemos demostrado que no es obstáculo que al uso de los nuevos aparatos se oponga; el temor de que la peculiar índole de éstos impida su empleo en las costas en que descienda mucho la temperatura, al menos en las situadas entre los paralelos en que es lógico que se instalen, tampoco debe existir, porque en contra de lo que á primera vista pudiera creerse, no llegan á congelarse los líquidos que llenan la parte superior del aparato, aun cuando la temperatura del aire sea bastante inferior á 0 grados.

El punto de solidificación del mercurio es — 39°,5; los de otros líquidos, tales como el aceite y el alcohol, con los que pudieran llenarse la rama descendente de los mareógrafos de sifón, son á temperaturas también bajas (alcohol, —90°; aceite de lino, —20°; aceite de ricino, —18°, etc., etc.); de modo que debe desecharse en absoluto la creencia de que la solidificación de los líquidos haga imposible en ciertos casos el uso de los mareógrafos propuestos; pero aun empleando nada más que mercurio y agua de mar, al menos en las costas de España, no hay cuidado de que la congelación de esta última, que se verifica á —2°,5, impida su uso.

Experimentos hechos por nosotros así nos permiten asegurarlo y la explicación del fenómeno no es difícil, ciertamente, aun suponiendo que se trate del agua destilada, que se congela cerca de 3 grados antes que la del mar.

Recordemos que, según Rossetti, á 0° tiene el agua una densidad de 0,999871, que va aumentando con la temperatura hasta llegar á 1 á los 4°, y que desde aquí vuelve á disminuir valiendo 0,999990 á los 5°, y 0,999824 á los 9°, y recordemos también que en las costas del Cantábrico, aun en inviernos de excepcional crudeza, no descendieron de esta temperatura las aguas superficiales.

Como el tubo del mareógrafo, que va á sumergirse en el agua, contendrá siempre en su parte inferior este líquido, relativamente caliente, cuando descienda la temperatura de su parte superior, aumentando la densidad del agua, se establecerán á lo largo de aquella rama dos corrientes: una, que asciende, de agua caliente, y otra, que de la parte superior baja, de agua fría, y estas corrientes circulatorias, tanto más intensas cuanto mayor sea la diferencia de temperaturas, impedirán, dentro de muy amplios límites, el enfriamiento del agua, manteniendo la parte superior del tubo á una temperatura relativamente alta. Acontece, por lo tanto, en este tubo lo que en cualquier vasija que por su parte inferior se calienta.

En cuanto á la otra rama del tubo que contiene en parte agua y en el resto mercurio, el fenómeno que se verifica es en su esencia análogo al descripto: la columna de agua está calentada por su parte superior y enfriada principalmente por abajo, y en virtud de esta diferencia de temperaturas, deberá establecerse una corriente circulatoria en ciertos casos.

Enfriándose continuamente la columna de agua de esa otra rama del tubo, cuando la parte inferior descienda de 4°, sus moléculas subirán, al paso que las superiores de mayor peso caerán á ocupar el lugar que éstas dejan, y aun cuando ascendieran ligeros copos de hielo, quedarían liquidados por el

agua relativamente caliente que en las partes más altas encuentren.

Claro es que, en condiciones excepcionales, tan grande puede ser el descenso de temperatura, que esas corrientes circulatorias no basten para compensar su efecto; pero felizmente, en nuestras costas no son de temer temperaturas excesivamente bajas y sostenidas, y en puntos en que su presencia fuera frecuente, puede recurrirse al empleo de otros líquidos distintos del agua, sin que por esto resulte alterado el modo de ser de los mareógrafos propuestos.

Pudiera creerse que, en este examen que hacemos de los errores inherentes á los mareógrafos ordinarios, había algún apasionamiento en favor de los que proponemos, y para desvanecer esta sospecha, nada encontramos preferible á copiar lo que acerca de ese punto se dice en las publicaciones del Instituto Geográfico por el Sr. Cabello.

Así se expresa en el tomo I de las «Memorias del Instituto Geográfico y Estadístico», en su pág. 892, al referir las experiencias hechas en Madrid, en la primavera de 1873, con el mareógrafo de Mr. Adie, que luego se instaló en Alicante.

«Después (de determinar la escala) se hizo oscilar alternativamente el nivel del líquido entre dos puntos de la escala; anotando el camino recorrido por el lápiz en distintas posiciones del flotador y de repetidas pruebas se adquirió la seguridad de que, al cambiar el sentido del movimiento, existía una parte de la variación del nivel que no era acusada por el lápiz, porque el trozo de cadena comprendido directamente entre el flotador y la polea no estaba tendido al subir el flotador. Este retardo en las indicaciones del lápiz, originado por la inercia del aparato, es de igual magnitud en ambos sentidos y se apreció en $0^m,008$ de diferencia de nivel, circunstancia que no obsta para la buena aplicación del mareógrafo, y sólo en el caso de que se quiera obtener en absoluto las alturas del nivel en determinados momentos, habría

que referir los puntos de la curva á uno de los dos casos de subida ó bajada, por medio de la corrección $\pm 0^m,008$.»

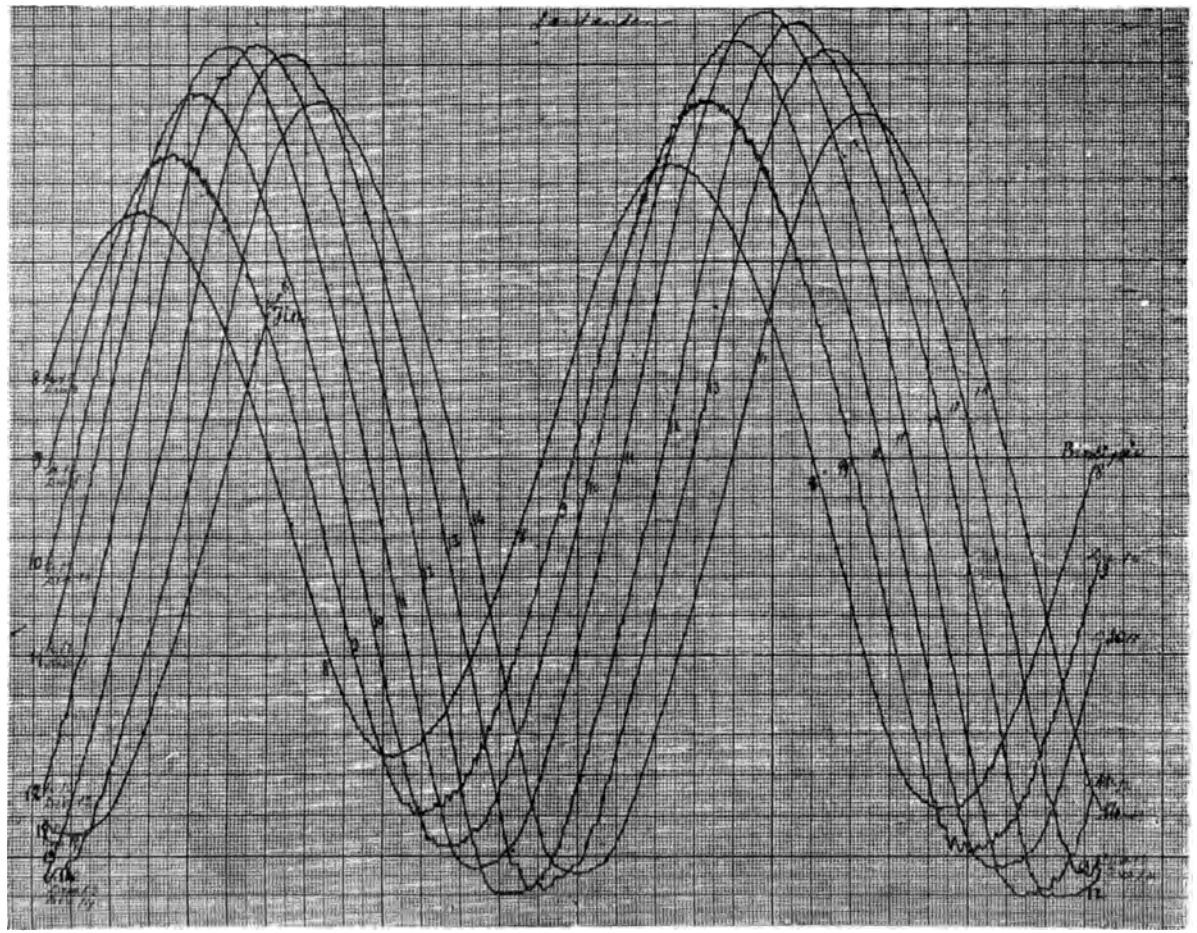
Tres años después que ese mareógrafo se instaló y estudió el de Santander, acerca del cual estudio se dice en la página 615, del tomo IV de las referidas «Memorias», lo que sigue:

«Se procedió después á determinar el error que se había notado al cambiar de dirección el movimiento del flotador, para la que se hizo sensible el movimiento del lápiz; entonces se cambió el movimiento del agua cerrando la llave de desagüe, y abriendo la otra, se vió que, cuando el nivel había variado $0^m,2$, el lápiz había recorrido solamente $0^m,033$; se cambió la dirección del movimiento, y resultó lo mismo cuantas veces se repitió la operación en uno ú otro sentido; que en los primeros momentos del cambio de dirección, por $0^m,2$ de desnivel, el lápiz no recorría más que $0^m,033$, es decir, que el lápiz recorría 6^{mm} menos que en el resto de su movimiento, produciendo, por consiguiente, una curva cuyos vértices están achaflanados y con 6^{mm} menos en la longitud de sus trozos salientes, dando un error de $0^m,031$ en todos los cambios de movimiento, y que será preciso tener en cuenta en los cálculos.»

En frente de estos efectos de la inercia y de la adherencia entre las superficies de rozamiento, que tan sensibles efectos producen en los mareógrafos ordinarios, aparece la extremada sensibilidad de los nuevos aparatos, experimentablemente comprobada (*), en los que sólo juegan movimientos pequeños de líquidos, con rozamientos casi nulos y cambios de situación de piezas ligerísimas y poco voluminosas, que dan al conjunto todas las condiciones que requieren los aparatos de precisión.

(*) Como muestra de las curvas registradas por los mareógrafos de sifón, incluímos la reproducción fotográfica de las obtenidas durante siete días consecutivos con uno de los aparatos de ese género instalados en Santander.

Mareógrafo sistema Mixt Instalado en la caseta de pasajeros del Muelle de Santander.



Y si estas ventajas técnicas, que seguramente nadie desconocerá, no aconsejaran la substitución de los antiguos mareógrafos por los nuevos, y dando, además, por supuesto que todos esos errores se suman y restan de tan caprichoso modo que su influencia final en el nivel medio observado pudiera despreciarse, se conviniera en que tan evidente superioridad no era decisiva, que si lo es en concepto nuestro, todavía quedarían tan por encima las condiciones económicas de los mareógrafos de sifón, que no parece lógico dejar de concederles alguna preferencia.

En apoyo de este último aserto, referente á las condiciones económicas de los nuevos mareógrafos, indicaremos que mientras que los de Reitz, Adie y otros modelos análogos exigen la construcción de un edificio especial, relativamente costoso, como la mayor parte de los levantados á orillas del mar, con pozo y cañería de gran diámetro, los de sifón pueden instalarse, á distancia relativamente grande de las aguas, en un rincón de cualquiera de los edificios ya existentes, ó en último extremo, en una caseta de pequeñas dimensiones.

Si á tal circunstancia se agrega la de ser los nuevos mareógrafos de precio mucho menos elevado, no extrañará que el establecimiento de estaciones mareográficas con esos aparatos resulte treinta ó cuarenta veces menos costoso que el de las que utilizan mareógrafos de Adie ó de Reitz.

Además, cuando se usan estos últimos aparatos son frecuentes las obturaciones de la cañería que pone en comunicación el pozo, en que se halle el flotante, con las aguas del mar, y llega á ser tal el estado del interior de esas tuberías, en el que se forman voluminosas incrustaciones, que es preciso renovarlas, á costa del mucho trabajo y del cuantioso gasto que generalmente suponen todas las obras que se han de realizar luchando con el mar. En cambio, la obturación de la cañería de los mareógrafos de sifón, aun en el caso de tener que reponer esta última, se reduce á substituir unos cuantos metros de tubo delgado de plomo, operación que fácil-

mente, y con gasto despreciable, puede hacerse en breve tiempo, no siendo de extrañar, por lo tanto, que los gastos de entretenimiento de estos nuevos mareógrafos sean también muy inferiores á los exigidos por los antiguos.

Precisamente á estas razones de orden económico se debe que el autor ideara, muchos años hace, las disposiciones anteriormente descriptas, porque no había medio de conciliar la necesidad de aumentar el número de estaciones mareográficas de nuestro país con los escasos recursos de que disponemos, y creyó cumplir con su deber, como Jefe de los estudios mareógrafos del Instituto Geográfico, indicando la solución que podría adoptarse para armonizar el deseo de que desempeñáramos decoroso papel, por el número y calidad de nuestras estaciones mareográficas, con la imposibilidad de dedicar para satisfacerle cantidades relativamente crecidas.

Y buena prueba de que ese interés era el único que guiaba al autor, se hallará en el hecho de que este modesto estudio se elevó á manos de la superioridad hace más de trece años, después de algunos otros dedicados á efectuar estudios experimentales de los nuevos aparatos, y que seguramente no hubiera visto la luz pública sin los persistentes requerimientos de varias personas, que así lo solicitaron, obligando, con su cariñoso empeño, á sacar de la obscuridad lo que acaso debiera haber continuado en ella, para bien de todos.

XLVI. — Estudio comparativo de los instrumentos más usados en Sismología.

POR MANUEL-M.ª S. NAVARRO (S. J.)

Hasta ahora sólo ha construído dos ejemplares: uno de 100 kilogramos y 85 veces de aumento, cuya masa es un bloque de arenisca y está provisto de apagamiento de aire (*), y el otro de 375 kilogramos con 120 de aumento y apagamiento de aceite de vaselina, destinados, por acuerdo de la Comisión permanente, en el reciente Congreso Sismológico del Haya, el primero á la Universidad de San José de Beyrut (Siria), bajo el cuidado del P. B. Berloty, S. J., y el segundo á Reijkavik (Islandia).

En ambos modelos, de los que á mediados de Septiembre último había ya encargados seis para otras tantas estaciones sismológicas alemanas, el mecanismo multiplicador inscriptor consiste en un segundo péndulo de cañas y otros materiales excesivamente ligeros.

Otro tipo de péndulos horizontales lo constituyen aquéllos en que las masas se hallan rígidamente unidas á los puntos de suspensión y de apoyo por medio de una robusta armazón metálica, derivándose así del péndulo fotográfico del Dr. Von Rebeur-Paschwitz, en el que nos ocuparemos más adelante.

En Mayo y Diciembre de 1896, montó el Profesor A. Cancani, en el Observatorio de Rocca di Papa (cerca de Roma), un par de colosales Von Rebeur, con 5,25 metros de distancia entre el punto de suspensión y el de apoyo, y 2,70 metros entre la línea que une ambos y el centro de la masa, sim-

(*) Dr. C. Mainka, Kurze Uebersicht... Ss. 15... 20. Fig. 14... 226.

ple trozo de mármol, cuyo peso, primitivamente de 25 kilogramos (*), aumentó hasta el 60 el actual Director de aquel Observatorio Dr. G. Agamennone (**).

Su período completo suele ser de 24 á 27 segundos, é inscriben los movimientos, sin aumento alguno, con tinta de anilina sobre papel blanco ordinario.

Poco más tarde, el sacerdote florentino Profesor D. Rafaelle Stiattesi, Director-Propietario del Observatorio de Quarto di Castello, después de numerosos ensayos, construyó el péndulo que denomina *modelo mediano* (***), con 3,40 metros de distancia entre el punto de suspensión y el de apoyo, y 1,70 desde el centro de la masa á la línea que los uniese. El peso de la masa excede de 200 kilogramos y el aumento externo, producido merced á ligeras palancas tubulares de latón, terminadas en leves agujas, también huecas, de vidrio, es de unas 20 á 30 veces, con períodos variables, pero, en general, de 16 á 30 segundos.

En Florencia hay nada menos que tres pares de estos péndulos en los Observatorios de Quarto, Ximeniano y en el que tienen los P. P. Barnabitas en su Colegio della Querce, bajo la dirección del R. P. D. Camilo Melzi d'Eril. Otros están instalados en Bolonia, Moncalieri, Malvasia, Rio Janeiro y Cartuja (Granada.)

El *modelo máximo* del P. Stiattesi pesa 500 kilogramos por 50 veces de aumento externo, y su período oscilatorio práctico parece ser menor que el de los anteriores (****).

(*) *I pendoli orizzontali del R. Osser. G. di Rocca di Papa, in Boll. S. S. I,* 111 (1897), pp. 235-240.

(**) Winke .... S.

(***) *Bolletino Sismografico dell'Osservatorio di Quarto Castello.* Spoglio..... dal 1.° nov. 1899 al 30 ott. 1900, p. 7.

Idem P. Guido Alfani d. S. P., *Bolletino Sismológico dell'Oss. Ximeniano.* Anno I, f. 1.

(****) Precio del par, listo para funcionar, una vez empotrados ambos puntos de apoyo en un muro, etc., 1 200 liras construído por el mismo inventor.

Primero intentó que registrase la resultante de ambas componentes horizontales, combinando sus porciones inscriptoras (*), mas parece que ha abandonado la idea.

Al infatigable Dr. G. Agamennone se debe también un buen instrumento para registrar los terremotos sensibles al hombre, al que denomina *macrosismometrógrafo*, y que el Mayor Dutton, en su obra ya citada, no vacila en llamarlo resultado de veinte años de estudios é investigaciones (**).

Lo forman dos péndulos horizontales y uno del Profesor Ewing para la componente vertical del movimiento; agrupados los tres, constituyen un instrumento fácilmente transportable con el motor de relojería, que, al ser puesto en acción por medio de un sismoscopio, que debe ser *muy poco sensible*, ya que los demás péndulos lo son exprofeso, arrastra una banda de papel blanco ó ahumado, según se quiera obtener los gráficos con lápices ó estiletes, con la enorme velocidad de 20 metros por hora, sostenida diez minutos (***).

Aunque este instrumento pueda prestar excelentes servicios en ocasión de un terremoto destructor de epicentro no muy lejano ó de sacudidas locales siquiera del grado 5 de la escala, su empleo resulta muy limitado fuera de puntos extremadamente combatidos para los que parece más apropiado, y sobre todo, mucho más barato, á pesar de su precio nada bajo, que el de Ewing, aún usado en muchos puntos del Japón, y del que existe un precioso modelo en el Observatorio de Marina de San Fernando.

En el concurso celebrado con motivo del reciente Congreso del Haya, expuso el hábil mecánico de Roma, Luigi Fas-

---

(*) Spoglio... dal 1.° nov. 1908 al 31 Luglio 1901.

(**) *Earthquakes in the light of the new Seismology*, pp. 35-38, pl. V.

(***) *Sismometografo a tre componenti per forti terremoti in Bol. S.S. I.* VI (1900-1901), pp. 135-130 y VII (1901-1902), pp. 249-265. Precio, 550 liras; constructor, Luigi Fascianelli.

cianelli, dos sismógrafos, destinados á registrar los movimientos cercanos y no muy débiles.

Uno de ellos consta de dos péndulos horizontales del tipo Von Rebeur con masas de 50 kilogramos, períodos de unos 6 segundos y 50 veces de aumento, formando ambos péndulos, con su aparato registrador sobre papel ennegrecido y la columna de poco más de un metro que les sirve de sostén, un conjunto cuya hábil disposición honra á su inventor el ilustre Dr. Agamennone (*).

El otro, también de su invención, tiene además una componente vertical tipo Ewing, de igual peso y aumento, pero de 2ˢ tan sólo de período oscilatorio completo (**).

II

REGISTRO FOTOGRAFICO

1.—Péndulos de reflexión.

Bifiliar.—Von Rebeur.—V. Rebeur.—Ehlert.—Hecker.—Wiechert.—Bosch.—Mainka.—Péndulos de transmisión directa.—Milne.

Aunque los principales péndulos fotográficos pertenezcan á los tipos bifiliar, con los puntos de suspensión y de apoyo unidos rígidamente entre sí y con la masa, ó con suspensión filiar y punto de apoyo por medio de un estribo, resulta más práctico considerarlos desde el punto de vista de la inscripción, según que el rayo de luz que haya de impresionar el papel sensible sea reflejado ó no, hecho, como veremos, de capital importancia.

Entre los primeros se hallan: el péndulo bifiliar de los her-

---

(*) Precio, 400 liras.
(**) Idem, 600 ídem.

manos Darwin, y el rígido de Von Rebeur, con las modificaciones de Ehlert, Bosch, etc.

Un pequeño espejo cóncavo de unos 20 milímetros de diámetro, suspendido por medio de dos finísimos hilos de plata ó de seda de capullo, á dos poleitas situadas casi en la misma vertical, y ambas fijas en una robusta armazón metálica, constituyen el péndulo de Horace Darwin, cuya sensibilidad para los cambios de nivel es tal, que precisa sumergir el espejo en glicerina ú otro líquido apropiado con el objeto de que no se halle en continuo movimiento, pudiendo apreciarse una desviación de la vertical del valor de $\frac{1}{300}$ de segundo de arco, ó sea una pulgada en mil millas inglesas (*) (25,4 milímetros en 1.609 kilómetros).

Uno de estos péndulos funciona en Edimburgo (**).

El péndulo del Dr. Ernst A. L. Von Rebeur-Paschwitz, descrito en 1894 (***), consiste en una ligera armazón metálica en forma de triángulo isósceles, en cuyo vértice más agudo se halla sujeta una pesa de 42 gramos, mientras que en los otros vértices hay unas cavidades hemisféricas labradas en ágata que descansan sobre agudas puntas de acero, sujetas á un soporte y provistas de los convenientes ajustes, y éste provisto de tornillos de nivel.

Un espejo cóncavo de 4 metros de radio de curvatura y de muy pequeñas dimensiones, se halla sujeto al centro de la base del mencionado triángulo, mientras que otro lo está al soporte, con el objeto de dar una línea fija de referencia.

Todo el instrumento se halla construído con gran delicadeza, siendo su aumento externo de 100 veces y su período doble de hasta cincuenta segundos, y de ello proviene su extremada sensibilidad.

(*) Dutton, op., cit., p. 117.

(**) Lo construye por 45 £ la «Cambridge Scientific Instrument C° Ltd.» Su aparato registrador cuesta 35 £ más.

(***) *Nova acta acad. Caes. Leopold. Bd. 60 SS.* 1-216.

La luz de una lámpara, provista de estrecha rendija vertical, situada cerca del cilindro registrador, va á reflejarse en ambos espejos, que la vuelven al citado cilindro, después de haber pasado al través de una gran lente cilíndrica que transforma la línea brillante indicada en un punto luminoso, que impresiona al papel sensible arrollado en el cilindro, dejando marcada, previo desarrollo, etc., una línea obscura, recta si los espejos están inmóviles, más ó menos accidentada si uno de ellos, el fijo al péndulo, al agitarse desviase el rayo luminoso.

Montáronse de estos instrumentos en Willehmshaven, Potsdam, Estraburgo, Orotava, Charcow y Nikolajew con velocidades sólo de un centímetro, la mayoría por hora.

El fallecimiento del Dr. Von Rebeur, acaecido apenas cumplidos los treinta y cuatro años (*), atajó su brillante carrera científica, no permitiéndole alcanzar todo el fruto de su valioso invento, aunque ya obtuviera resultados sobremanera notables.

El Dr. Reinhold Ehlert introdujo algunas mejoras en el péndulo de Von Rebeur (**), disminuyendo su período oscilatorio habitual hasta doce segundos, á la vez que elevaba á 75 gramos el peso de la masa, y modificando otras piezas, de manera que si disminuyó en algo su prodigiosa sensibilidad para los cambios de nivel, lo hizo, en cambio, más apropiado todavía para el estudio gráfico de los sismos. También aumentó la velocidad de traslación del papel sensibilizado á cuatro centímetros por hora, y hasta á doce, con lo que es más fácil determinar el tiempo, aproximando hasta de cinco segundos, en el último caso.

Ultimamente, adoptando los mismos principios teóricos del

(*) Adolfo Cancani: *E. v. Rebeur in Bol. S. S. Ital. I* (1895), página 136.

(**) *Das dreifache Horizontalpendel in Beitrage zur Geophysik, III Bd. 3 H ft. S. S*, 480-484.

Profesor Grablovitz, asoció en cada instrumento tres péndulos, formando entre sí ángulos de 120°, en vez de los 60° de los de éste, lo que viene á ser lo mismo, aunque los resultados obtenidos para la determinación del punto originario del movimiento no han correspondido á lo que se esperaba, y así cuantos poseen el aparato triple usan uno ó dos de los péndulos, ó si emplean los tres suele ser uno con gran amortiguamiento, el segundo y el tercero sin él, y con períodos cortos, de cuatro á siete segundos, dos de ellos, y más largo, de diez á doce, el tercero (*).

Existían en 1901 péndulos Rebeur-Ehlert en Estrasburgo, Hamburgo, Bruselas, Quenast y L'Agrappe (Bélgica), Trieste, Kremsmünster, Lemberg, Jurjew, Moskow, Tiflis, Taschkent, Irkust, Batavia y Río Janeiro (**).

En otra modificación del péndulo Von Rebeur, que funciona en Potsdam, debida al Profesor Hecker, según las fotografías que debemos á la amabilidad de su constructor, el mecánico del Instituto geodético de dicha ciudad, Herr Fechner, el mismo espejo sirve de masa y el péndulo puede tener ó no aparato de amortiguamiento, resultando una pieza de tan esmerada construcción que por sí sola bastaría para acreditar los talleres de donde proviene (***).

La casa Bosch, de Estrasburgo, ya citada en distintas ocasiones, ha aplicado el espejo reflector á un péndulo horizontal con masa de 200 gramos, estribo de seis centímetros de longitud, y suspensión, por medio de hilos de seda, á 18

(*) La casa Bosch construye hoy estos péndulos separados; cada componente vale 375 Mks. y 360 el cilindro registrador utilizable para dos. La lámpara cuesta 70-80 Mks. v. s. Katalog Nr. 20.

Esta es la combinación empleada en las estaciones austriacas.

(**) Prof. Br. Weigand: *Ubersichtskarte der Verteilung der mikroseismichen Stationen (April 1901) in Verhandl. der erste...* Taf. I.

(***) Unos 1900 Mk. con todos sus accesorios. El par de péndulos sólo cuesta 625 Mk. sin amortiguamiento y 180 Mk. más con él (carta de 2 Noviembre 1906).

centímetros de altura, construyendo un magnífico instrumento con 133 veces de aumento para una curvatura de espejo de cuatro metros, y al que han adaptado un sencillo amortiguador de aire con sólo prolongar el estribo al otro lado de la pesita que sirve de masa con una delgada varilla de aluminio, que sostiene una pequeña lámina cuadrada del mismo metal, introducida en una caja cuyas paredes pueden acercarse más ó menos, y cuya cubierta, de cristal, puede quitarse cuando se quiera que el péndulo funcione sin amortiguamiento alguno.

Al revés que los péndulos de Hecker y de Ehlert, las componentes de los péndulos Bosch están montadas aparte, con sus convenientes ajustes (*), cuyo sistema tiene algunas ventajas; mas el precio de las dos componentes es el doble del de una sola, en vez de subir sólo en un 50 por 100, como ocurre en el aparato de Hecker. La velocidad del papel sensible es muy considerable, siete veces y media superior á la máxima de Ehlert: alcanza 90 centímetros por hora, lo que exige un papel muy sensible, como el del Dr. Stolz, de Charlottenburg, cerca de Berlín, por ejemplo, y un excelente foco luminoso.

También construye la acreditada casa de Gotinga Spindler & Hoyer un péndulo fotográfico ideado por el Profesor Wiechert, con amortiguador cilíndrico de aire, cilindro receptor de 36 centímetros de velocidad horaria, caja-túnel protectora, tan ingeniosa como útil, etc. (**).

El Dr. Mainka nos mostró en Estrasburgo un sencillísimo péndulo fotográfico, muy semejante á un modelo ya usado por el Profesor Milne (***), en el cual el espejo cóncavo que sirve de masa se halla sujeto á un estribo de aluminio, rema-

---

(*) *Bosch photographisch registrierendes Horizontalpendel. Die Erdbebenwarte.* Ms. 5, 6, 7, 8 J., 1905-1906.

(**) 1.800 Mk. completo.

(***) *Seismatogy*, p, 58, figura 12.

tado en un trozo cóncavo de ágata, que se apoya en una punta cónica de acero de 90°, ángulo, según los estudios de Hecker, el más favorable, sujeto en una columnita, fija á su vez en un pie provisto de tornillos de nivel.

Un finísimo hilo metálico, pendiente de lo alto de la pequeña columna, sirve de sostén á este péndulo, y una laminilla de aluminio de 2 × 3 centímetros, colocada en la porción anterior del estribo, hacia abajo, y sumergida en el aceite de vaselina que contiene un pequeño recipiente, completan este péndulo tan sensible como sencillo (*).

Generalmente el período de estos péndulos no suele pasar, en la práctica, de unos 15 á 18 segundos, y lo delicado de los ajustes, unido á lo insignificante de los rozamientos que presentan, los hacen extraordinariamente aptos para los estudios de las desviaciones de la vertical, etc., y también para el registro de los terremotos, en especial los lejanos.

Aunque por su aumento externo, forzosamente muy inferior al de los citados péndulos, sea también menos sensible, el más extendido hoy de todos los de inscripción óptica es, sin disputa, el del ilustre Profesor inglés John Milne.

Gracias á su indomable energía, extraordinaria actividad y relevantes prendas organizadoras, de las que ya diera gallardas pruebas durante su larga permanencia en el Japón, y también á la cooperación tan valiosa como entusiasta que le presta la *British Association for the Advancement of sciences*, lo ha repartido por toda la superficie del mundo, existiendo hoy en más de 42 estaciones (**), entre las que se cuentan nuestro Observatorio de Marina de San Fernando.

Consta este instrumento de una columnita sólidamente

(*) *Kurze Vebersicht*..... S. 7, figura 2.

(**) En el folleto del Prof. Milne *On the instalation and working of Milne's Horizontal Pendulum*, publicado en 1901, p. 8, aparecen sólo 37. Hay que agregar cinco más, según la adición que nos envió su constructor Mr. R. W. Munro, Cornwall Rd. South Tottenham, London N.

atornillada sobre un pie triangular de fundición, provisto de tornillos de nivel, uno de los cuales tiene adherido un índice. De la parte superior de la columna desciende un hilo de plata que sostiene una ligera varilla de aluminio, en cuyo extremo posterior se haya engastada la pieza de ágata con una concavidad que descansa sobre la punta de la aguda aguja de acero fija en la base de la columna.

La masa es doble y afecta la forma de los halterios ó pesas usadas en gimnasia; esto es, dos esferas unidas por un travesaño.

La varilla de aluminio citada termina en una lámina de mica ennegrecida, rectangular y provista de una estrecha rendija lineal en el sentido de la misma varilla.

En los modelos más extendidos (*) consta el mecanismo inscriptor-receptor de una lámpara pequeña de petróleo, situada enfrente de un espejo plano, inclinado 45°, que refleja la luz sobre una rendija transversal, debajo de la cual se encuentra la que lleva la varilla ó botalón del péndulo. El motor de relojería hace avanzar una cinta de papel sensible de unos 10 metros de largo por 5 centimetros de anchura, á razón de 6 centímetros por hora, resultando una estrecha y continua línea negra sobre el fondo blanco del papel, bordeado por una faja negra á cada lado, en el caso de que el péndulo permanezca inmóvil, puesto que la luz sólo puede pasar al través del orificio resultante de la intersección de entrambas ranuras y por los lados de la laminita de mica del péndulo. En el caso en que este se agite, la línea central resultará más ancha, á la vez que menos marcada, y llegarán á aparecer, si el movimiento fuese algo fuerte, grandes dentellones claros en los bordes.

Cada hora, ó sea cada 60 milímetros, si el motor marcha

(*) Precio, á bordo en Londres y con papel sensible y productos químicos para seis meses, incluyendo el reloj cronógrafo, 55 £.
El coste anual viene á ser de 10 £ próximamente.

bien, se nota en las citadas márgenes una línea blanca, resultado del eclipse parcial de luz producido por el minutero de un reloj Waltham, provisto de una laminita de mica ennegrecida, al pasar entre uno de los bordes de la abertura de la caja y el foco luminoso.

Una gran caja de caoba protege al instrumento contra la luz difusa y las corrientes de aire, y una gran mesa, con un pequeño pilar y una habitación ordinaria, bastan para instalarlo, circunstancias favorables que, unidas á ser de manejo bien sencillo ateniéndose á las instrucciones que le acompañan, han influído, y no poco, en su difusión, á pesar de sus defectos.

Uno de ellos, y no el menor, aunque sea el más fácil de corregir, es la velocidad tan escasa del papel sensible, con la cual es imposible el intentar medir los períodos de las distintas ondas que se presentan en los terremotos, dato sobremanera importante, no menos que el tiempo en que han acaecido las distintas fases, en el que, aunque se hallen datos con una décima de milímetro de aproximación, ésta no puede pasar de la décima de minuto, cifra que no corresponde á lo que hoy se exige.

Además, el gasto en papel sensibilizado, reactivos, etc., es muy considerable para una velocidad tan pequeña, y el manejo de esas tiras enormes no ha de resultar nada cómodo.

Para remediar estos defectos, ideó el Profesor Milne, en 1903, emplear como receptor un cilindro de un metro de circunferencia que gira en cuatro horas, avanzando seis milímetros cada vuelta. Gracias á este medio, se realiza una economía notable, se evitan molestias y se obtiene una velocidad de 25 centímetros por hora, algo escasa, pero que ya permite determinar los períodos en los movimientos no muy rápidos (*).

(*) Precio, 70 £.—Cronógrafo, 23 £.—Gasto anual del papel sensibilizado, 5 £. – Constructores: el citado Mr. Munro y la «Cambridge Scientific instrument» C.° Ltd.

El período que se recomienda con estos péndulos para que las observaciones sean fácilmente comparables, es el de 15 segundos, siendo su aumento externo, determinado por la relación entre la distancia de la laminita de mica porta rendija al centro de la masa y del de dicho último punto al de apoyo, de solo siete veces, motivo por el cual su sensibilidad no es comparable á la verdaderamente exquisita de los Von Rebeur y sus modificaciones, y aun resulta inferior á los Omori ordinarios y á los Stiattesi.

También carece de amortiguador, de modo que manifiesta gran tendencia á entrar en franca oscilación con su propio período, y á continuar moviéndose, una vez recibido el impulso, al cesar éste; así, según Milne, una separación de la línea de reposo de 7 milímetros debe hacerlo oscilar por ocho minutos, si se halla en estado de poder funcionar bien (*)

Componente vertical.

Aunque la componente vertical, sobre todo en los terremotos lejanos, no presente la intensidad de los horizontales, y muchos observatorios geodinámicos, entre los que se cuentan no pocos de gran importancia, carezcan de instrumentos capaces de registrarla, como su estudio encierra no poco interés y está llamado á dar mucha luz sobre algunos puntos de la historia de nuestra tierra, creeríamos no llenar el cuadro que nos hemos propuesto no tratando de ella.

Los instrumentos destinados á su estudio pudieran dividirse en tres tipos principales, según que la masa actúe sobre una lámina flexible, un muelle espiral ó uno de los brazos de una balanza.

Hoy, el más extendido de todos, es el del Profesor G. Vi-

(*) *On the instalation....* p.

centini (*), perteneciente al primer tipo, y que forma parte de su microsismógrafo universal.

Lo constituye una lámina muy elástica de acero (muelle para vagones), de 1,50 metros de longitud por 75 milímetros de anchura, con espesor decreciente de 10 á 7 milímetros. Esta lámina, sin carga, está encorvada en los modelos recientes, se halla sujeta por su extremidad más gruesa á un fuerte pilar de mampostería, y lleva en su extremo más delgado una masa cilíndrica de 45 á 50 kilogramos de peso, que le obliga á adoptar la posición horizontal.

Al presentarse movimientos de abajo hacia arriba, ó *subsultorios*, en el suelo, la hoja de acero, verdadero muelle elástico, ha de moverse también en el mismo sentido. Estos desplazamientos de la extremidad cargada de la lámina de acero, convenientemente transformados de verticales en horizontales, gracias á una ingeniosa combinación de palancas, á la vez que, multiplicadas en ocasiones hasta 280 veces (**), se registran, por medio de una finísima aguja de vidrio, al lado de las componentes horizontales en que ya nos ocupamos y del cronógrafo en la misma banda de papel ahumado.

Los muelles espirales forman parte integrante de los instrumentos de Wiechert, Agamennone y Schmidt, modificaciones del de Ewing.

Ya hemos hablado de uno de los instrumentos del segundo de los citados sismólogos, al recordar la pequeña exposición del Haya.

Allí mismo presentó el Profesor Wiechert una reducción de su gran modelo, que después citaremos, con masa de 80

(*) G. Vicentini e G. Pacher.—*Microsismógrafo per la componente verticale.—Bol. S. S. I.* V (1899-1900), pp. 33-58.

(**) Aumento en Junio de 1905 de la componente vertical del péndulo E.—*Cenno Preliminare sulle registrazione dei microsismografi...* Atti del R. I. Veneto di Sc. L. e. Arti, 1906-1907, LXVI, p. sec. 5-6, p. 216.

kilogramos, período de hasta seis segundos y aumento de 40 á 160 veces, admirablemente construído (*).

El gran modelo, cuya masa la constituye una robusta caja de madera llena de espato pesado, con algunas pesas de hierro hasta un peso total de 1.300 kilogramos, tiene 160 veces de aumento para un período de hasta siete segundos, con amortiguamiento, como el pequeño, así como también un regulador compuesto de tubos de cinc, para evitar la perjudicial desviación que producirían en los gráficos los cambios de temperatura, tan notables, que, en su máximum de sensibilidad, 1° centígrado causaría, sin aquel auxilio, la desviación enorme de 70 milímetros. Cierto que este regulador reduce á la mitad la sensibilidad del péndulo; pero no lo es menos que en la componente vertical Vicentini, mucho menos sensible, dado su escaso período, 1,2 á 1,3 segundos, ya son notables las desviaciones, y aun molestas, y que si algunos instrumentos pueden pasarse sin semejante accesorio, aquí tan principal, es porque si no parecen notar los cambios térmicos tampoco notan ordinariamente las sacudidas sísmicas.

La suspensión de la masa, ó sea del cajón relleno de barita, hematita, etc., la forman 8 resortes de acero, procedentes de la casa Krupp, de 8 kilogramos de peso cada uno, hechos de alambre de 14 milímetros de diámetro, formando espiras de 20 centímetros de diámetro. Los resortes, suspendidos de una fuerte armazón de hierro y encerrados dentro de cajas de palastro para evitar los accidentes de la posible rotura de alguno, se hallan divididos en dos grupos, uno á cada lado de la masa, constituyendo un todo de 1,30 × 1,50 × 2 metros, con su caja protectora (**).

(*) Precio completo 550 Mk. en la casa Spindler & Hoyer.

(**) E. Wiechert-Hauptstationen für Erdbebenforschung in Göttingen und Apia-in Jahresbericht... Gerland's Beiträge zur Geophysik, VIII, Bd. 3 u. 4 Hft. S. 629.

Spindler & Hoyer Preis-Liste XVIII, SS. 4-6 u. 9. Precio, 2.800 Mk.

Pertenecen también á este grupo de instrumentos el gravímetro del Dr. Schmit, espiral suspendida por tres hilos de seda dentro de un tubo de vidrio, á la que sirve de masa una esfera de cristal llena de mercurio, instrumento de inscripción óptica, una de cuyos defectos principales, su *talón de Aquiles*, según la gráfica frase del Profesor Dr. K. Mach, consiste en su extraordinaria sensibilidad á los cambios de temperatura (*), y otros instrumentos poco usados, como la balanza de Schlüter, etc.

2. - Sistemas no pendulares: Sismoscopios.

Sólo mencionaremos, entre los aparatos no pendulares utilizables para el estudio de los terremotos, á la *vasca sísmica*, enorme cubeta llena de agua, cuyos desniveles, considerablemente aumentados, registra un flotador sobre un cilindro giratorio, y los *niveles geodinámicos*, vasos comunicantes, también de grandes dimensiones y que funcionan de modo análogo. Tanto con estos instrumentos, debidos á la poderosa inventiva del Director del Observatorio Geodinámico de Casamicciola, Profesor G. Grablovitz, como con las cámaras manométricas del Profesor Emilio Oddone, actual agregado á la Dirección de la Asociación Sismológica Internacional, sita en Estrasburgo, se ha tratado de evitar la tendencia á adquirir su propio período oscilatorio y otros inconvenientes de los sistemas pendularcs, mas no han logrado substituirlos, en cuanto su sensibilidad es muy inferior.

Los sismoscopios parecen cada vez menos en boga, y no sin razón: sólo pueden servir ó para indicar si ha habido algún movimiento y á qué hora, sin prejuzgar acerca de la naturaleza sísmica ó no del mismo, ó para poner en acción el

---

(*) Bericht... der Hohenheimer Erdbebenwarte... Beiträge,.. íd, S. 616.

mecanismo de gran velocidad, ó el motor corriente de otros instrumentos.

Lo primero, si son algo sensibles, suelen hacerlo por causas extrañas á cada momento, y cuanto á lo segundo, ó son más sensibles que el aparato principal y éste se dedica á marcar á *escape* líneas rectas, como parece ocurrir en Rocca di Papa, á juzgar por el *Bolletino*, ó sólo utilizan la gran velocidad para la porción principal del sismo, de ondas casi siempre de más de quince segundos de período en los lejanos, donde resulta inútil, y no en las preliminares rapidísimas en los terremotos de epicentro próximo, únicos en los que una gran velocidad sería conveniente alguna vez.

Tampoco indican la intensidad del movimiento, etc., dato de gran importancia. Sin embargo, como pueden, á falta de otra cosa mejor, prestar servicios muy apreciables, indicaremos algún modelo de los más prácticos.

Uno de los mejores es el de *péndulos invertidos* del doctor Agamennone, que construye en Roma Fascianelli (*). Consiste, como indica su nombre, en dos péndulos invertidos cuyas masas se hallan fijas á diferentes alturas sobre flexibles varillas de acero, con objeto de que sus períodos de oscilación sean distintos. Una de ellas termina en una laminita de platino horadada, en comunicación con una pila, mientras que la otra lleva una punta de dicho metal en conexión con un electroimán convenientemente dispuesto (**) para poder detener la marcha de un reloj, tocar un timbre, poner en marcha el mecanismo de gran velocidad de un sismógrafo, etc., hallándose el todo provisto de los ajustes necesarios.

(*) Precio, 40 liras, y 65 si se le quiere unir otro para las sacudidas subsultorias, también del mismo autor. El reloj, indispensable, vale 35 ó 55 liras, según el modelo.

(**) *Sismoscopio elettrico a doppio effeto, in Bol. S. S. I*, III (1897), págs. 37-45, ibid 157-158 et IV (1898), 277-283.

XLVII.—El frotamiento mixto y los métodos de ensayo de los lubrificantes.

POR LUIS HENRY.

La cuestión del frotamiento de las piezas mecánicas es de las que, á pesar de un sinnúmero de estudios teóricos y prácticos, ha quedado todavía sin resolver de una manera satisfactoria. Esto ha hecho que, no habiéndose traducido en fórmulas mecánicas, se haya abandonado del todo la cuestión, como lo prueba el que su estudio no figura en los tratados de Mecánica.

Sin embargo, la cuestión es susceptible de un examen detallado, siempre que en él se introduzca un método de clasificación lógico de los fenómenos de frotamiento; siendo el más natural el que consiste en dividirlos en frotamiento sólido, frotamiento fluído y frotamiento mixto, que es el caso general del frotamiento lubrificado.

El presente estudio comprenderá dos partes: en la primera, examinaremos de nuevo la teoría del frotamiento sólido, la del frotamiento fluído y las leyes de ambos, y luego se examinará cómo en el frotamiento lubrificado se van combinando estos dos efectos y cuáles son las condiciones que facilitan el predominio del uno ó del otro de estos dos fenómenos en el frotamiento mixto resultante.

En la segunda parte, nos valdremos del estudio hecho de la naturaleza íntima del fenómeno, para examinar el papel desempeñado en él por el lubrificante, y de allá pasaremos al estudio de los métodos de examen del valor de los lubrificantes. Esta división es lógica, pues creemos que es de imprescindible necesidad antes de aplicar el cálculo á la medida de un fenómeno; examinar bien á fondo cuál es la natura-

leza del mismo, ó á lo menos sus condiciones de producción más generales, para luego aplicar dicho cálculo á lo que es verdaderamente la esencia del fenómeno, sin dejar que entre á perturbar su medida la influencia de circunstancias ajenas al mismo.

Las teorías acerca del fenómeno de frotamiento sólido han sido varias; pero la que predomina es la que consiste en considerar que los cuerpos tienen la propiedad de penetrarse, en cierto modo, de una cantidad naturalmente muy pequeña por su parte superficial común, y que el movimiento relativo de las partes superficiales da lugar á unas resistencias de las partículas enclavadas de cada uno de los cuerpos en el otro. Las leyes de este fenómeno se reducen á la proporcionalidad de la fuerza resistente al movimiento, á la presión aplicada y á su independencia de la superficie, y de la velocidad de dicho movimiento.

En cuanto al frotamiento líquido, los estudios practicados han quedado ignorados, y ni siquiera son conocidos de los técnicos, pues por su complicación no entran en el cuadro de una revista. El más conocido y más completo de estos estudios es el del general N. Petroff, presentado á la Academia de Ciencias de San Petersburgo en el año 1883, y cuya aplicación al examen de los lubrificantes ha sido objeto de una comunicación del mismo autor al Congreso Internacional de Mecánica (sección de los métodos de ensayo), reunido en París en 1900 con motivo de la Exposición Universal.

Los resultados obtenidos por el general Petroff son de una complicación enorme, pues en ellos intervienen series infinitas cuyo cálculo hay que hacer para aplicar las fórmulas; además de que, en cuanto el espesor de la hoja líquida en el punto de mayor presión es menor que las cuatro décimas partes de la diferencia de los radios del cojinete y del gorrón, las series dejan de ser convergentes, y todo cálculo es desde luego imposible.

Sin entrar en un examen tan complejo del fenómeno, hemos creído interesante examinar una representación suficientemente aproximada del mismo y cuya aproximación se justifica por el acuerdo del resultado obtenido con las observaciones que la práctica enseña.

Se admite, conforme á la hipótesis de Poiseulle, que, cuando un líquido circula entre dos paredes de movimiento suficientemente lento y el líquido moja las paredes, las capas líquidas en contacto con ellas quedan fijas, y las demás van resbalando las unas sobre las otras. En el caso del frotamiento, extenderemos esta hipótesis en la forma siguiente: cuando un liquido está interpuesto entre dos superficies animadas de un movimiento relativo, las capas en contacto con las dos superficies están animadas del mismo movimiento que ellas, y las demás van resbalando una sobre otra con velocidades intermedias. En el caso en que una de las superficies esté inmóvil, la capa adherente á la otra superficie tiene la mayor velocidad y transmite por arrastre á las demás el movimiento y la potencia necesaria para vencer las resistencias debidas al frotamiento interior del líquido.

Supongamos ahora que se suprime mentalmente la superficie en movimiento y consideremos el sistema fluído, constituído por la vena primitiva y otra igual y simétrica con relación al plano de la superficie en movimiento que hemos supuesto suprimida. Nuestra hipótesis es que este sistema líquido es precisamente igual á una vena líquida en estado de movimiento *(ecoulement)*, bajo una presión suficiente para que la capa central adquiera la velocidad que tenía la superficie en movimiento. En efecto; dadas las dimensiones lineales del sistema y el coeficiente de frotamiento interior, la velocidad de la capa media determina el movimiento independientemente por completo de la causa productora del mismo, y así es como podemos reemplazar el esfuerzo transmitido por la pared móvil (esfuerzo éste que no sabemos medir), por el de una presión dirigida paralelamente al pla-

no del movimiento, la que podremos medir, y cuya relación con el coeficiente de frotamiento interior nos es conocida por las experiencias del mismo Poiseulle y las que podemos deducir fácilmente de toda observación viscosimétrica.

Vamos á establecer, pues, la ley del movimiento líquido *(ecoulement)* en el caso de dos superficies planas. Dejaremos de lado los efectos en las extremidades de las hojas, pues dan lugar á unos movimientos transversales de expulsión del líquido de un orden de magnitud inferior al de la velocidad longitudinal, y por consiguiente, despreciables con relación á ella.

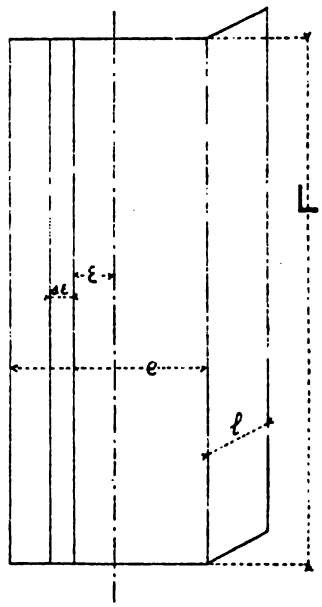


Figura 1.ª

Consideremos la capa líquida (fig. 1.ª) comprendida entre los planos á distancias ε y $\varepsilon + d\varepsilon$ del plano medio; esta capa está sometida á tres fuerzas.

1.ª La de la presión motriz, $pld\varepsilon$.

2.ª La fuerza aceleratriz de frotamiento de la capa del lado interior.

Estas fuerzas de frotamiento interior no son más que un concepto representativo hipotético de los hechos, pero parece lógico *à priori*, y desde Navier, quien en 1822 examinó la cuestión por primera vez que sepamos, se ha admitido siempre que constituían una representación perfectamente aceptable. Naturalmente no se puede demostrar nada, pero sin embargo, se puede indicar que, considerando una capa infinitamente delgada, la cantidad dV representa la velocidad relativa de una de las superficies en relación á la otra, de las dos que la limitan, y como quiera que, por otra parte, los líqui-

dos son incompresibles, es decir, que todo movimiento de los mismos es únicamente un resbalamiento de las moléculas unas sobre otras, es lógico pensar que la fuerza necesaria para obtener dicho movimiento será proporcional al número de moléculas interesadas en él, y por consiguiente, al volumen del líquido movido por unidad de tiempo en movimiento relativo naturalmente.

Esta fuerza será, pues, proporcional á dV, y para expresarla, en cantidad finita, se considerará la cantidad proporcional $\frac{dV}{d\varepsilon}$ y el coeficiente constante que expresará el valor de dicha fuerza para la unidad de superficie y para un

$$\frac{dV}{d\varepsilon} = l,$$

será la cantidad que llamamos coeficiente de frotamiento interior del líquido, y la fuerza correspondiente en cada caso será

$$S \frac{dV}{d\varepsilon} \mu ;$$

llamando μ este coeficiente y S la superficie sobre la que se ejercita dicha fuerza.

Tendremos, pues, para dicha fuerza aceleratriz, el valor

$$l L \frac{dV}{d\varepsilon} \mu .$$

3.ª La fuerza retardatriz de frotamiento de la capa del lado exterior

$$l L \frac{dV}{d\varepsilon} \mu + d\left(l L \frac{dV}{d\varepsilon} \mu\right).$$

Habría que considerar también las fuerzas de inercia para establecer el equilibrio riguroso, pero ya es sabido que en las condiciones habituales de los viscosímetros, para venas de 2 milímetros de diámetro, estas fuerzas son despreciables con relación á las resistencias de frotamiento interior, y en el caso del engrase en el que las venas líquidas son infinitamente más delgadas, es legítimo *à fortiori* hacer la misma hipótesis.

Estando las tres fuerzas dirigidas en el mismo sentido, la ecuación de equilibrio será

$$pld\varepsilon + lL\frac{dV}{d\varepsilon}\mu - \left[lL\frac{dV}{d\varepsilon}\mu + d(lL\frac{dV}{d\varepsilon}\mu)\right] = 0,$$

ó bien

$$pld\varepsilon - d\,(lL\frac{dV}{d\varepsilon}\mu) = 0.$$

Integrando respecto á la variable independiente, se obtiene

$$pl\varepsilon - lL\frac{dV}{d\varepsilon}\mu + K = 0.$$

La constante de integración K tendrá que determinarse por el examen de un caso particular conocido; consideremos el valor $\varepsilon = 0$: vamos á demostrar que para este caso

$$\frac{dV}{d\varepsilon} = 0.$$

En efecto; el sistema tiene por plano de simetría el plano medio $\varepsilon = 0$, considerando la función $V = \varphi(\varepsilon)$, esta función para $\varepsilon = 0$ debe presentar un máximo finito ó infinito; la naturaleza del hecho físico nos asegura de que el máximo no puede ser infinito. Por otra parte, no se puede admitir que la curva representativa de $V = \varphi(\varepsilon)$ presente en el pla-

no medio un punto de retroceso, pues el examen de la ecuación diferencial demuestra que V es función de segundo grado de ε, y una tal función no admite puntos de esta naturaleza. La funcion $V = \varphi(\varepsilon)$, pasa, pues, por un máximo finito ordinario para $\varepsilon = 0$, y por consiguiente, este valor

$$\frac{dV}{d\varepsilon} = 0,$$

y en la ecuación integrada $K = 0$.

Tenemos, pues,

$$pl\varepsilon - lL\frac{dV}{d\varepsilon}\mu = 0,$$

ó

$$\frac{p}{L\mu} = \frac{dV}{d\varepsilon}.$$

Integremos nuevamente con relación á ε, y tendremos,

$$V = \frac{p}{L\mu} \times \frac{\varepsilon^2}{2} + K'.$$

Para la determinación de la nueva constante de integración K' nos valdremos de la hipótesis señalada al principio de este estudio, de que, al contacto de la pared, la última capa tiene una velocidad nula; hagamos, pues,

$$\varepsilon = \frac{e}{2}$$

tendremos $V = 0$, y

$$\frac{p}{L\mu} \times \frac{e^2}{8} + K' = 0,$$

de donde sacamos

$$K' = -\frac{p}{L\mu} \times \frac{e^2}{8}.$$

Tenemos definitivamente

$$V = \frac{p}{2L\mu}\left(\varepsilon^2 - \frac{e^2}{4}\right).$$

La velocidad de la capa media, será, pues, en valor absoluto:

$$V = \frac{pe^2}{8\,L\mu}.$$

Para nuestro problema hemos de modificar esta igualdad; en efecto, nuestro objeto es evaluar la potencia necesaria para comunicar á todo el sistema un movimiento tal, que la capa media tenga una velocidad determinada que es la velocidad misma de la pieza frotante móvil.

Sacamos de esta ecuación

$$p = \frac{8L\mu V}{e^2},$$

p es entonces el valor de la presión que buscamos.

Pasamos ahora á la expresión del trabajo, el cual será la suma de los trabajos elementales de la presión, representados por el producto de las fuerzas elementales de presión por el desplazamiento de las mismas.

Para mayor comodidad, en lugar del trabajo, calcularemos la potencia, reemplazando en la definición anterior los desplazamientos por las velocidades.

La presión elemental sobre una capa es

$$p\,l\,d\varepsilon = \frac{8L\mu V}{e^2}\,l\,d\varepsilon,$$

y la velocidad correspondiente en valor absoluto,

$$v \frac{p}{2L\mu}\left(\varepsilon^2 - \frac{e^2}{4}\right) = \frac{4V}{e^2}\left(\varepsilon^2 - \frac{e^2}{4}\right)$$

tenemos, pues,

$$d\tau = \frac{32\,L\mu\,V^2\,l}{e^4}\left(\varepsilon^2 - \frac{e^2}{4}\right)d\varepsilon$$

$$\tau = 2\int_0^{\frac{e}{2}} \frac{32L\mu\,V^2 l}{e^4}\left(\varepsilon^2 - \frac{e^2}{4}\right)d\varepsilon$$

$$\tau = \frac{64L\mu\,V^2 l}{e^4}\left[\frac{\varepsilon^3}{3} - \frac{e^2\varepsilon}{4}\right]_0^{\frac{e}{2}} = \frac{64L\mu\,V^2 l}{e^4}\left[\frac{e^3}{24} - \frac{e^3}{8}\right]$$

$$\tau = \frac{16}{3}\,\frac{L\mu\,V^2 l}{e}.$$

Esta expresión es la del trabajo en una capa de espesor *e;* pero el trabajo de engrase que consideramos es la mitad de éste, pues admitiremos por simetría que los trabajos correspondientes á las dos partes son iguales, en cuyo caso el espesor de la vena líquida lubrificada será $\frac{e}{2}$; la verdadera expresión del trabajo será,

$$\tau = \frac{4}{3}\,\frac{L\mu\,V^2 l}{E},$$

siendo E el espesor de la vena líquida lubrificante.

Este resultado se refiere, naturalmente, al caso del engrase de una superficie plana; pero el caso más general del engrase es el de un gorrón sobre un cojinete, y es conveniente abordar este problema, por ser de un interés mucho mayor que el del frotamiento plano. Si las dos superficies

frotantes del gorrón y del cojinete estuviesen paralelas, se aplicarían los razonamientos, y por consiguiente, las fórmulas inmediatamente; pero aunque no sea así, dado que por otra parte las espesores de las venas líquidas son muy pequeños, es legítimo extender el razonamiento á elementos pequeños circunferenciales de la vena total, pues en estos elementos la variación de espesor de dicha vena es pequeña,

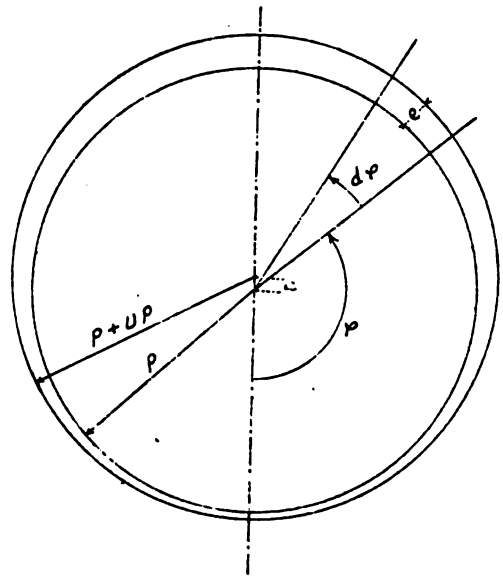


Figura 2.ª

y para hacer el cálculo correspondiente se tendrán que aplicar las fórmulas obtenidas á elementos infinitesimales de dicha circunferencia.

Aplicando, pues, la fórmula

$$\tau = \frac{4}{3} L l \mu \frac{V^2}{e},$$

al elemento de longitud

$$L = p d\varphi,$$

tendremos, llamando Δp la diferencia de los radios y a la distancia de los centros (fig. 2.ª),

$$e = \Delta p\, a \cos \varphi + (p + \Delta p)\left[\sqrt{1 - \frac{a^2 \operatorname{sen.}^2 \varphi}{(p+\Delta p)^2}} - 1\right].$$

$$e = \Delta\rho - a \cos \varphi + (\rho + \Delta\rho)\left[\frac{-\dfrac{a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{(\rho + \Delta\rho)^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{(\rho + \Delta\rho)^2}} + 1}\right]$$

el denominador de la tercera parte de la expresión es muy aproximadamente 2.

Tenemos, pues, con el mismo grado de aproximación,

$$e = \Delta\rho - a \cos \varphi - \frac{a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{2(\rho + \Delta\rho)}.$$

En la práctica, el término $\dfrac{a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{2(\rho + \Delta\rho)}$ tiene que desecharse ante los otros por ser de un orden de magnitud inferior, no decimos de infinitud, pues no hemos de perder de vista que se trata de un problema de física en el que empleamos el cálculo matemático sólo como un medio aproximadamente adecuado.

Tenemos, pues, para cada elemento el trabajo elemental

$$d\tau = \frac{4}{3}\, l\mu V^2 \frac{\rho d\varphi}{\Delta\rho - a \cos \varphi} =$$
$$= \frac{4}{3}\, \frac{l\mu V^2 \rho}{\Delta\rho}\, \frac{d\varphi}{1 - \dfrac{a}{\Delta\rho} \cos \varphi};$$

hagamos el cambio de variables

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t,$$

tendremos

$$d\varphi = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

al mismo tiempo escribimos

$$\frac{a}{\Delta\rho} = k;$$

tendremos

$$d\tau = \frac{4}{3}\,\frac{l\mu\rho V^2}{\Delta\rho}\,\frac{2dt}{1+t^2-k+kt^2} =$$

$$= \frac{8}{3}\,\frac{l\mu\rho V^2}{\Delta\rho(1-k)}\,\frac{dt}{t^2\,\dfrac{1+k}{1-k}+1},$$

ó

$$d\tau = \frac{8}{3}\,\frac{l\mu\rho V^2}{\Delta\rho(1-k)}\,\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+k}{1-k}}}\,\frac{\dfrac{dt}{\sqrt{\dfrac{1+k}{1-k}}}}{t^2\,\dfrac{1+k}{1-k}+1},$$

y

$$\tau = 2\int_0^\infty \frac{8}{3}\,\frac{l\mu\rho V^2}{\Delta\rho\sqrt{1-k^2}}\,\frac{\dfrac{dt}{\sqrt{\dfrac{1+k}{1-k}}}}{t^2\,\dfrac{1+k}{1-k}+1} =$$

$$= \frac{16}{3}\,\frac{l\mu\rho V^2}{\Delta\rho\sqrt{1-k^2}}\left[\text{arc. tg.}\,\frac{t}{\sqrt{\dfrac{1+k}{1-k}}}\right]_0^\infty$$

Si suponemos $k = 1$, lo cual cabe dentro de nuestra hipótesis, pues de no ser así no estaríamos dentro de los límites del frotamiento fluído, tendremos:

$$\left[\text{arc. tg.} \frac{t}{\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2},$$

y definitivamente

$$\tau = \frac{8}{3} \frac{\pi l \mu_0 V^2}{\Delta_\rho \sqrt{1-k^2}} = \frac{4}{3} S\mu \frac{V^2}{\Delta_\rho \sqrt{1-k^2}}.$$

Siendo S la superficie frotante, $S = 2\pi_\rho l$, pero

$$\Delta_\rho \sqrt{1-k^2} = \sqrt{\Delta_\rho^2 - a^2} =$$

$$= \sqrt{\Delta_\rho - a}\ \sqrt{\Delta_\rho + a} = \sqrt{\lambda\,(2\Delta_\rho - \lambda)},$$

tenemos

$$\tau = \frac{4}{3} S \frac{\mu V^2}{\sqrt{\lambda}\ \sqrt{2\Delta_\rho - \lambda}}.$$

De esta fórmula se desprende que la potencia gastada en el frotamiento fluído es proporcional á la superficie frotante, al coeficiente de frotamiento interior del líquido, á la segunda potencia de la velocidad relativa de las superficies y al inverso de la dimensión de la vena en su punto de compresión máxima. Queda todavía para considerar el último término del denominador $\sqrt{2\Delta_\rho - \lambda}$. Como quiera que λ depende de la presión sobre el gorrón, este término tiene el mismo sentido de variación que Δ_ρ, y eso indica el por qué en igualdad de condiciones y siempre que esto no perjudique al buen funcionamiento del mecanismo, es ventajoso

dejar más margen entre los dos radios. Claro está que esta indicación es verdadera dentro de los límites aceptables, que son muy pequeños en general, pues hay el peligro de que el sistema se desajuste y produzca esfuerzos en falso que perjudiquen su funcionamiento.

Según los ensayos practicados muy recientemente por el Ingeniero Dettmar, de Hannover, cuyos ensayos se han referido únicamente al caso de bajas presiones, siendo la máxima de ellas de 3 kilos por centímetro cuadrado, se puede considerar que con ellas predomina el frotamiento líquido; este Ingeniero observó, dentro de unos límites bastante crecidos hasta 0,1 milímetros, que el coeficiente de frotamiento disminuía al mismo tiempo que aumentaba la diferencía de los radios del cojinete y del gorrón empleados en estos ensayos.

Esto es lo que se deduce del examen del problema desde el punto de vista exclusivamente hidrodinámico; pero hay que examinar si estas condiciones se pueden realizar y en qué circunstancias se realizan.

En efecto, se nos presenta el problema del engrase bajo un primer aspecto. ¿Cómo engrasan los lubrificantes, que nos lleva á examinar el hecho físico del engrase? En su examen notamos dos fenómenos favorables á la aducción y al mantenimiento del lubrificante entre las superficies frotantes.

1.° Un impulso del lubrificante tendiendo á penetrar entre las superficies frotantes por las fuerzas de capilaridad, fenómeno éste que llamaremos estático y que tendría lugar también en el estado de reposo.

2.° Un fenómeno dinámico del mismo origen que el primero, á lo menos á primera vista, que consiste en un transporte continuo de lubrificante desde la parte superior, por donde se alimenta, hasta la parte inferior por el gorrón mismo, que, mojado por el líquido lubrificante, lleva consigo en el movimiento una capa de aceite conforme lo hemos supuesto en nuestro cálculo del frotamiento fluído. Este aceite tendría tendencia á aumentar la vena que soporta la presión;

pero entonces las fuerzas capilares estáticas disminuyen y la presión expulsa el aceite, el cual opone á este movimiento de expulsión una resistencia que se podría calcular por las fórmulas anteriores.

Antes de hacer otros cálculos, conviene examinar más á fondo el fenómeno, y primeramente evalúar la importancia posible de las fuerzas de capilaridad que hemos llamado estáticas.

Estas fuerzas tienden á mantener una columna líquida elevada de una altura que depende de la distancia entre las superficies y también de la naturaleza del líquido. Para el aceite de oliva existen determinaciones hechas que dan como resultado la fórmula siguiente:

$$h^{mm} = \frac{7}{e^{mm}}$$

por aplicación de la ley de Jurín.

El valor de e en los casos de frotamiento lubrificado deberá deducirse de la experiencia; pero estas determinaciones serían de una enorme dificultad si no se recurriese á ciertos artificios. Hemos empleado uno que es el siguiente: un cojinete y un gorrón perfectamente ajustados, se limpian cuidadosamente; se echa sobre el gorrón una cierta cantidad de aceite y se dan algunas vueltas para repartir el lubrificante; entonces se hace funcionar el gorrón con una carga suficiente y se repite el ensayo con cantidades cada vez menores de aceite, hasta que, á las pocas vueltas de funcionar con la carga, se empieza á calentar el cojinete; entonces se puede considerar que el mínimum de capa lubrificante está alcanzado. Este procedimiento no pretende ser exacto, y sólo aspira á una aproximación que permite guiar nuestro razonamiento.

En este caso, hemos encontrado como límite de engrase la cantidad de $0^{cc},12$ sobre una superficie de 600 c^2. Siendo el

aceite empleado de color negro, se ha podido apreciar á la vista por el examen del cojinete, después de sacar el gorrón, que el color era uniforme atestiguando así una repartición uniforme también del aceite.

El espesor de la capa era entonces

$$e = \frac{0,12}{600} = 0^{c},0002$$

ó

$$0^{mm},002.$$

La altura correspondiente á las fuerzas de capilaridad estática sería entonces

$$h = \frac{7}{0,002} = 3,500 \text{ milímetros.}$$

Siendo la densidad de los aceites aproximadamente 0,9, la presión equivalente á la tensión superficial sería de $0,9 \times 3500 = 3150$ milímetros de agua ó $0^{k},315$ por centímetro cuadrado.

Este valor corresponde á la temperatura de 15° c. y baja rápidamente cuando se eleva aquélla; hay que reconocer, pues, que su influencia en la generalidad de los casos sería insignificante si realmente un cojinete y un gorrón constituyeran un sistema de dos superficies paralelas ó no distantes de más de 0,002 milímetros; pero sabemos que la cuestión es muy distinta y que, á pesar del cuidado con que se pulimenta una pieza de maquinaria, las asperezas serán del orden de magnitud de esta cantidad, siendo así que, cuando á medida que por aumento de la presión sobre el cojinete vaya disminuyendo la cantidad λ, espesor de la vena mínima de líquido lubrificante, llegue éste á ser del mismo orden de magnitud que las asperezas de las superficies frotantes, en-

trarán en juego porciones de frotamiento sólido sobre las puntas de estas extremidades, la repartición de las presiones se hará de una manera irregular, el espesor de la capa de lubrificante bajará en determinados sitios hasta desaparecer, puesto que hay erosión de la materia; una nueva capa de líquido, llevada por el mecanismo de adherencia superficial que hemos descrito, vendrá á substituirla. El lubrificante dejará de constituir una capa continua y de un espesor constante, puesto que llenará los intersticios entre los granos, y entonces, por el juego de las fuerzas capilares, tendrá tendencia á introducirse entre las superficies frotantes, en los sitios en donde por erosión se habrá reducido hasta lo infinitamente pequeño la distancia entre las mismas, mientras el mecanismo de la adherencia del aceite al metal del cuello continúe abasteciendo la parte frotante de presión máxima con nuevas cantidades de lubrificante. Esta operación tendría teóricamente como resultado, si la materia fuese homogénea en su constitución, la pulimentación absoluta de las superficies y el ajuste perfecto del cojinete y del gorrón, siendo entonces sostenido el gorrón sobre el lubrificante por las fuerzas de capilaridad estática y el frotamiento, que todavía sería un caso de frotamiento fluído y se prolongaría indefinidamente sin que hubiera más erosión de materia; pero la práctica demuestra que las cosas no suceden así, de modo que aún no dominamos completamente el fenómeno con la explicación que del mismo acabamos de dar, y es que, por un lado, la materia no es homogénea, que así como lo ha demostrado la Micrografía, ciencia moderna de la contextura de los metales, las impurezas de los mismos metales constituyen unas partes duras ó granos, diseminados en la materia pura más blanda; por otra parte, en los metales de los cojinetes, que son aleaciones fundidas, existirán desde luego principios de cristalización, los cuales, bajo la presión, en lugar de gastarse normalmente, se podrán romper con fractura cristaloidea, dando lugar á nuevas irregularidades, y así

se continuará el desgaste de las piezas á pesar de la alimentación suficiente de engrase.

El concepto de que el equilibrio en el fenómeno del frotamiento lubrificado tiene lugar cuando las dos superficies han llegado á su punto máximo de pulimentación recíproca, no es más que una hipótesis nuestra; pero como quiera que en la discusión de los métodos de ensayo de los lubrificantes nos valdremos mucho de esta consideración, es conveniente apoyarla en resultados de ensayos conocidos y clásicos. El General Morin, en sus importantes trabajos sobre frotamiento, tuvo la idea de comparar el frotamiento intermitente con el frotamiento continuo, y así como en el estudio del primero encontró unos coeficientes elevados y muy poco variados para tres materias tan distintas como el aceite de oliva, la manteca de cerdo y el sebo de buey, pues estos coeficientes estaban comprendidos entre 0,07 y 0,08, con una diferencia del mayor al menor de 14 por 100; en cambio, para el frotamiento continuo mínimo, ó sea el que hemos llamado de equilibrio, encontró unos coeficientes de 0,03 á 0,054 de valor absoluto, mitad que los primeros y con una diferencia de mayor á menor de 80 por 100. Esto quiere decir que en el frotamiento intermitente la acción de las superficies predomina sobre la del lubrificante, ocurriendo lo contrario en el caso del frotamiento continuo, en el que la acción del lubrificante tiene importancia y el resultado varía notablemente cuando se pasa de uno á otro.

Para dar una idea de lo distintos que son en su esencia los frotamientos fluído y sólido en el frotamiento lubrificado, tomaremos de los resultados de las experiencias del Profesor Stribeck, de Dresden, los que se refieren á la influencia de la velocidad sobre el coeficiente de fricción á distintas cargas.

La carga más baja en que haya operado el Profesor, es la de 5 kilos por centímetro cuadrado, que es una presión media (no baja) en la práctica, y para esta carga los coeficientes correspondientes son:

á 32 vueltas, 0,0045;
á 1100 vueltas, 0,0315;

ó sea, para una relación de velocidades de 34, una relación de coeficientes de 7, lo cual representa algo más que la proporción de la raíz cuadrada, que sería 5,88 (es probable que á una presión baja como de 1 á 2 kilos por centímetro cuadrado se hubiera encontrado una influencia de la velocidad todavía mayor), en cambio á la presión de 60 kilos, presión extrema examinada, encontramos:

á 32 vueltas, 0,0030;
á 1100 vueltas, 0,0072;

ó sea una relación de coeficientes de 2,4, que representa la raíz cuarta del cociente de las velocidades.

Teniendo en cuenta que, si se tratara únicamente de frotamiento fluído, el coeficiente de frotamiento, conforme se ve por el cálculo anteriormente hecho del trabajo en dicho fenómeno, sería proporcional á la velocidad, y si se tratara únicamente de frotamiento sólido, la influencia de la velocidad al contrario sería nula, se puede juzgar de la proporción en que va entrando el segundo fenómeno junto con el primero en la composición del fenómeno resultante; á las bajas presiones, es más importante la influencia de la velocidad sobre el coeficiente de fricción, atestiguándolo el predominio del frotamiento fluído; á las altas presiones, disminuye considerablemente la influencia de la velocidad, lo que nos demuestra la mayor influencia que en este caso tiene el frotamiento sólido.

Ahora examinemos el estado del aceite á su salida de un cojinete. La primera cosa que se nota es que, cualquiera que haya sido su color primitivo, este color se ha obscurecido considerablemente hasta llegar, por lo regular, á ser negruzco. Desde luego, el examen anterior del fenómeno nos ha

demostrado que se hallan en el aceite, después de usado, partículas metálicas, que podemos separar filtrándolo cuidadosamente y dejándolo reposar el tiempo que sea preciso para asegurar la separación. Sin embargo, el aceite, aun no siendo completamente negro, es bastante más obscuro que el aceite primitivo; podríamos creer que en su paso por el cojinete ha cambiado su naturaleza química bajo la acción de los agentes atmosféricos; pero tampoco es posible, porque durante su paso por el cojinete la materia lubrificante no está expuesta á la acción del oxígeno del aire; además, la acción de éste es muy lenta, y sobre los aceites minerales no se manifiesta hasta pasados varios días, y por lo tanto, no puede ser sensible dicho efecto en el tiempo de una ó dos horas que, como máximo, tarda en pasar por el cojinete; por último, la acción oxidante del oxígeno tiene regularmente por objeto transformar las partes alquitranosas, las que dan el color al aceite, en productos más completos y de menor color. La explicación no es, pues, todavía completa, y realmente no puede serlo, pues hasta ahora en todo lo que hemos dicho no ha entrado más que la consideración del agente lubrificante impersonal, ó sea únicamente caracterizado por sus condiciones mecánicas, ó mejor dicho, su viscosidad. Pero la experiencia diaria nos enseña sobradamente que si, á igualdad de viscosidad, hay aceites que dan resultados completamente opuestos, ello no puede ser debido á que los aceites que dan mal resultado contengan materias ácidas, las únicas que aparentemente pueden dar lugar á un ataque del metal, que eventualmente perjudicara el engrase, pues si se neutralizan rigurosamente los aceites, se obtienen unos resultados muy parecidos á los que se hubieran obtenido sin esta operación; la conclusión de todo ello es que existen todavía más fenómenos de los que hemos examinado hasta ahora, y si recordamos la descripción que hemos hecho del mecanismo del engrase, vemos que la base de dicho mecanismo reside en la alimentación de engrase producida por el

mismo movimiento del gorrón en el cojinete, cuya eficacia está en razón directa de la adherencia de la capa líquida lubrificante á la materia del gorrón.

¿Es esta adherencia de orden puramente físico, ó hay combinación química de la materia lubrificante con el metal?

Este es, á nuestro parecer, el último problema del engrase, y debemos añadir que, considerando el estado del aceite después de usado, no cabe más que admitir que ha habido un fenómeno químico, pues de otro modo no habría razón alguna para que el lubrificante se gastara, salvo en la parte que eventualmente quedara adherente á las partículas metálicas, la cual, después de todo, se podría volver á recoger por un disolvente apropiado; sabemos por la práctica que no es así, que hay realmente un gasto de engrase, y que un aceite, después de servir cierto número de veces, llega á un estado en que ya no tiene aplicación para lubrificar. Naturalmente, sería de un alto interés tratar la cuestión químicamente; pero sobre la naturaleza química de los aceites minerales, y por consiguiente, sobre los compuestos que podrían formar con los metales, no sabemos nada cierto, ni tampoco sabemos las propiedades de las materias que entran naturalmente en su composición. En un artículo dedicado á los métodos de ensayo de los lubrificantes, se recordaba últimamente la opinión de Ragosine (el técnico que se ha dedicado más al estudio químico de los derivados del petróleo), de que *de las materias derivadas de los petróleos y cuyo punto de ebullición sobrepasa de* 270° *no se sabe casi nada cierto.* Si recordamos que los productos de engrase más ligeros tienen un punto de ebullición de 310° ó más alto, vemos que la afirmación del distinguido Ingeniero se aplica en absoluto á los aceites de engrase.

Después de lo dicho, podemos sacar la conclusión de que, para el examen de un engrase, hay que considerar dos puntos: el uno, del que luego examinaremos la importancia, es el coeficiente de frotamiento interior; el otro, desde luego

mucho más importante, es el que se refiere á la propiedad de adherirse al metal, pues según hemos dicho, es el fenómeno que más influye sobre la realización del engrase.

La determinación del coeficiente de frotamiento interior se hace bien sea evaluando la presión necesaria para obtener un rendimiento determinado en un tubo de diámetro y longitud determinados, bien sea considerando el rendimiento correspondiente á una presión dada en un tubo de dimensiones conocidas; la relación entre estos elementos y dicho coeficiente es la ecuación de Poiseulle que, reducida á su primer término, infinitamente más importante que el otro y único que se considera en las determinaciones, puede demostrarse fácilmente en forma muy parecida al cálculo anteriormente establecido para el caso de dos superficies planas, como vamos á ver.

Se considera el líquido en movimiento en el tubo como moviéndose por capas concéntricas, las cuales están en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas.

Primeramente la presión,

$$2\pi r\,dr\,p.$$

Segundo, el frotamiento de la capa interior,

$$2\pi rL\frac{dV}{dr}\mu.$$

Tercero, el frotamiento de la capa exterior,

$$2\pi rL\frac{dV}{dr}\mu + d\left(2\pi rL\frac{dV}{dr}\mu\right).$$

La resultante de las dos últimas, dirigidas en sentidos contrarios, es

$$d\left(2\pi rL\frac{dV}{dr}\mu\right),$$

y la ecuación de equilibrio

$$2\pi r dr p + d\left(2\pi r L \frac{dV}{dr}\mu\right) = 0;$$

integremos respecto á la variable independiente r

$$\pi r^2 p + 2\pi r L \frac{dV}{dr}\mu + k = 0,$$

que podemos escribir

$$\pi r p + 2\pi L \frac{dV}{dr}\mu + \frac{k}{r} = 0.$$

Hagamos $r = 0$; $\frac{dV}{dr}$ es, según nuestra hipótesis, proporcional á la fuerza de frotamiento de las capas unas sobre otras, es, pues, forzosamente finito y se deduce entonces $k = 0$, y la ecuación integrada será:

$$\pi r^2 p + 2\pi r L \frac{dV}{dr}\mu = 0,$$

de donde sacamos

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{p}{2L\mu} r$$

integremos, respecto á r, por segunda vez, tenemos,

$$V = -\frac{p}{2L\mu} r^2 + \frac{1}{2} + k;$$

ya hemos hecho la hipótesis general de que, siendo el movimiento líquido un resbalamiento de capas concéntricas, el

de la capa en contacto con la pared era nulo; para $r = R$ tendremos, pues, $v = 0$, de donde sacamos

$$k' = \frac{p}{2L\mu} \frac{R^2}{2},$$

y

$$V = \frac{p}{4L\mu} (R^2 - r^2);$$

el rendimiento de la vena líquida será, pues, en el tiempo θ

$$\int_0^R VdS\theta = \int_0^R \frac{(R^2 - r^2)p}{4L\mu} + 2\pi rdr\theta = \frac{2\pi p\theta R^4}{16L\mu},$$

y en función del diámetro $\delta = 2R$

$$Q = \frac{\pi p\delta^4}{128L\mu} \theta,$$

ó

$$\frac{Q}{\theta} = \frac{\pi p\delta^4}{128L\mu},$$

de donde sacamos

$$\mu = \frac{\pi p\delta^4}{128L \frac{Q}{\theta}},$$

que es la fórmula de Poiseulle reducida á su primer término.

Este dato tendría una gran importancia y junto con él también una fórmula que estableciera su relación con el adelgazamiento de la vena líquida mínima bajo una presión determinada, si pudiéramos confiar en que estamos dentro del caso del frotamiento fluído; pero juzgamos inútil insistir sobre este punto, pues el análisis que hemos hecho del fenómeno y los resultados de la práctica que justifican dicho

análisis, nos demuestran que estamos frente á un fenómeno mixto y mayormente en el caso del engrase á presión alta.

Para el segundo elemento á que hemos aludido, es éste un fenómeno sobre el efecto del cual influyen considerablemente las circunstancias de movimiento de los cojinetes engrasados. En la Exposición de París de 1900, en la sección destinada á Ferrocarriles, se veía una disposición extraña imaginada por un Ingeniero de este ramo, en el que se probaban los aceites lubrificantes en un mecanismo que pretendía reconstituir con absoluta exactitud las circunstancias de la práctica, y para lograr este resultado se habían dispuesto unas ruedecitas excéntricas que á cada número de revoluciones correspondientes á la longitud de un carril producía un choque, á fin de provocar la trepidación que en realidad hubiera producido el choque de la rueda contra el nuevo rail. La disposición dió lugar á muchas críticas, y pareció particularmente ridícula por la minucia de dicha representación; en realidad es posible que el aparato no haya dado resultado práctico, y asimismo lo creemos, pero juzgamos que la idea de hacer intervenir todos los factores de la práctica y particularmente la trepidación en el examen del engrase, era hija de un criterio exacto y perfectamente justificada; lo que hay es que la idea era incompleta, y que se tendrían que reproducir, no sólo las circunstancias de la trepidación debida á las extremidades de los carriles, sino también todos los movimientos de la práctica de cualquier orden que fuesen. En este caso, naturalmente nos vemos conducidos á sacar la conclusión de que la única prueba eficaz es la prueba práctica, pues es la única en que naturalmente todas las circunstancias se encuentran reunidas. Esta conclusión tampoco es una paradoja de exageración teórica; en efecto, consideremos un gorrón ó mangueta y un cojinete de un vagón de ferrocarril, y examinemos, por otra parte, en una máquina fija un sistema de iguales dimensiones y de igual velocidad; si untamos el segundo con un aceite que dé buen resultado, en el primero

hay muchas probabilidades para que obtengamos un mal resultado y la absoluta seguridad de que no obtengamos el mismo resultado, y además de nuestra afirmación se puede practicar la prueba siempre que se quiera, conforme hemos hecho repetidas veces.

La misma observación se hace sobre los artículos para el engrase de los frotamientos de las máquinas marinas, las cuales en todo tiempo han requerido aceites distintos de los de las máquinas fijas para igualdad de resultados.

¿A qué puede ser debida, pues, esta diferencia, sino precisamente á la intervención de todas estas condiciones exteriores que influyen sobre la alimentación mecánica del engrase?

La conclusión es naturalmente que, *á priori*, toda prueba de un artículo, fuera de las condiciones totales y exactas de su empleo, es ineficaz é inútil.

La tendencia á realizar los ensayos en las condiciones mismas de la práctica se nota en la historia de los aparatos destinados, en el espíritu de sus inventores, á determinar el coeficiente de frotamiento de un aceite, ó sea su valor lubrificante. En los primeros de estos aparatos se consideraba un frotamiento cualquiera, sin tener en cuenta circunstancias ningunas, y se equilibraba la fuerza de arrastres debida á dicho frotamiento por la acción de un resorte graduado ó de una romana.

Uno de los más antiguos es el de Mac-Naught: el aceite está interpuesto entre dos discos, uno de ellos que recibe el movimiento y el otro cuya tendencia á seguir el movimiento del primero está contrarrestada por el brazo de una palanca cuyo otro brazo lleva un contrapeso, que se desplaza hasta el equilibrio de su propia acción y de la fuerza de arrastre. Como se ve, en esta disposición ni siquiera interviene la presión, y en cuanto á velocidad, cada punto tiene una distinta, que depende de su distancia al eje de rotación.

En la máquina de Naper, que se compone de un freno cargado con una presión conocida y cuyo esfuerzo de arras-

tre está equilibrado por un dinamómetro, intervienen ya la presión y la velocidad, pero es visible que las condiciones del engrase no son ni con mucho las de la práctica, muy al contrario, pues en él no se puede realizar la forma del par gorrón-cojinete, tan favorable, como hemos visto, á la alimentación del engrase en la parte que recibe la presión.

Aquí hay que dar cuenta también de una serie de aparatos destinados al ensayo de los lubrificantes que realmente salen completamente de la línea anterior y justifican nuestro punto de vista ya expresado, pues son todos ellos la representación rigurosa de un cojinete con su carga y su sistema de engrase, pero como que en este caso no hay posibilidad de medir la fuerza de frotamiento total, no se puede más que examinar la temperatura del cojinete y tomar dicha temperatura como indicación proporcional al trabajo y, por consiguiente, á la fuerza de frotamiento; en estos aparatos no hay inconveniente en reproducir todas las condiciones de la práctica, incluso la duración larga de la prueba, y si hemos de decir alguna cosa sobre ellos, es que son rigurosamente inútiles, pues con un termómetro instalado en un cojinete determinado de una transmisión, se podria practicar exactamente la misma prueba, además de que estos aparatos sirven sólo para el examen de un aceite de transmisión, pues para aplicar una presión un poco crecida, los aparatos que se han construído no han dado resultados favorables. Es lógico que la utilidad de estas máquinas, entre las cuales están la de Ingham y Stapfer, la de Ashcroft y algunas otras, haya sido juzgada tan reducida, que la práctica las haya abandonado por completo, pues hoy no se encuentran en ningún Laboratorio de ensayo de materiales. Thurston ha hecho, por otra parte, la crítica de todos estos métodos, que había tenido ocasión de comprobar en los términos siguientes: «Siempre me ha llamado la atención el que, desde Mo»rin, ninguna prueba seria hubiera sido emprendida y que »ninguna determinación exacta del frotamiento haya sido he-

»cha para presiones elevadas, por ejemplo, de 35 á 70 kilo-»gramos por centímetro cuadrado, que son las que se ob-»servan á menudo en la práctica del Ingeniero. No se ha »observado suficientemente la gran variación del frotamiento »cuando la presión varía: es lo que nuestra experiencia y la »de otros Ingenieros han demostrado. Los que han estudiado »las máquinas de vapor y otras, han observado, como nos-»otros, la facilidad con que las manivelas pasan del punto »muerto, á pesar de las más fuertes presiones, y cómo los »volantes más pesados giran fácilmente en sus cojinetes una »vez puestos en marcha. Nadie puede admitir, pues, que los »coeficientes 0,05 y 0,03, indicados por los mejores autores »para las condiciones más favorables y determinadas por la »observación de presiones ligeras, puedan ser aproximada-»mente aplicables á cargas fuertes, pues de ser así, el traba-»jo gastado para vencer las resistencias de frotamiento sería »verdaderamente inmenso.»

En otro sitio de su obra, expresa en la forma siguiente, el distinguido profesor, sus ideas sobre la manera de orientar los ensayos de engrase: «Para saber si un aceite convendrá »al empleo á que lo destinan ó en qué casos conviene espe-»cialmente, será siempre necesario saber cómo funciona en »las distintas condiciones que está llamado á desempeñar en »la práctica, es decir, que un aceite ensayado sobre un gorrón »de igual materia que el que debe engrasar, con la misma ve-»locidad y soportando la misma presión en el ensayo que »en la práctica, permitirá ver cómo funciona y si es capaz, ó »no, de llenar el objeto que se tiene á la vista.»

En el aparato que, como consecuencia de estas ideas, construyó el mismo Thurston, ha procurado aproximarse más á las condiciones de la realidad, haciendo que los ensayos se pudieran realizar bajo presiones diversas y del orden de las de la práctica. Por necesidades del aparato, la presión, en lugar de ejercerse sobre un lado solo del cojinete, se ejerce sobre los dos, y siendo así, el inventor mismo, juz-

gando que no cabía alimentación de lubrificante, indicó el método, que consiste en repartir una cierta cantidad de aceite sobre el gorrón y luego dar al mismo su velocidad normal, hasta el recalentamiento, ó á lo menos hasta el aumento considerable del coeficiente de fricción. Si se practican varios ensayos seguidos con este aparato y con el mismo aceite, se comprueba inmediatamente que los resultados tienen entre sí unas diferencias tan grandes como las que se encuentran entre los lubrificantes más distintos, y esto es lógico, pues en el análisis que del fenómeno hemos hecho, hemos visto que, por el frotamiento, las partes de mayor presión del cojinete y el gorrón se iban pulimentando recíprocamente hasta hermanar sus superficies, y que entonces se producía la situación de equilibrio que constituye el frotamiento lubrificado normal. En el caso del aparato Thurston no se llega nunca, por el corto tiempo de los ensayos, á realizar estas condiciones, y por otra parte, no pudiendo alimentarse de engrase por su disposición misma, no se pueden practicar ensayos largos. Thurston, en su adivinación, como verdadero sabio, no quiso modificar más el aparato, el que, por cierto, es debido, no á él, sino á uno de sus alumnos; pero en Inglaterra, donde este aparato tuvo algún éxito, se hicieron dos modificaciones en vista de mejorar sus resultados, las cuales eran: 1.ª, añadir un aparato de engrase, y 2.ª, dar al cojinete un movimiento longitudinal sobre el cuello para eliminar la influencia local del estado de las superficies; estas dos modificaciones han resultado dos errores: el aparato de lubrificación colocado en la parte superior del cojinete, en lugar de permitir la aducción de aceite, provoca á menudo el movimiento contrario en virtud de las fuerzas capilares, y el movimiento longitudinal impide se realicen las circunstancias de pulimentado de las superficies frotantes y se obtiene un fenómeno completamente convencional, en el que influye mucho más el estado relativo de las superficies en cada momento, que la calidad del lubrificante, como lo

demuestran sobradamente los resultados prácticos obtenidos en los ensayos. Además de las circunstancias desfavorables anteriormente examinadas y que influyen sobre los ensayos en el aparato Thurston, hay otra, que es la consecuencia de las anteriores y es, que no trabajando el engrase en las condiciones de la práctica, la temperatura *de equilibrio*, cuando se realiza, es muy elevada hasta para las presiones mas reducidas.

En efecto, en la obra de Thurston *Friction and Lost Work in Machinery and Mill Work*, encontramos varios cuadros relativos al estudio del «Winter Bleachez Sperm Oil», materia que es considerada como un excelente lubrificante, y á la presión de 0,56 kilos por centímetro cuadrado, absolutamente insignificante, la temperatura de equilibrio es de 180° F, ó sean 82° C.; á la presión de 1,12 kilos, que es también muy baja, esta temperatura es de 250° F., ó sean 121° C.; en cambio, para una presión doble de la anterior, 2,24 kilos por centímetro cuadrado y una triple de 3,36 kilos, se obtienen las mismas temperaturas de equilibrio, 235° F., ó sean 113° C., temperaturas que están completamente fuera de los límites posibles en la práctica, pues en pasando de 50° C., se puede considerar al cojinete como en estado de recalentamiento. El ensayo que acabamos de reseñar no es un caso aislado que escojamos entre varios, sino que habiendo practicado el autor una serie de cuarenta y cuatro ensayos repartidos en dos categorías y siete grupos correspondientes á todas las materias de posible aplicación al engrase, es éste el único ensayo que ha incluído en detalle en su obra, y siendo así, tenemos que considerarlo como un prototipo de los resultados que puedan dar en método y aparato. En fin, no podemos menos de observar que en estas cifras mismas va la negación de dicho método, pues si analizamos el fenómeno, vemos que el trabajo de la lubrificación se emplea en aumentar la temperatura hasta que el calor desprendido por radiación del cojinete sea equivalente

al que recibe por la transformación de la energía gastada, y tendremos siempre entre los dos elementos temperatura ó, mejor dicho, diferencia de temperatura entre la ambiente t y la del cojinete θ, y energía gastada π,

$$\pi = A(t - \theta).$$

Siendo A un coeficiente que depende de la forma del sistema, de los materiales que lo componen y eventualmente del estado de reposo ó de movimiento del aire del lugar en que se practican las pruebas. Sabemos que las pruebas han sido hechas, á lo menos las que corresponden al mismo grupo, y seguramente las que corresponden al mismo aceite con el mismo aparato, en el mismo lugar y á la misma temperatura de 70° F. (21° C.), y es lógico suponer que lo han sido también en las mismas condiciones generales. Consideremos ahora los resultados obtenidos en cuanto á los coeficientes de frotamiento observados y sus productos por las presiones correspondientes á las cantidades de energía gastadas. En efecto, los productos de los coeficientes de frotamiento por las presiones unitarias nos darán unas cantidades proporcionales á las de energía gastada y, por consiguiente, que deben serlo también á las diferencias de temperatura, entre la de equilibrio y la del ambiente. Con estos elementos estableceremos el cuadro siguiente:

Presión	Coeficiente.	Producto.	Dif. Temp.	Cociente.
0,56	0,1330	0,0745	95	0,0007842
1,12	0,1083	0,1213	180	0,0006739
2,24	0,0833	0,1866	165	0,001131
3,36	0,1050	0,3478	164	0,002108

Se ve, examinando los cocientes, que las cantidades de energía gastadas han variado según una ley que nada tiene que ver con la que ha regido para las diferencias entre la temperatura de equilibrio y la temperatura exterior. De modo

que, en resumen, si consideramos las temperaturas de equilibrio obtenidas, vemos que no son, ni con mucho, las normales, y si consideramos las cantidades de energía gastada, vemos que no corresponden ni de lejos á las temperaturas; por otra parte, hemos de admitir que las pruebas realizadas lo han sido con la perfeción práctica posible, y estamos, por consiguiente, obligados á admitir que en estas pruebas no se ha realizado nunca el estado de equilibrio ni aun aproximado, pues de haber existido se hubiera traducido en la proporcionalidad, á lo menos aproximada, entre los dos elementos temperatura y energía, y como quiera que la característica del fenómeno de lubrificación es precisamente el equilibrio entre las acciones hidrodinámicas del lubrificante y las de las superficies, tenemos la seguridad de que lo que se realiza en el aparato Thurston es un fenómeno complejo que nada tiene que ver con el frotamiento lubrificado que se trataba de examinar.

En vista de estas consideraciones, una Compañía americana hizo construir, para el caso de los ferrocarriles, un aparato de ensayo que consistía en un cojinete y un gorrón ó mangueta de las dimensiones de los de los vagones, pero con una aplicación de presión por medio de palancas, exactamente en la misma forma que se verifica en la realidad. No conocemos este aparato en cuanto á su resultado, pero sabemos que no ha sido adoptado en ninguna Compañía de ferrocarriles europeos, ni ha dado lugar á estudios sobre el asunto de la lubrificación; sin embargo, este aparato representaba una tendencia, la que hemos señalado al principio de esta última parte, á aproximarse á la realidad. Más recientemente toma su puesto en el orden histórico el aparato á que hemos aludido anteriormente que figuraba en la Exposición de París de 1900, en la sección de Ferrocarriles, en el que, además de estar aplicadas las presiones exactamente como en la realidad, se daba al sistema una parte de los movimientos de trepidación del vehículo por medio de

excéntricas. Los ensayos que en él se practicaron sabemos que tampoco correspondían, en cuanto á sus resultados, á los que se conocían por la práctica, y ésto nos lleva á la conclusión natural de que para obtener mayor perfección en el aparato de ensayo, habría que procurar que interviniesen en él todas las acciones de todo género que pudieran intervenir en la práctica, y entonces, fatalmente, habremos reconstituído el material tal como existe, habremos salido por fuerza del marco de los ensayos de laboratorio y estaremos puestos en el caso, que es el único lógico, y de acuerdo tanto con la teoría como con la observación obtenida con los demás métodos, de que el único ensayo verdadero es el de la prueba práctica.

APÉNDICE

Hemos dicho que la influencia de la capilaridad estática sería muy poco importante si existiera sola, como ocurriría en el estado de reposo, en el que no habría erosión que disminuyera indefinidamente el espesor de la capa líquida lubrificante, y tenemos, en los ensayos ya referidos del Profesor Stribeck, una demostración de este hecho; en efecto, las determinaciones del coeficiente de frotamiento en el caso de reposo para dos presiones tan extremas como 2 kilos y 60 kilos por centímetro cuadrado, nos han dado los valores de 0,21 y 0,24, lo cual, teniendo en cuenta los errores inevitables en estos ensayos, significa que estos dos coeficientes son los mismos, siendo ésta la característica del frotamiento sólido; esto significa que la acción del lubrificante ha sido nula á pesar de existir á su favor la influencia de la capilaridad que hemos llamado estática, viniendo ésto á confirmar que el factor de mayor importancia en la lubrificación es el de la alimentación de engrase por adherencia en la parte de la vena que soporta la presión, fenómeno éste esencialmente dinámico.

PUBLICACIONES RECIBIDAS DESDE 1.° DE JULIO DE 1907

(Continuación.)

Royal Geographical Society —The Geographical Journal.—Vol XXX, número 5, November, 1907.—London.

Museum of Comparative Zoology at Harvard College.—Bulletin of the... Vol LI., núm. 5.—Cambridge, Mass., U. S. A. October, 1907.

Hollick (Arthur).—United States Geological Survey, Charles D. Walcott, Director.—The Cretaceous Flora of Southern New-York and New-England, By... - Washington, 1906.

Departiment of the Interior.— United States Geological Survey Charles D. Walcott, Director.—Bulletin, No. 279.—Series: A, Economie Geology, 67; B, Descriptive Geology. 83.—Economie Geology of the Kittanning and Rural Valley Quadrangles, Pennsylvania, By Charles Butts.—Washington, 1906.

— Bulletin, No. 286. Series: A, Economic Geology, 74; B, Descriptive Geology, 93.—Economic Geology of the Reaver Quadrangle, Pennsylvania, By Lester H. Woolsey.—Washington, 1906.

— Bulletin No. 297. Series: A, Economie Geology, 84; B, Descriptive Geology, 104.—The Yampa Coal Field, Rouss County, Colorado, By N. M., Fenneman and Hogt, S. Gale With a Chapter on the Character and use of the Yampa Coals, By Marins R. Campbell.—Washington, 1906.

— Bulletin, No. 303. Series: A, Economie Geology 87; B, Descriptive Geology, 106.—Preliminary Account of Goldfield, Bullfrsg, and other mining Districts in Southern Nevada.—By Frederick Leslie Ransome with Notes on the Manhattan District, By G. H. Garrey and W. H. Emmons.—Washington, 1907.

— Bulletin, No. 306. Series: A, Descriptive Geology, 109; F, Geography, 54.—Rate of Recession of Niagara Falls By G. K. Gilbert, Acompanied by a Report on the Survey of the Crest By W. Carvel Hall.—Washington, 1907.

— Bulletin, No. 307. Series F, Geography, 50.—Manual of Topographie Methods By Henry Gannett.—Washington, 1906.

— Bulletin, No. 310. Serie F. Geography, 57.—Results of Primary Triangulation and Primary Traverse fiscal year, 1805-1906, By Samuel S. Gannett.—Washington, 1907.

— Bulletin, No. 305. Serie E, Chemistry and Physics, 49.—The Analysis of Silicate and Carbonate Rochs By W. F. Hillebrand.—Washington, 1907.

(Continuará)

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE TOMO

Págs.

Composición de la Academia en 1.º de Julio de 1908.

Académicos de número 5
Académicos electos 6
Académicos Corresponsales nacionales 7
Académicos Corresponsales extranjeros 8

Elementos de la teoría de la Elasticidad, por *José Echegaray.* (Conferencias 9.ª á 14.ª) 11, 55, 145, 217, 297 y 337

Análisis de las aguas minero-medicinales de Carraclaca (Lorca), por *Gabriel de la Puerta* 82

Teoría química de la inhibición fisiológica, por *José R. Carracido* 108

Nueva teoría para el desarrollo de las ecuaciones finales, por *Gualterio Seco* ..... 118, 198 y 258

Del modo de expresar la acidez, por *Juan Fages* 179

Estudio químico-geognóstico de algunos materiales volcánicos del Golfo de Nápoles, por *Ramón Llord y Gamboa* .. 179 y 250

Fundamento teórico de la Fototopografía, por *José María Torroja* ..... 273, 380, 468 y 565

Estudio experimental de algunas propiedades del grisú, por *Enrique Hauser* ..... 350 y 454

Sobre una transformación geométrica, por *Juan J. Durán-Lóriga* 364

Elementos de la teoría de la Elasticidad, por *José Echegaray.* (Curso de 1907-1908. Conferencias 1.ª á 9.ª). 393, 414, 489, 517, 581, 667, 704, 773 y 869

Mareómetros y mareógrafos de sifón, por *Eduardo Mier y Miura* ..... 437, 544, 637, 736, 826 y 901

Programa de premios para el concurso del año 1909 482

Análisis químico con arreglo á los iones y estudio físico y biológico de las aguas minerales sulfhídricas radio-nitrogenadas, denominadas «Hervidero de San Vicente», por *Gabriel de la Puerta* 616

Págs.

Estudio comparativo de los instrumentos más usados en Sismología, por *Manuel María S. Navarro (S. J.)*. 653, 761, 859 y 911
Función de las fibras centrípetas respiratorias del nervio pneumogástrico, por *José Gómez Ocaña* 724
Estudio acerca de la determinación volumétrica del ácido de carbono, por *Enrique Hauser* ..... 755 y 836
Nuevos tuberáceos de España, por *B. Lázaro é Ibiza* 801
Los sulfatos de calcio y de plomo en el ácido tartárico comercial, por *Ruperto Lobo Gómez* 853
El frotamiento mixto y los métodos de ensayo de los lubrificantes, por *Luis Henry* 927

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO VI.—NUM. 12.
(Junio de 1908.)

MADRID
IMPRENTA DE LA GACETA DE MADRID
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.
1908

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

Págs.

XLIV.—Elementos de la teoría de la Elasticidad, por *José Echegaray*. Conferencia novena..... 869

XLV.—Mareómetros y mareógrafos de sifón, por *Eduardo Mier y Miura*..... 901

XLVI.—Estudio comparativo de los instrumentos más usados en Sismología, por *Manuel-M.ª S. Navarro S. J.*... 911

XLVII.—El frotamiento mixto y los métodos de ensayo de los lubrificantes, por *Luis Henry*..... 927

Publicaciones recibidas desde 1.º de Julio de 1907 *(continuación)*..... 960

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.